Математические заметки

Том 118 выпуск 5 ноябрь 2025

УДК 517.958

Обратная задача для абстрактного уравнения диффузии с дробной производной

А. А. Рахмонов

В данной работе рассматривается обратная задача определения коэффициентов абстрактного дробного уравнения диффузии. Сначала мы исследуем корректность поставленной прямой задачи и доказываем лемму об эквивалентности обратной задачи и некоторого интегрального уравнения. Затем, используя свойства решений прямой задачи, исследуем обратную задачу. С помощью теоремы о неподвижной точке в подходящем банаховом пространстве получены результаты о локальном существовании, единственности и устойчивости решения обратной задачи.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: производная Герасимова–Капуто, степень оператора, обратная задача.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14436

1. Введение. Постановка задачи. Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и нормой $\|\cdot\|$; кроме того, $A\colon D(A)\subset X\to X$ произвольный линейный неограниченный положительный самосопряженный оператор в X. При этом оператор A^{-1} является компактным. Более того, предположим, что оператор A имеет полную в X систему ортонормальных собственных функций e_k и счетное множество положительных собственных значений λ_k. Кроме того, будем считать, что собственные значения не убывают с ростом их числа, т.е., что $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots\to+\infty$.

В данной работе рассматриваются прямая и обратная задачи определения коэффициента в зависящем от времени уравнении диффузии с дробной производной. При этом, в прямой задаче изучим нахождение функции u из соотношений

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha u(t)+Au(t)+q(t)u(t)=f(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ u(0)=\varphi,\end{cases}\tag{1.1}$$

где ∂_t^α – дробная производная Герасимова–Капуто по времени порядка $\alpha\in(0,1)$, определяемая следующим образом:

$$\partial_t^\alpha y(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}y'(\tau)\,d\tau,$$

$\Gamma(\,\cdot\,)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1]–[3]).

Если A – дифференциальный оператор второго порядка, то данная модель может быть использована для формулировки явлений аномальной супердиффузии частиц в неоднородных пористых средах. С некоторыми прикладными аспектами в этом направлении можно ознакомиться в работах [4], [5]. Однако, часто зависящий от времени коэффициент при производной нулевого порядка $q(t)$ может быть неизвестен; например, при диффузии загрязняющих веществ в подземном песчаном грунте. Основной нашей целью в этой работе является определение коэффициента $q(t)$ в задаче (1.1) по заданному дополнительному условию. Для этого сначала исследуем прямую задачу.

Определение 1. Функцию $u(t)$, удовлетворяющую условиям $u(t) \in C([0,T]; D(A))$ с $\partial_t^\alpha u(t) \in C([0,T];X)$, $Au(t) \in C([0,T];X)$ и всем условиям задачи (1.1), будем называть *решением задачи* (1.1).

Далее мы докажем существование единственного решения прямой задачи, а также получим некоторые результаты о его регулярности. В основной части статьи на основе прямой задачи рассматривается следующая обратная задача нахождения коэффициента $q(t)$ в уравнении (1.1).

Обратная задача. Требуется найти функцию $q(t) \in C[0,T]$, если относительно решения прямой задачи (1.1) известна информация

$$\Phi[u(t)] = h(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

где $h\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ – заданная функция, $\Phi\colon D(\Phi) \subset X \to \mathbb{R}$– известный линейный ограниченный функционал, $D(\Phi) = \{u\colon u \in X\}$.

Прямые задачи для дробных по времени уравнений диффузии, когда A дифференциальный оператор эллиптического типа второго порядка, были широко исследованы в различных областях; например, существование и единственность слабых решений изучены в [6]–[10]. По обратным задачам для дробных уравнений диффузии не так много публикаций. В работах [6]–[9] были исследованы задачи определения коэффициента диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, зависящего от времени, в котором рассмотрен дифференциальный оператор второго порядка A с третьим и первым граничными условиями соответственно. Во всех приведенных выше работах были доказаны теоремы о существовании единственного решения задачи определения коэффициента q. В отличие от указанных выше работ, рассматриваемое здесь уравнение имеет общей вид, т.е. оператор A является абстрактным, но сохраняющим выше приведенные свойства.

