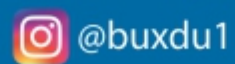
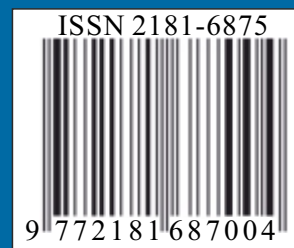




BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

9/2023



9/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 9, oktabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Fouzia A., Rasulov T.H.	Modified proximal point algorithm for minimization and fixed-point problem in geodesic space with positive curvature	4
Norkobilov A.T., Bakhtiyorov A.N., Elmanov J.B.	Modeling of membrane processes for the separation of azeotropic mixtures	9
Doliyev Sh.Q.	Juft regressiya va korrelyasiya tahlillari orqali noaniq sharoitlar uchun ekonometrik model tuzish	14
Dusanova G.M., Tadjiyeva M.K., Egamberdiyeva M.X., Qobilov F.Sh., Bozorov Sh.I.	Maktabgacha ta'lim muassasalarida 3-7 yoshli bolalar uchun ratsional ovqatlanish tamoyillarini ishlab chiqish	20
Farxodov S.U.	Texnologik jarayonlarni optimallashtirishda texnik vositalarni tadqiq qilish	28
Jumayev J., Fatilloeva M.N.	Manbasiz turli materialli bir o'lchovli sohalarida issiqlik tarqalishini sonli o'rganish	35
Rahmonov E.S.	Bir jinsli sohalarida Karleman formulasi	43
Raxmatov I.I., Jo'rayev H.O., Mirzayev M.S., Halimov N.N.	O'zbekiston sharoitida quyosh fotoelektrik stansiyalarini ishlatishning ilmiy-texnik imkoniyatlari	48
Shaxriddinov F.F., Akbarov M.M., Egamberdiyeva M.X., Ergashov A.M.	7-12 yoshdagi bolalarni ratsional ovqatlanishining yangi tamoyillarini ishlab chiqish	58
Shaxriddinov F.F., Berdimuradov X.T., Ibragimov A.K., Irgasheva M.E., Shodiyeva E.B.	Sportchilar uchun funksional ovqatlanish mahsulotlarini tahlil qilish	66
Barakayev N.R., Uzoqov Y.A., Ergashev A.M., Sayfullayev N.I.	O'zbekiston sharoitida zamonaviy un ishlab chiqarish texnologik liniyasini narariy jihatdan asoslash	74
Шарипов М.З., Хайитов Д.Э., Эргашева Н. М. Олимпур Ф.И., Файзиева З.Х., Зокирова З.М.,	Доменная структура бората железа	79
Bozorov I.N., Rasulov T.H., Tosheva N.A.	Panjaradagi chekli o'lchamli qo'zg'alishga ega bir zarrachali Hamiltonian uchun Birman-Shvinger prinsipi	84
Tosheva N.A.	Uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi uchun Birman-Shvinger prinsipi va uning tadbiqlari	91
Akramova D.I, Qurbonova D.N.	On classification of singularities related to oscillatory integrals	99

Jumayeva Ch.I.	Ba'zi to'rt o'lchamli Li algebralarning lokal ichki differensiallashlari	106
Зарипов Г.Т.	Технология производства напитков на основе составляющих природного характера	110
Меражова Ш.Б	Эквивалентность обратной задачи поставленной уравнению смешанного типа интегральному уравнению Фредгольма 1-рода	114
Bazarova S.J.	Elementary thermodynamics	120
Суяров Т.Р.	Прямая задача для соответствующего уравнения дробной диффузии	127
TILSHUNOSLIK *** LINGUISTICS *** ЯЗЫКОЗНАНИЕ		
Navruzova M.G.	Tibbiy birliklarning folklor asarlaridagi genderologik tavsifi	133
Raxmanov B.A.	Surxondaryo etnodialektal xarakterdagi maqol va matallarning turlari hamda lingvomadaniy xususiyatlari	137
Nazarova S.A.	Turkiy tillarda shaxs tavsifining sintaktik ifodasi xususida	142
Akramov I.I.	An aphorism as an entire passage: mechanisms of structural-semantic organization	148
Nabiyeva Sh.I.	Formation and orthological genesis of the English literary language norms	154
Saidova M.U.	Ingliz adabiyotshunoslik lug'atlari xususida mulohazalar	158
Umurova Kh. Kh.	Linguoculturological analysis of axiological concepts of wedding rite in different cultures	164
Жўраева Ю.Ф	Ўзбек хотин-қизлар исмларида ой лексемасининг ўрни ва қўлланиши	168
Vaxidova F.S	Ziyorat turizmi terminlarining struktural qoliplari	173
Kilichev B.E.	Regionim – Buxoro toponimlarining bir guruhi	178
Мейлиева М.О.	Использование современных подходов в преподавании русского языка в условиях билингвизма: актуальные проблемы и рекомендации	182
Каримова Г.Х.	Лингвокультурологические особенности экклезионимов джизакской области	186
Қаҳҳорова Г.Ш.	Юкламаларнинг ёрдамчи сўзлар билан вазифадошлиги	192
ADABIYOTSHUNOSLIK *** LITERARY CRITICISM *** ЛИТЕРАТУРОВЕДЕНИЕ		
Latipova S.T.	Tarixiy asarlarda Buxoroning hukmdor ayoli tavsifi	203
Meliyev X.N.	Gulbadan Begimning "Humoyunnoma" asari va tarjimalarida keltirilgan ruboiyning adabiy tahlili	209
Тўхсанов Қ.Р.	Румий "Маснавийи маънавий" манзумасининг аслият ва ўзбекча таржимасининг рақамларда берилиши	213
Болтаева Г.Ш.	О'zbek adabiyotida ilk Muxammas	221
Abdullayeva X.N.	Ingliz hamda o'zbek ertaklarida g'aroyib safar motivi	225
Habibova M.N.	Description of the Orient in Lawrence's "Seven pillars of wisdom"	229
Karamova Sh.L.	Aruz – metaforik tafakkurning keng maydoni sifatida	234
Karimova Sh.K.	Zamonaviy ingliz va o'zbek she'riyatida tovush takrorlarining o'ziga xos jihatlari	238
Muxtorova U.T.	Mumtoz adabiyot namunalari ilohiy motivlar va rivoyatlarning qo'llanilish tamoyillari	246
Urazaliyeva M.G'.	Maya Anjelu asarlarining adabiy tanqidchilar tomonidan tahlil qilinishi	251
Xolova M.B.	Badiiy matnda xushmuomalalik strategiyalarining voqelanishi	257

UCHINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR OILASI UCHUN BIRMAN-SHVINGER PRINSIPI VA UNING TADBIQLARI

Tosheva Nargiza Ahmedovna,

Buxoro davlat universiteti

Matematik analiz kafedrasida dotsenti v.b., f.-m.f.f.d (PhD)

n.a.tosheva@buxdu.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos $H(K)$, $K \in (-\pi; \pi]^d$ uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi qaralgan.

Bu operator bozonli Fok fazoning qirg'ilgan uch zarrachali qism fazosida ta'sir qiladi. $H(K)$ operatorli matritsalar oilasiga mos Birman-Shvinger prinsipi keltirib chiqarilgan hamda uning ayrim tadbiqlari keltirilgan.

Kalit so'zlar: panjara, zarrachalar sistemasi, operatorli matritsa, bozonli Fok fazo, paydo qilish va yo'qotish operatorlari.

ПРИНЦИП БИРМАНА –ШВИНГЕРА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В данной статье рассматривается семейство матриц с оператором третьего порядка $H(K)$, $K \in (-\pi; \pi]^d$, соответствующее системе частиц, число которых в решётке не сохраняется и не превышает трёх. Этот оператор действует на усечённом трёхчастичном подпространстве в бозонного пространства Фока. Выводится принцип Бирмана-Швингера, соответствующий семейству операторных матриц $H(K)$, и приводятся некоторые его приложения.

Ключевые слова: решётка, система частиц, операторная матрица, пространство Фока с бозонами, операторы создания и уничтожения.

THE BIERMANN-SCHWINGER PRINCIPLE FOR A FAMILY OF THIRD-ORDER OPERATOR MATRICES AND ITS APPLICATIONS

Abstract. This article considers a family of matrices with a third-order operator $H(K)$, $K \in (-\pi; \pi]^d$, corresponding to a system of particles, the number of which in the lattice is not conserved and does not exceed three. This operator acts on the truncated three-particle subspace of the bosonic Fock space. The Birman-Schwinger principle corresponding to the family of operator matrices $H(K)$ is derived and some of its applications are given.

Key words: lattice, particle system, operator matrix, Fock space with bosons, creation and destruction operators.

Kirish. Elementlari Banax yoki Hilbert fazolarida ta'sir qiluvchi chiziqli operatorlardan iborat matritsalariga blok operatorli matritsalar yoki qisqacha operatorli matritsalar deyiladi [1,2]. Bunday matritsalarining muhim sinflaridan biri – bu panjaradagi soni saqlanmaydigan zarrachalar sistemasiga mos Gamiltonianlardir. Zarrachalar soni spin-bozon modelidagi kabi cheksiz yoki qirg'ilgan spin-bozon modelidagi kabi chekli bo'lishi mumkin. Zarrachalar soni cheksiz bo'lgan holda cheksiz o'lehamli operatorli matritsa, zarrachalar soni chekli bo'lgan holda esa chekli o'lehamli operatorli matritsa hosil bo'lishini ta'kidlab o'tamiz. Operatorli matritsalar oilasining muhim va diskret spektrlari bilan bog'liq masalalar qattiq jismlar fizikasi [3], kvant maydon nazariyasi [4], statistik fizika [5], magnetogidrodinamika [6], kvant mexanikasi [7] va boshqa ko'plab sohalardagi dolzarb masalalardan hisoblanadi. Shuning uchun panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos operatorli matritsalar oilasiga oid tadqiqotlarni rivojlantirish muhim hisoblanadi.