Пусть γ – произвольное вещественное число. Введем степень оператора A, действующего на X по правилу

$$A^\gamma g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\gamma (g, e_k) e_k, \qquad g \in X.$$

Очевидно, что область определения этого оператора имеет вид

$$D(A^\gamma) = \biggl\{ g \in X\colon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\gamma} |(g, e_k)|^2 < \infty \biggr\}.$$

Для элементов $D(A^\gamma)$ мы введем норму

$$\|g\|^2_{D(A^\gamma)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\gamma} |(g, e_k)|^2 = \|A^\gamma g\|^2,$$

и вместе с этой нормой $D(A^\gamma)$ превращается в гильбертово пространство.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ – фиксированное число. Рассмотрим обратную задачу при следующих предположениях:

(C1) $\varphi \in D(A^{\varepsilon+1})$, $f \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$;

(C2) $h(t) \in AC[0,T]$ и удовлетворяет условию

$$0 < \frac{1}{h_0} \leqslant |h(t)|,$$

где h_0 – заданное число;

(C3) $h(0) = \Phi[\varphi]$;

(C4) $\Phi\colon \{\Phi[e_k]\} \in l^2(\mathbb{N})$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Замечание 1. Из (C2) следует, что левая производная Герасимова–Капуто $\partial_t^\alpha h(t)$ существует почти везде (п.в.) на $(0,T]$ (см. [3; с. 92]).

Замечание 2. Множество функционалов, удовлетворяющих условию (C4), не пусто. Действительно, пусть $X = L^2(0,1)$ и $Au = -u_{xx}$, $x \in (0,1)$, с однородным граничным условием Дирихле. Тогда оператор имеет собственные значения $\{(\pi k)^2,\ k \in \mathbf{N}\}$ и собственные векторы $\{\sqrt{2}\sin(\pi k x),\ k \in \mathbf{N}\}$. Пусть $\Phi[u(t,\cdot)] := \int_0^1 u(t,x)\,dx$. Поскольку

$$\Phi[e_k] = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(\pi k x)\,dx = \frac{\sqrt{2}\,(1+(-1)^{k+1})}{\pi k} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi k}, & k = 2m-1\ (m \in \mathbf{N}), \\ 0, & k = 2m\ (m \in \mathbf{N}), \end{cases}$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi[e_k]|^2 < \infty.$$

Пусть $\mathcal{A}u = -u_{xx}$ с однородным граничным условием Неймана. В этом случае выберем оператор A как

$$Au = \mathcal{A}u + u, \qquad u \in D(A) := \{u \in H^2(0,1)\colon u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0\}.$$

Тогда оператор A имеет собственные значения $\{(\pi k)^2 + 1,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ и собственные векторы $\{1, \sqrt{2}\cos(\pi k x)\}$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть, по определению, $\Phi[u(t,\cdot)] := \int_0^1 x(1-x)u(t,x)\,dx$. На основе предыдущих расчетов можно получить следующие результаты:

$$\Phi[e_k] = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & k = 0, \\ 0, & k = 2m-1\ (m \in \mathbf{N}), \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{(\pi k)^2}, & k = 2m\ (m \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi[e_k]|^2 < \infty.$$

Основные результаты данной работы приведены в следующих теоремах.

Теорема 1. *При условиях* (C1)–(C4) *существует достаточно малое* $T > 0$, *такое, что обратная задача имеет единственное решение* $q(t) \in C[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (C1)–(C4) *и* u_i *является решением* (1.1) *для* $q = q_i \in C[0,T]$ *с* $\|q_i\|_{C[0,T]} \leqslant R$ $(i = 1,2)$, *кроме того существует* $\nu > 0$ *такое, что*

$$|\Phi[u_2](t)| \geqslant \nu^{-1} > 0 \qquad \text{для всех} \qquad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Тогда существует постоянная $\widetilde{C} > 0$, *зависящая от* R, T, α, ε *и* h_0, *такая, что*

$$\widetilde{C}^{-1}\|\partial_t^\alpha(\Phi[u_1] - \Phi[u_2])\|_{C[0,T]} \leqslant \|q_1 - q_2\|_{C[0,T]} \leqslant \widetilde{C}\|\partial_t^\alpha(\Phi[u_1] - \Phi[u_2])\|_{C[0,T]}, \tag{1.4}$$

$$\|u_1 - u_2\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant \widetilde{C}\|q_1 - q_2\|_{C[0,T]}. \tag{1.5}$$

В следующих разделах доказываются эти теоремы.

Раздел 2 содержит предварительные леммы, которые используются при доказательстве основных результатов.