Adabiyotlar tahlili. Quyida biz soni saqlanmaydigan chekli sondagi zarrachalar sistemasiga mos

gamiltonianlar uchun olib borilgan ayrim tadqiqotlarga to'xtalamiz. \mathbb{R}^d Yevklid fazosidagi soni saqlanmaydigan chekli sondagi zarrachalar sistemalari [8,9] kabi ishlarda o'rganilgan [9]. Maqolada bitta atom va ko'pi bilan ikkita foton holda uch zarrachali radioaktiv sochilish masalasi qaralgan. Mualliflar chekli (0, 1 yoki 2) sondagi fotonli spin-bozon modeli standart uch zarrachali masala analogi ekanligini ko'rsatgan. Standart sochilishlar nazariyasi texnikasidan foydalanib bog'lanish o'zgarmasining yetarlicha kichik qiymatlarida to'lqin operatorlarining mavjudligini va to'laligini isbotlashgan. Xususan, berilgan gamiltonian spektrning absolyut uzluksiz qismidan tashqarida yotuvchi yagona asosiy holatga egaligi va singulyar uzluksiz spektrning bo'sh to'plam bo'lishi ko'rsatilgan.

[8] ishda qo'zg'almas atomga ega va ko'pi bilan uchta fotonli spin-bozon modelini tadqiq qilishgan hamda to'lqin operatorlarining mavjudligini va asimptotik to'laligini isbotlashgan. Qayd qilingan natijalarni isbotlashda gamiltonianlarning rezolventasini o'rganish muhim o'rin egallagan.

[10] maqolada dispersiya funksiyasi chegaralangan holda, $\alpha > 0$ ta'sirlashish parametrining ixtiyoriy qiymatida \mathbb{R}^d fazodagi ko'pi bilan ikki fotonli spin-bozon modelining spektri tahlil qilingan. Bu holda muhim spektrning aniq ko'rinishi tavsiflangan hamda muhim spektrning ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. Bundan tashqari, muhim spektr bitta kesmadan yoki oltitadan ko'p bo'lmagan kesmalar birlashmasidan iborat bo'lish shartlari topilgan.

[11] maqolada $\alpha > 0$ ta'sirlashish parametrining ixtiyoriy qiymatlari uchun \mathbb{R}^d dagi ko'pi bilan ikki fotonli spin-bozon modeliga mos model operator spektri tahlil qilingan. Model operator diskret spektrining chekli to'plam bo'lishi, muhim spektrining quyi chegarasi esa sodda Nevanlinna funksiyasining noli bo'lishi ko'rsatilgan.

[12] ishda panjaradagi ko'pi bilan ikkita fotonli spin-bozon modelining spektral tahlilida muhim ahamiyatga ega bo'lgan operatorli matritsaning spektri o'rganilgan. Uning muhim spektri tavsiflangan. Muhim spektrdan chapda yotuvchi xos qiymatlar sonining chekli bo'lish shartlari keltirib chiqarilgan.

[13] ishda panjaradagi soni saqlanmaydigan chekli sondagi zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining joylashuv o'rni va tuzilishi tavsiflangan. Diskret spektrning muhim spektr uch zarrachali tarmog'idan chapda joylashgan qismining chekliligi esa isbotlangan [14]. Model operator parametrlariga qo'yilgan ba'zi shartlarda cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligi (Yefimov hodisasi) [15,16] ishlarda isbotlangan.

[17] ishda ikkinchi tartibli operatorli matritsa ko'rinishidagi umumlashgan Fridriks modeli sonli tasvirining tuzilishi yordamida uning spektri va sonli tasviri ustma-ust tushish shartlari topilgan [18]. Ishda umumlashgan Fridriks modelining kvadratik sonli tasviri komponentalarining chegaralari uchun baholashlar olingan. Umumlashgan Fridriks modellari oilasining spektri yordamida soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi bilan bog'liq ikkinchi tartibli operatorli matritsaning muhim spektri [19] ishda aniqlangan [20]. Ishda esa spektral parametrning ikkinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektridan tashqarida chekli yoki cheksiz sondagi xos qiymatlarga ega bo'ladigan sirlari ajratilgan bo'lib, uning qiymati 6 ga teng bo'lganda bir vaqtning o'zida muhim spektrdan chapda va o'ngda xos qiymatlar soni cheksiz bo'lishi isbotlangan.

[21] ishida quyidagi natijalar olingan: panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Gamiltoniani H qaralgan. m (m soni H operator muhim spektrining uch zarrachali tarmog'ining quyi chegarasi) ga intiluvchi xos qiymatlar sonining cheksizligi parametr funksiyaning aynimagan minimumga ega bo'ladigan nuqtalari soniga bog'liq holda o'rganilgan. H operatorning $z, z \leq m$ dan quyida yotuvchi xos qiymatlari soni uchun $z \rightarrow m - 0$ da topilgan asimptotika bunday nuqtalarga bog'liq emasligi ko'rsatilgan. Shu bilan birga bir o'lchamli holda operator muhim spektrining quyi chegarasi uchun baholash hamda H operator xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo'lish shartlari topilgan.