Раздел 3 посвящен доказательству локальной по времени теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1.1), (1.2) с использованием принципа Банаха, а также доказательству устойчивости решения обратной задачи.

2. Корректность прямой задачи. Чтобы решить прямую задачу, мы разделим ее на две вспомогательные задачи:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v(t) + Av(t) + q(t)v = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha w(t) + Aw(t) + q(t)w = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ w(0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Если положить $w(t) = W(t) + \varphi$ в (2.2), то снова получаем аналогичную задачу к (2.1) для $W(t)$. Поэтому достаточно решать задачу (2.1).

Пусть

$$Y(t)\phi = \sum_{k=1}^{\infty}(\phi, e_k)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)e_k, \qquad \phi \in X, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттага-Леффлера с двумя параметрами

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha \in (0,1), \quad z, \beta \in \mathbf{C}.$$

Если $\beta = 1$, то мы имеем классическую функцию Миттага-Леффлера: $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Хорошо известно, что асимптотическая оценка функции Миттаг-Леффлера с достаточно большим отрицательным аргументом имеет вид (см. [12], [13; с. 13], [14; с. 136]):

$$|E_{\alpha,\beta}(-t)| \leqslant \frac{C}{1+t}, \qquad t > 0.$$

А также будем использовать оценку с достаточно большим положительным числом λ и $\varepsilon \in (0,1)$ (см. [11]):

$$|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})| \leqslant C\lambda^{\varepsilon-1}t^{\alpha\varepsilon-1}, \qquad t > 0. \tag{2.4}$$

Для получения основных результатов нам необходимы следующие леммы, приведенные в [7] и [16; с. 188–189] соответственно. Одна из них представляет собой лемму типа Гроноулла для случая дробного интеграла Римана–Лиувилля.

Лемма 1. *Пусть* $b \geqslant 0$, $\alpha > 0$ *и функции* $a(t), u(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T)$, *неотрицательны, причем*

$$u(t) \leqslant a(t) + b\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)\,ds.$$

Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant a(t) + \theta\int_0^t E'_{\alpha}(\theta(t-s))a(s)\,ds, \qquad t \in [0,T), \tag{2.5}$$

где $\theta = (b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$, $E'_{\alpha}(z) = (d/dz)E_{\alpha}(z)$. *Если* $a(t) \equiv a = \mathrm{const}$, *то* $u(t) \leqslant aE_{\alpha}(\theta t)$.

Эта лемма дает следующий результат.

Следствие 1. *Пусть* $C > 0$, $0 < \alpha < 1$ *и функции* $u, w \in L^1(0,T)$ *неотрицательны, причем выполнено неравенство*

$$u(t) \leqslant Cw(t) + C\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)\,ds, \qquad t \in (0,T).$$

Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant Cw(t) + C\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)\,ds, \qquad t \in (0,T). \tag{2.6}$$

Доказательство. Действительно, при $t \to 0$ следующие асимптотические поведения имеют место (см. [16; с. 188]):

$$\frac{d}{dt}E_{\alpha}(t) \simeq \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

Исходя из последнего соотношения и (2.5), получим требуемый результат (2.6).

Лемма 2. *Пусть* $a, b, \alpha > 0$ – *постоянные и функция* $u \in L^1(0,T)$ – *неотрицательна, причем удовлетворяет следующему неравенству*:

$$u(t) \leqslant a + b\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)\,ds, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant aE_{\alpha,1}((b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}t), \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Теперь перейдем к исследованию задачи (1). Для этого используем метод, который приведен в работе [6]. Из $AY(t)\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\phi, e_k)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)e_k$ и (2.4), имеем

$$\begin{aligned}\|AY(t)\phi\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\phi, e_k)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)|^2 \\ &\leqslant C^2 \sum_{k=1}^{\infty} |t^{\alpha\varepsilon-1}\lambda_k^\varepsilon(\phi, e_k)|^2 = C^2 t^{2(\alpha\varepsilon-1)} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\varepsilon(\phi, e_k)|^2.\end{aligned}$$

Таким образом

$$\|AY(t)\phi\| \leqslant Ct^{\alpha\varepsilon-1}\|\phi\|_{D(A^\varepsilon)}, \qquad \phi \in X, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