So'ngra, ko'pi bilan n ($n = 1, 2$) ta fotonli spin-boson modelining panjaraviy analogi \mathcal{A}_n tadqiq qilingan.

\mathcal{A}_1 operatorning spektri orqali \mathcal{A}_2 operator muhim spektrining joylashuv o'rni tavsiflangan, ya'ni \mathcal{A}_2 operator muhim spektrining ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. \mathcal{A}_2 operator muhim

spektrining chap tomonida joylashgan xos qiymatlar soni chekli ekanligi aniqlangan. Bundan tashqari, panjaradagi soni saqlanmaydigan chegaralangan sondagi zarrachalar sistemasiga mos H gamiltonian kompakt bo'lmagan qo'zg'alishli uchinchi tartibli operatorli matritsa kabi qaralgan. H operatorli matritsa muhim spektrining joylashuvi kanal operatorning spektri orqali tavsiflangan. H operatorli matritsaning xos vektorlari uchun Faddeyev tipidagi tenglama olingan. H operatorli matritsa muhim spektrining ichida (muhim spektr bo'shlig'ida, muhim spektridan quyida) yotuvchi cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligini kafolatlaydigan shartlar topilgan.

[22] ishda uch o'lchamli panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtdan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos $H(K)$ uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari aniqlangan; ikkinchi tartibli operatorli matritsa ko'rinishidagi $h(k)$ umumlashgan Fridriks modellari oilasi spektral parametrining diskret to'plamdan olingan qiymatlarida bo'sag'aviy xos qiymat va virtual sathning mavjudlik, hamda musbatlik shartlari topilgan; nol soni umumlashgan Fridriks modeli uchun xos qiymat bo'lsa yoki umumlashgan Fridriks modeli nomanfiy bo'lib, nol soni regulyar tipdagi nuqta bo'lsa, u holda operatorli matritsalar oilasi spektral parametrining diskret to'plamdan olingan qiymatlarida manfiy xos qiymatlari sonining chekli bo'lishi isbotlangan; umumlashgan Fridriks modeli nol energiyali rezonansga ega bo'lsa, u holda uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi spektral parametrining diskret to'plamdan olingan qiymatlarida xos qiymatlari sonining cheksiz bo'lishi isbotlangan hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topilgan.

Uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi va uning muhim spektri. Maqolada ishlatiladigan ayrim fazolarni kiritamiz. \mathbb{C} orqali bir o'lchamli kompleks fazoni, \mathbb{T}^d orqali d o'lchamli tori, $L_2(\mathbb{T}^d)$ orqali \mathbb{T}^d torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda, kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosini, $L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ orqali $(\mathbb{T}^d)^2$ to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda, kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini hamda \mathcal{H} orqali $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^d)$ va $\mathcal{H}_2 := L_2^s((\mathbb{T}^d)^2)$ fazolarning to'g'ri yig'indisini belgilaymiz, ya'ni $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Bunda $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ va \mathcal{H}_2 fazolarga $L_2(\mathbb{T}^d)$ fazo yordamida qurilgan $\mathcal{F}_s(L_2(\mathbb{T}^d))$ bozonli Fok fazoning mos ravishda nol zarrachali, bir zarrachali va ikki zarrachali qism fazolari, \mathcal{H} Hilbert fazosiga esa bozoli Fok fazosining qirqilgan uch zarrachali qism fazosi deyiladi.

\mathcal{H} Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi quyidagi

$$H(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix} \quad (1)$$

uchinchi tartibli $H(K)$, $K \in (-\pi; \pi]^d$ operatorli matritsalar oilasini qaraymiz. Bu yerda matritsaviy elementlar

$$\begin{aligned} H_{00}(K)f_0 &= w_0(K)f_0, & H_{01}f_1 &= \int_{\mathbb{T}^s} v_0(t)f_1(t)dt; \\ (H_{11}(K)f_1)(p) &= w_1(K;p)f_1(p), & (H_{12}f_2)(p) &= \int_{\mathbb{T}^s} v_1(t)f_2(p, t)dt; \\ (H_{22}(K)f_2)(p, q) &= w_2(K;p, q)f_2(p, q), & f_i &\in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

kabi aniqlangan bo'lib, H_{ij}^* ($i < j$) orqali H_{ij} operatorga qo'shma operator belgilangan. Bundan tashqari $w_0(\cdot)$ va $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ funksiyalar \mathbb{T}^d da aniqlangan haqiqiy qiymatli chegaralangan funksiyalar, $w_1(\cdot; \cdot)$ va $w_2(\cdot; \cdot)$ funksiyalar esa mos ravishda

$$\begin{aligned} w_1(K; p) &:= l_1 \varepsilon(p) + l_2 \varepsilon(K - p) + 1, \\ w_2(K; p, q) &:= l_1 \varepsilon(p) + l_1 \varepsilon(q) + l_2 \varepsilon(K - p - q), \end{aligned}$$

tengliklar yordamida aniqlanib, $l_1, l_2 > 0$ va

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ta'kidlash joizki, H_{01} va H_{12} operatorlarga yo'qotish operatorlari, H_{01}^* va H_{12}^* operatorlarga esa paydo qilish operatorlari deyiladi. Mazkur tadqiqot ishida qaralayotgan zarrachalar sistemasida paydo bo'ladigan va yo'qoladigan zarrachalar soni 1 ga teng hol tahlil qilinadi. Bu esa, o'z navbatida, m5 $H_{02} \equiv 0$ va $H_{02}^* \equiv 0$ ekanligini anglatadi.