Относительно решения задачи (2.1) имеем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $q(t) \in C[0,T]$ и $f(t) \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$ для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда задача (2.1) имеет единственное решение v, которое удовлетворяет следующему интегральному уравнению*:

$$v(t) = \int_0^t Y(t-s)f(s)\,ds - \int_0^t Y(t-s)q(s)v(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Более того, существует константа $c > 0$ такая, что выполняется следующее неравенство:

$$\|\partial_t^\alpha v\|_{C([0,T];X)} + \|Av\|_{C([0,T];X)} \leqslant c\|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}. \tag{2.9}$$

Для доказательства леммы 3 рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha \vartheta(t) + A\vartheta(t) = F(t), \quad t \in [0,T], \\ \vartheta(0) = 0.\end{cases} \tag{2.10}$$

Для решения задачи (2.10) справедливо утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $F \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$. Тогда задача (2.10) имеет единственное решение*

$$\vartheta(t) = \int_0^t Y(t-s)F(s)\,ds. \tag{2.11}$$

Кроме того,

$$\|\vartheta\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant c\|F\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}, \tag{2.12}$$

где $c = c(\alpha, \varepsilon, T)$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функция (2.11) является формальным решением задачи (2.10) (см., например, [7]).

Используя (2.3), можно записать (2.11) в виде

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-s)^\alpha)(F(s), e_k)\,ds\right] e_k. \tag{2.13}$$

Тогда из этого следует, что для $F \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$ имеем

$$A\vartheta(t) = \int_0^t AY(t-s)F(s)\,ds.$$

Более того, благодаря неравенству Минковского и неравенству (2.4) для $\varepsilon \in (0,1)$, получим

$$\begin{aligned}\|A\vartheta(t)\| &\leqslant \int_0^t \|AY(t-s)F(s)\|\,ds \\ &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|F(s)\|_{D(A^\varepsilon)}\,ds \leqslant C\frac{t^{\alpha\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\max_{0\leqslant s\leqslant t}\|F(s)\|_{D(A^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|A\vartheta\|_{C([0,T];X)} \leqslant c_1 T^{\alpha\varepsilon}\|F\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))},$$

и, в частности, $\vartheta(t) \in C([0,T]; D(A))$.

Кроме того, по исходному уравнению $\partial_t^\alpha \vartheta(t) = -A\vartheta(t) + F(t)$, $t \geqslant 0$, мы имеем $\partial_t^\alpha \vartheta(t) \in C([0,T]; X)$ и

$$\|\partial_t^\alpha \vartheta\|_{C([0,T];X)} \leqslant c_2\|F\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}.$$

Таким образом, мы завершили обоснование того, что (2.11) является решением задачи (2.10).

Переходим к доказательству единственности решения задачи (2.10). Предположим, что задача (2.10) имеет два решения $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$. Наша цель – доказать, что $\vartheta(t) = \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t) \equiv 0$. Поскольку задача линейна, для $\vartheta(t)$ имеем следующую однородную задачу:

$$\partial_t^\alpha \vartheta(t) + A\vartheta(t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.14}$$

$$\vartheta(0) = 0. \tag{2.15}$$

Пусть

$$\vartheta_k(t) = (\vartheta(t), e_k).$$

Из (2.14) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\partial_t^\alpha \vartheta_k(t) = (\partial_t^\alpha \vartheta(t), e_k) = -(A\vartheta(t), e_k) = -(\vartheta(t), Ae_k) = -\lambda_k \vartheta_k(t).$$

Таким образом, мы получили следующую задачу Коши для $\vartheta_k(t)$:

$$\begin{cases}\partial_t^\alpha \vartheta_k(t) + \lambda_k \vartheta_k(t) = 0, & t \geqslant 0,\\ \vartheta_k(0) = 0.\end{cases}$$

Эта задача имеет единственное решение (см. [3; с. 231]). Поэтому $\vartheta_k(t) = 0$ при $t \geqslant 0$ и для всех $k \geqslant 1$. Тогда по равенству Парсеваля получаем $\vartheta(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$. Таким образом, единственность решения доказана. Утверждение 1 доказано.

Теперь определим отображение $\mathcal{H}\colon C([0,T];D(A^\varepsilon)) \to C([0,T];D(A^\varepsilon))$ следующим образом:

$$\mathcal{H}(F)(t) = \int_0^t Y(t-s)F(s)\,ds, \qquad F \in C([0,T];D(A^\varepsilon)). \tag{2.16}$$

Тогда из утверждения 1 получим

$$\|\mathcal{H}(F)\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant c\|F\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}. \tag{2.17}$$

Перейдем к доказательству леммы 3. Задачу (2.1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v(t) + Av(t) = -q(t)v(t) + f(t) := F(t), \quad t \in [0,T], \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Тогда из (2.11) следует, что решение задачи (2.18) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = -\int_0^t Y(t-s)q(s)v(s)\,ds + \int_0^t Y(t-s)f(s)\,ds. \tag{2.19}$$

Будем искать неподвижную точку оператора $\mathcal{G}\colon C([0,T];D(A)) \to C([0,T];D(A))$, определяемого как

$$\mathcal{G}(v)(t) = -(\mathcal{H}(q))(v)(t) + \mathcal{H}(f)(t)$$

для $v \in C([0,T];D(A))$.

По индукции имеем

$$\mathcal{G}^n(v)(t) = (-1)^n(\mathcal{H}(q))^n(v)(t) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\mathcal{H}(q))^i\mathcal{H}(f)(t).$$

Здесь $(\mathcal{H}(q)(t))^0 = I$ – единичный оператор.

В силу $q(t) \in C[0,T]$ и $v \in C([0,T];D(A))$ известно, что $qv \in C([0,T];D(A))$ и

$$\|q(s)v(s)\|_{D(A)} \leqslant \widetilde{c}\|v(s)\|_{D(A)}, \tag{2.20}$$

где $\widetilde{c} > 0$ зависит от $\|q\|_{C[0,T]}$. Согласно (2.7) и (2.20) имеем

$$\|(\mathcal{H}(q))(v)(t)\|_{D(A)} = \left\|\int_0^t Y(t-s)q(s)Av(s)\,ds\right\| \leqslant c\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|v(s)\|_{D(A)}\,ds, \tag{2.21}$$

где мы использовали $D(A) \subset D(A^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда для каждого $v \in C([0,T];D(A))$ имеем $(\mathcal{H}(q))(v) \in C([0,T];D(A))$ и оценку

$$\|(\mathcal{H}(q))(v)(t)\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant cT^{\alpha\varepsilon}\|v\|_{C([0,T];D(A))}.$$

Таким образом, мы видим, что оператор $(\mathcal{H}(q))$ отображает $C([0,T];D(A))$ в себя. Добавляя $\mathcal{H}f \in C([0,T];D(A))$, получаем, что оператор $\mathcal{G}$ также отображает $C([0,T];D(A))$ в себе.

Повторяя аналогичные вычисления для $v \in C([0,T];D(A))$, получим

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{H}(q))^2(v)(t)\|_{D(A)} &\leqslant c\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|(\mathcal{H}(q(s)))(v)(s)\|_{D(A)}\,ds\\ &\leqslant c^2\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha\varepsilon-1}\|v(\tau)\|_{D(A)}\,d\tau\right)ds\\ &= c^2\int_0^t\left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}(s-\tau)^{\alpha\varepsilon-1}\,ds\right)\|v(\tau)\|_{D(A)}\,d\tau\\ &= \frac{(c\Gamma(\alpha\varepsilon))^2}{\Gamma(2\alpha\varepsilon)}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha\varepsilon-1}\|v(\tau)\|_{D(A)}\,d\tau\end{aligned}$$

или

$$\|(\mathcal{H}(q))^2v(t)\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant \frac{(c\Gamma(\alpha\varepsilon)T^{\alpha\varepsilon})^2}{\Gamma(2\alpha\varepsilon+1)}\|v\|_{C([0,T];D(A))}. \tag{2.22}$$

По индукции для $v \in C([0,T];D(A))$ имеем

$$\|(\mathcal{H}(q))^n(v)\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant \rho_n\|v\|_{C([0,T];D(A))}, \tag{2.23}$$

где $\rho_n = (c\Gamma(\alpha\varepsilon)T^{\alpha\varepsilon})^n/\Gamma(n\alpha\varepsilon+1)$. Следовательно, $(\mathcal{H}(q))^n(v) \in C([0,T];D(A))$. Поэтому для $v_1, v_2 \in C([0,T];D(A))$ получим