O'quvchiga qulaylik uchun H_{01}^* va H_{12}^* qo'shma operatorlarni hisoblaymiz.

Ixtiyoriy $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1$ uchun

$$(H_{01}f_1, f_0) = \int_{\mathbb{T}^3} v_0(t)f_1(t)dt \cdot \overline{f_0} = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)(\overline{v_0(t) \cdot f_0})dt = (f_1, H_{01}^*f_0)$$

munosabatlar o'rinli ekanligidan

$$H_{01}^*: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1, (H_{01}^*f_0)(p) = v_0(p)f_0, f_0 \in \mathcal{H}_0$$

tenglik kelib chiqadi. Bunda biz $v_0(\cdot)$ funksiyaning \mathbb{T}^d torda aniqlangan haqiqiy qiymatli funksiya ekanligidan foydalandik.

Xuddi shuningdek, $v_1(\cdot)$ funksiyaning \mathbb{T}^d da aniqlangan haqiqiy qiymatli funksiya va f_2 ning simmetrik funksiya ekanligidan foydalanib, ixtiyoriy $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 1, 2$ uchun

$$\begin{aligned} (H_{12}f_2, f_1) &= \int_{\mathbb{T}^3} \left(\int_{\mathbb{T}^3} v_1(s)f_2(t, s) ds \right) \cdot \overline{f_1(t)} dt = \int_{(\mathbb{T}^3)^2} v_1(s)\overline{f_1(t)}f_2(t, s) ds dt = \\ &= \int_{(\mathbb{T}^3)^2} f_2(t, s) \cdot \frac{1}{2} (v_1(s)f_1(t) + v_1(t)f_1(s)) ds dt = (f_2, H_{12}^*f_1) \end{aligned}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu esa o'z navbatida

$$H_{12}^*: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2, (H_{12}^*f_1)(p, q) = \frac{1}{2} (v(p)f_1(q) + v(q)f_1(p)), f_1 \in \mathcal{H}_1$$

ekanligini bildiradi.

$H(K)$ operatorli matritsalar oilasining spektral xossalarni o'rganishda muhim sanalgan $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida

$$h(k) := \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix}$$

kabi aniqlangan va umumlashgan Fridriks modellari oilasi deb ataluvchi $h(k), k \in \mathbb{T}^d$ operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda

$$\begin{aligned} h_{00}(k)f_0 &= (l_2 \varepsilon(k) + 1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_1(t)f_1(t)dt, \\ (h_{11}(k)f_1)(q) &= E_k(q)f_1(q), \quad E_k(q) := l_1 \varepsilon(q) + l_2 \varepsilon(k - q). \end{aligned}$$

$h(k)$ operatorli matritsaning muhim spektri uchun $\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ tenglik o'rinlidir. Bu yerda $E_{\min}(k)$ va $E_{\max}(k)$ sonlari

$$E_{\min}(k) := \min_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q) \quad \text{va} \quad E_{\max}(k) := \max_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q)$$

tengliklar yordamida aniqlangan.

Har qanday $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ sohada analitik bo'lib,

$$\Delta(k; z) := l_2 \varepsilon(k) + 1 - z - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^s} \frac{v_1^2(t) dt}{E_k(t) - z}$$

tenglik yordamida aniqlangan funksiyani qaraymiz. Odatda $\Delta(k; \cdot)$ funktsiyaga $h(k)$ operatorli matritsaga mos Fredgolm determinanti deyiladi.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$m_K := \min_{p, q \in \mathbb{T}^s} w_2(K; p, q), \quad M_K := \max_{p, q \in \mathbb{T}^s} w_2(K; p, q),$$

$$\sigma_K := \bigcup_{p \in \mathbb{T}^s} \{\sigma_{\text{disc}}(h(K - p)) + l_1 \varepsilon(p)\}, \quad \Sigma_K := [m_K; M_K] \cup \sigma_K.$$

Keyingi bo'limda foydalanishga qulaylik uchun $\tau_{\text{ess}}(K)$ orqali $H(K)$ operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining quyi chegarasini belgilaymiz, ya'ni $\tau_{\text{ess}}(K) := \min \sigma_{\text{ess}}(H(K))$.

Teorema 1. $H(K)$ operatorli matritsalar oilasi muhim spektri uchun $\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \Sigma_K$ tenglik o'rinlidir.

Birman-Shvinger prinsipi va uning tadbiqlari. Bu bo'limda $H(K)$ operatorli matritsalar oilasi uchun Birman-Shvinger prinsipi isbotlanadi hamda uning yordamida olinadigan natijalar bayon qilinadi.

$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ fazoda ta'sir qiluvchi hamda o'z-o'ziga qo'shma $T(K, z)$, $z < \tau_{\text{ess}}(K)$ kompakt 2×2 blok operatorli matritsani quyidagicha aniqlaymiz:

$$T(K, z) := \begin{pmatrix} T_{00}(K, z) & T_{01}(K, z) \\ T_{10}(K, z) & T_{11}(K, z) \end{pmatrix}.$$

Uning matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan:

$$T_{00}(K, z)g_0 = (1 + z - w_0(K))g_0, \quad T_{01}(K, z)g_1 = \int_{\mathbb{T}^s} \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K - t; z - l_1 \varepsilon(t))}};$$

$$(T_{10}(K, z)g_0)(p) = - \frac{v_0(p)g_0}{\sqrt{\Delta(K - p; z - l_1 \varepsilon(p))}},$$

$$(T_{11}(K, z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\sqrt{\Delta(K - p; z - l_1 \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}^s} \frac{(w_2(K; p, t) - z)^{-1} v_1(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta(K - t; z - l_1 \varepsilon(t))}}$$

bunda $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1$.

\mathcal{H} Gilbert fazosida ta'sir qiluvchi \mathcal{A} chiziqli, chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator uchun $n(\gamma, \mathcal{A})$ sonini quyidagi qoida yordamida aniqlaymiz:

$$n(\gamma, \mathcal{A}) = \sup \{ \dim F : (\mathcal{A}u, u) > \gamma, u \in F \subset \mathcal{H}, \|u\| = 1 \}.$$

Agar $\gamma < \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ bo'lsa, u holda $n(\gamma, \mathcal{A})$ soni cheksizga teng bo'ladi. Agar $n(\gamma, \mathcal{A})$ soni chekli bo'lsa, u holda bu son \mathcal{A} operatorning γ dan katta xos qiymatlari soniga (karralıkları bilan qo'shib hisoblaganda) teng bo'ladi.

$N(K, z)$ orqali $H(K)$ operatorli matritsaning $z \leq \tau_{\text{ess}}(K)$ dan chapda joylashgan xos qiymatlari sonini belgilaymiz. U holda

$$N(K, z) = n(-z, -H(K)), \quad -z > -\tau_{\text{ess}}(K)$$

tenglik o'rinlidir.

Quyidagi teorema $H(K)$ operatorli matritsa uchun mashhur Birman-Shvinger prinsipini ifodalaydi.

Teorema 2. Faraz qilaylik, $K \in \mathbb{T}^d$ bo'lsin. U holda $T(K, z)$ operatorli matritsa $z < \tau_{ess}(K)$ bo'lganda kompakt va uzluksiz hamda $N(K, z) = n(1, T(K, z))$ tenglik o'rinlidir.

Isbot. $H(K)$ operatorli matritsalar oilasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$H(K) = \begin{pmatrix} H_{00}(K) & 0 & 0 \\ 0 & H_{11}(K) & 0 \\ 0 & 0 & H_{22}(K) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & 0 & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{H}_i, i = 0, 1, 2$ Hilbert fazosida birlik operatorni $I_i, i = 0, 1, 2$, orqali belgilaymiz va $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ va \mathcal{H} fazolarda esa mos ravishda $I := \text{diag}\{I_0, I_1\}$ va $\mathfrak{I} := \text{diag}\{I_0, I_1, I_2\}$ birlik operatorlarni belgilaymiz.

$H_{ii}(K) - zI_i, i = 0, 1, 2$ operator $z < \tau_{ess}(K)$ uchun musbat va teskarilanuvchan hamda, $H_{ii}(K), i = 0, 1, 2$, operatorning $R_i(K, z) = (H_{ii}(K) - zI_i)^{-1}$ rezolventasining $R_i^{1/2}(K, z)$ kvadrat ildizi mavjud.

Faraz qilaylik, $\mathcal{M}(K, z), z < \tau_{ess}(H(K))$ operatorli matritsa quyidagi elementlardan tashkil topgan bo'lsin:

$$M_{00}(K, z) = (1 + z)I_0 - H_{00}(K), \quad M_{01}(K, z) = -H_{01}R_1^{1/2}(K, z) \\ M_{12}(K, z) := -R_1^{1/2}(K, z)H_{12}R_2^{1/2}(K, z), \quad M_{10}(K, z) = M_{01}^*(K, z), \quad M_{21}(K, z) := M_{12}^*(K, z).$$

Bundan tashqari

$$M_{\alpha\beta}(K, z) = 0, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2.$$

$$((H(K) - z\mathfrak{I})f, f) < 0, f \in \mathcal{H} \text{ tengsizlik faqat va faqat } ((M(K, z) - \mathfrak{I})g, g) > 0, g = (g_0, g_1, g_2)$$

bo'lganda o'rinlidir, bu yerda $g_0 = f_0, g_i = (H_{ii}(K) - zI_i)^{1/2}f_i, i = 1, 2$.