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}^n(v_1)-\mathcal{G}^n(v_2)\|_{C([0,T];D(A))} &= \|(\mathcal{H}(q))^n(v_1-v_2)\|_{C([0,T];D(A))}\\ &\leqslant \rho_n\|v_1-v_2\|_{C([0,T];D(A))}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\rho_n \to 0$ при $n\to\infty$, так как

$$\Gamma(n+1) \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

Поэтому для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\rho_n < 1$. Таким образом, оператор $\mathcal{G}^n$ является сжимающим отображением в $C([0,T];D(A))$. Следовательно, отображение $\mathcal{G}^n$ допускает единственную фиксированную точку $v \in C([0,T];D(A))$, т.е. $\mathcal{G}^n(v) = v$. Поскольку $\mathcal{G}^{n+1}(v) = \mathcal{G}^n(\mathcal{G}(v)) = \mathcal{G}(v)$, точка $\mathcal{G}(v)$ также является неподвижной точкой отображения $\mathcal{G}^n$. В силу единственности неподвижной точки $\mathcal{G}^n$ получим $(\mathcal{H}(q)(v)+\mathcal{H}(f) = \mathcal{G}(v) = v$, т.е. уравнение (2.19) имеет единственное решение $v \in C([0,T];D(A))$. Более того, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$v = \mathcal{G}(v) = \mathcal{G}^n(v) = (-1)^n(\mathcal{H}(q))^n(v) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\mathcal{H}(q))^i(f).$$

Так как $\mathcal{H}(f) \in C([0,T];D(A))$, из (2.19) и (2.23) получается

$$\begin{aligned}\|v\|_{C([0,T];D(A))} &\leqslant \|(\mathcal{H}(q))^n(v)\|_{C([0,T];D(A))} + \sum_{i=0}^{n-1}\|(\mathcal{H}(q))^i(f)\|_{C([0,T];D(A))}\\ &\leqslant \rho_n\|v\|_{C([0,T];D(A))} + \sum_{i=0}^{n-1}\rho_i\|\mathcal{H}f\|_{C([0,T];D(A))}\\ &\leqslant \rho_n\|v\|_{C([0,T];D(A))} + c\sum_{i=0}^{n-1}\rho_iT^{\alpha\varepsilon}\|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}\end{aligned}$$

и, взяв достаточно большое $n \in \mathbb{N}$, получим

$$\|v\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant cE_{\alpha\varepsilon,1}(\Gamma(\alpha\varepsilon)T^{\alpha\varepsilon}\|q\|_{C[0,T]})\|f\|_{C([0,T];D(A^{\varepsilon}))}, \tag{2.24}$$

где c зависит от T, α, ε.

Из (2.24) для всех $t \in [0,T]$ имеем $v \in D(A)$ с

$$Av(t) = \int_0^t AY(t-s)q(s)v(s)\,ds + \int_0^t AY(t-s)f(s)\,ds,$$

и согласно (2.7), имеем

$$\|AY(t)\| \leqslant Ct^{\alpha\varepsilon-1}.$$

Отображение $t \mapsto AY(t)$ принадлежит $C([0,T];X)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|Av(t)\| &\leqslant \left\|\int_0^t AY(t-s)q(s)v(s)\,ds\right\| + \left\|\int_0^t AY(t-s)f(s)\,ds\right\| \\ &\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}(\|v(s)\|_{D(A)} + \|f(s)\|_{D(A^{\varepsilon})})\,ds \\ &\leqslant \frac{C}{\alpha\varepsilon}t^{\alpha\varepsilon}(\|v\|_{C[0,t];D(A))} + \|f\|_{C([0,t];D(A^{\varepsilon}))}).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Следовательно,

$$\|Av\|_{C([0,T];X)} \leqslant cT^{\alpha\varepsilon}\|f\|_{C([0,T];D(A^{\varepsilon}))}. \tag{2.26}$$

По исходному уравнению $\partial_t^{\alpha}v = -Av - qv + f$, суммируя (2.20), (2.24) и (2.26), имеем $\partial_t^{\alpha}v \in C([0,T];X)$ с оценкой

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{\alpha}v\|_{C([0,T];X)} &\leqslant C\|f\|_{C([0,T];D(A^{\varepsilon}))} + \|qv\|_{C([0,T];X)} + \|f\|_{C([0,T];X)} \\ &\leqslant c\|f\|_{C([0,T];D(A^{\varepsilon}))}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in D(A^{\varepsilon+1})$ для некоторых $\varepsilon \in (0,1)$ и $q(t) \in C[0,T]$. Тогда задача (2.2) имеет единственное решение $w \in C([0,T];D(A))$, удовлетворяющее*

$$Aw \in C([0,T];X), \qquad \partial_t^{\alpha}w \in C([0,T];X).$$

Кроме того, существует константа $c > 0$, зависящая от α, T, ε и $\|q\|_{C[0,T]}$, такая, что

$$\|Aw\|_{C([0,T];X)} + \|\partial_t^{\alpha}\|_{C([0,T];X)} \leqslant c\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})}, \tag{2.27}$$