Bundan esa o'z navbatida

$$N(K, z) = n(1, M(K, z)) \tag{2}$$

ekanligi kelib chiqadi.

$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida $V(K, z), z < \tau_{ess}(H(K))$ operatorli matritsa quyidagi elementlardan tashkil topgan bo'lsin:

$$V_{11}(K, z) = M_{12}(K, z)M_{21}(K, z), \text{ qolgan hollarda } V_{\alpha\beta}(K, z) = M_{\alpha\beta}(K, z), \alpha, \beta = 0, 1.$$

$F = F_0 \oplus F_1 \subset \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ orqali $\dim F = n(1, V(K, z))$ tenglik bajariladigan qism fazoni belgilaymiz.

Bu holda barcha $f = (f_0, f_1) \in F$ uchun

$$(M(K, z)g, g) = (V(K, z)f, f)$$

va $g = (f_0, f_1, M_{21}(z)f_1)$.

Bundan tashqari

$$((M(K, z) - \mathfrak{I})g, g) = ((V(K, z) - 1)f, f) - \|f^{1/2}\|^2$$

barcha $f = (f_0, f_1) \in F$ uchun va $g = (f_0, f_1, M_{21}(K, z)f_1 + f_2^\perp), f_2^\perp \perp M_{21}(K, z)f_1$.

Shuning uchun,

$$n(1, M(K, z)) = n(1, V(K, z)). \tag{3}$$

$((V(K, z) - 1)\varphi, \varphi) > 0, \varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ tenglik faqat va faqat $\psi_0 = \varphi_0, \psi_1 = R_1^{1/2}(z)\varphi_1$ uchun quyidagi tengsizlik bajarilganda o'rinlidir:

$$(\psi_0, \psi_0)_0 + ((H_{11} - I_1)\psi_1, \psi_1)_1 < (M_{00}(z)\psi_0, \psi_0)_0 - (H_{01}\psi_1, \psi_0)_0 - (H_{10}(z)\psi_0, \psi_1)_1 + (H_{12}R_2(z)H_{21}\psi_1, \psi_1)_1.$$

Shu sababli

$$n(1, V(K, z)) = n(-z, G(K, z)). \tag{4}$$

Bu yerda

$$G(K, z) = \begin{pmatrix} -H_{00}(K) & -H_{01} \\ -H_{01}^* & H_{12}R_2(z)H_{12}^* - H_{11}(K) \end{pmatrix}$$

Endi esa H_{12}^* operatorni $L_2(\mathbb{T}^d)$ dan $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ fazoga ta'sir qiluvchi ikkita

$$(H^{(1)}f_1)(p, q) = \frac{1}{2}v(p)f_1(q), \quad (H^{(2)}f_1)(p, q) = \frac{1}{2}v(q)f_1(p)$$

operatorlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlaymiz.

$$D(K, z) := H_{11}(K) - z - H_{12}R_2(z)H^{(2)}, \quad z < \tau_{ess}(H(K)) \quad \text{operator } \Delta(\cdot, z) \text{ musbat funksiyaga}$$

ko'paytirish operatori hamda \mathbb{T}^d torda aniqlangan va u teskarilanuvchan. Ma'lumki, $D^{-1/2}(K, z)$ operator $\Delta^{-\frac{1}{2}}(\cdot, z)$ funksiyaga ko'paytirish operatori va $D^{-1}(K, z)$ operatorning musbat kvadrat ildizi.

Bundan, $(G(K, z)\varphi, \varphi) > -z(\varphi, \varphi)$ munosabat faqat va faqat $\eta_0 = \varphi_0, \eta_1 + D^{-\frac{1}{2}}$ uchun $(T(K, z)\eta, \eta) > (\eta, \eta)$ bajarilganda o'rinishidir hamda

$$n(-z, G(K, z)) = n(1, T(K, z)) \tag{5}$$

degan xulosaga kelamiz.

$$(2), (3), (4) \text{ va } (5) \text{ tengliklar } N_{(-\infty, z)}(H(K)) = n(1, T_\mu(K, z)) \text{ ni beradi.}$$

Va nihoyat, $T(K, z), z < \tau_{ess}(H(K))$ operator z da kompakt va uzluksizligi kelib chiqadi.

Birman-Shvinger prinsipi $H(K)$ operatorli matritsalar oilasining muhim spektrdan chapda joylashgan xos qiymatlar sonining chekli ekanligini isbotlashda tadbiiq qilinadi. Bunda A_1 va A_2 kompakt operatorlar yig'indisi hamda ixtiyoriy λ_1 va λ_2 musbat sonlar uchun o'rinli bo'lgan.

$$n(\lambda_1 + \lambda_2, A_1 + A_2) \leq n(\lambda_1, A_1) + n(\lambda_2, A_2)$$

Veyl tengsizligidan foydalaniladi. Bundan tashqari, $T(K, \sigma_{ess}(H(K)))$ limitik operatorning kompakt operator ekanligi ko'rsatiladi.

Xuddi shuningdek, Birman-Shvinger prinsipi yordamida $H(K)$ operatorli matritsa xos qiymatlari soni uchun (ularning soni cheksiz bo'lgan holda) asimptotik formulani ham keltirib chiqarish mumkin. Bunda quyidagi lemma ham qo'llaniladi.

Lemma. Faraz qilaylik, $A(z) = A_0(z) + A_1(z)$ bo'lsin, bu yerda $A_0(z)$ ($A_1(z)$), $z < 0$ ($z \leq 0$) uchun kompakt va uzluksizdir. Faraz qilaylik, biror $f(\cdot)$ funksiya uchun

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z)n(\gamma, A_0(z)) = l(\gamma)$$

limit mavjud va $l(\cdot)$ funksiya $(0; +\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Bu yerda $z \rightarrow -0$ bo'lganda $f(z) \rightarrow 0$. U holda $A(z)$ uchun ham shunga o'xshash limit mavjud va

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z)n(\gamma, A(z)) = l(\gamma)$$

tenglik o'rinli.

Eslatish joizki, $U(\cdot)$ funktsiya γ o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi bo'lganligi bois, yuqoridagi lemmaga ko'ra $A_0(z)$ qo'zg'alish operatori $n(1, T(K, z))$ uchun asimptotik munosabat keltirib chiqarishga ta'sir qilmaydi.

Xulosa. Ushbu maqolada panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos $H(K)$, $K \in (-\pi; \pi)^d$ uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi qaralgan. Bu operator bozonli Fok fazoning qirg'ilgan uch zarrachali qism fazosida ta'sir qiluvchi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. $H(K)$ operatorli matritsalar oilasining muhim spektri tavsiflangan hamda unga mos Birman-Shvinger prinsipi keltirib chiqarilgan. Matn so'ngida Birman-Shvinger prinsipining ayrim tadbirlari keltirilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Tretter C. *Spectral theory of block operator matrices and applications*. Impe. Coll. Press, 2008.
2. Jeribi A. *Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices*. Springer-Verlag, New-York, 2015.
3. Mattis D. *The few-body problem on lattice*. *Rev. Modern Phys.*, 58 (1986), 361-379.
4. Фридрихс К.О. *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.
5. Мальшиев В.А., Минлос Р.А. "Кластерные операторы", *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, 9 (1983), 63-80.
6. Lifschitz A.E. *Magnetohydrodynamics and spectral theory*, vol. 4 of *Developments in Electromagnetic Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
7. Thaller B. *The Dirac equation*. *Texts and Monographs in Physics*. Springer, Berlin, 1992.
8. Жуков Ю.В., Минлос Р.А. *Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами* *Теор. и матем. физика*, 103:1 (1995), 63–81.
9. Minlos R.A., Spohn H.. *The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons* *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, AMS Transl.–Series 2, 177 (1996), 159–193.
10. Ibrogimov O.O.. *Spectral analysis of the spin-boson Hamiltonian with two bosons for arbitrary coupling and bounded dispersion relation*. *Reviews in Mathematical Physics*, 2020, 32(6), 2050015
11. Ibrogimov O.O.. *Spectral Analysis of the Spin-Boson Hamiltonian with Two Photons for Arbitrary Coupling* *Annales Henri Poincare*, 2018, 19(11), pp. 3561-3579
12. Ibrogimov O.O., Tretter C.. *On the spectrum of an operator in truncated Fock space* *Operator Theory: Advances and Applications*, 2018, 263, pp. 321-334
13. Лакаев С.Н., Расулов Т.Х. *Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов* *Мат. заметки*, 73:4 (2003), 556–564.
14. Расулов Т.Х. *О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока*. *Теор.и мат. физика* 152:3 (2007), №. 518–528.
15. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. *On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space*. *Discrete Spectrum Asymptotics*. *J. Stat. Phys.* 127:2 (2007), P. 191–220.
16. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. *The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles*. *Methods Funct. Anal. Topology* 13:1 (2007), P. 1–16.
17. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.. *Исследование числовой области значений одной операторной матрицы*, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 35:2 (2014), 50–63
18. Dilmurodov E.B.. *New branches of the essential spectrum of a operator matrix*. *Uzbek Mathematical Journal*, 2 (2020), P. 44-51
19. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.. *Analysis of the spectrum of a operator matrix*. *Discrete spectrum asymptotics*, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 11:2 (2020), P. 138-144
20. Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.. *Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов* *Мат. заметки*, 73:4 (2003), 556–564.
21. Rasulov T.H.. *Blok operatorli matritsalar va soni saqlanmaydigan chegaralangan sondagi zarrachalar sistemi gamiltonianlarining spektral xossalari*. *Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiya avtoreferati*, - Samarqand, 2021, - 58 b.
22. Tosheva N.A.. *Uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasining muhim va diskret spektrlari*. *Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya avtoreferati*, - Qarshi, 2023, - 58 b.
23. Sobolev A.V.. *The Efimov effect*. *Discrete spectrum asymptotics // Comm. Math. Phys.*, 156 (1993), 101-126.