и имеем

$$w(t) = Z(t)\varphi - \mathcal{H}(q)(w)(t), \tag{2.28}$$

где

$$Z(t)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi, e_k)E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha})e_k$$

в $C([0,T];D(A))$ и $\mathcal{H}$ – оператор определенный в (2.16).

Доказательство. Выделим решение w из (2.2) на $w = W + \varphi$, где W удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha W(t) + AW(t) + q(t)W = f_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ W(0) = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

при $f_0(t) = -A\varphi - q(t)\varphi$. По условию леммы 2 мы имеем $f_0(t) \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$, и оценку

$$\|f_0\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))} \leqslant c\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})}. \tag{2.30}$$

Более того, по лемме 3 задача (2.28) имеет единственное решение $W \in C([0,T]; D(A))$, удовлетворяющее

$$AW \in C([0,T]; X) \qquad \text{и} \qquad \partial_t^\alpha W \in C([0,T]; X),$$

и имеют место оценки

$$\|\partial_t^\alpha W\|_{C([0,T];X)} + \|AW\|_{C([0,T];X)} \leqslant C_\varepsilon \|f_0\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))} \leqslant C\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})}.$$

Поэтому задача (2.2) имеет единственное решение $w = W + \varphi \in C([0,T]; D(A))$, удовлетворяющее

$$Aw \in C([0,T]; X) \qquad \text{и} \qquad \partial_t^\alpha w \in C([0,T]; X),$$

и оценка (2.27) выполняется.

Таким образом, мы установили существование, единственность и регулярность решения прямой задачи.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in D(A^{\varepsilon+1})$ и $f \in C([0,T]; D(A^\varepsilon))$ для некоторых $\varepsilon \in (0,1)$, и $q \in C[0,T]$. Тогда существует единственное решение $u \in C([0,T]; D(A))$ для (1.1) такое, что $\partial_t^\alpha u \in C([0,T]; X)$. Более того, существует константа $c > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant cE_{\alpha\varepsilon,1}(\Gamma(\alpha\varepsilon)T^{\alpha\varepsilon}\|q\|_{C[0,T]})[\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})} + \|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}], \tag{2.31}$$

и имеем

$$u(t) = Z(t)\varphi + \mathcal{H}(f)(t) - (\mathcal{H}(q))(u)(t), \tag{2.32}$$

где $\mathcal{H}$ определено в (2.16).

Непрерывная зависимость решения задачи (1.1) от данных дается следующей теоремой.

Теорема 4. *При тех же условиях, что и в теореме 3, решение прямой задачи (1.1) непрерывно зависит от данных, т.е.*

$$\|u - \widehat{u}\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant C[\|\varphi - \widehat{\varphi}\|_{D(A^{\varepsilon+1})} + \|q - \widehat{q}\|_{C[0,T]} + \|f - \widehat{f}\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}], \tag{2.33}$$

где $c > 0$ зависит от α, T, ε, $\|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}$ и $\|q\|_{C[0,T]}$.

Доказательство. Пусть u и $\widehat{u}$ – решения прямой задачи, соответственно для функций $\{q,f,\varphi\}$ и $\{\widehat{q},\widehat{f},\widehat{\varphi}\}$. Используя $u(t)=v(t)+w(t)$, мы имеем

$$|u(t)-\widehat{u}(t)|\leqslant|v(t)-\widehat{v}(t)|+|w(t)-\widehat{w}(t)|,$$

где $\{v,w\}$ и $\{\widehat{v},\widehat{w}\}$ соответствуют данным $\{q,f,\varphi\}$ и $\{\widehat{q},\widehat{f},\widehat{\varphi}\}$ соответственно. Используя (2.19), получим

$$\begin{aligned}&\|v(t)-\widehat{v}(t)\|_{D(A)}\\&\quad\leqslant\left\|\int_0^t AY(t-s)[q(s)v(s)-\widehat{q}(s)\widehat{v}(s)]\,ds\right\|+\left\|\int_0^t AY(t-s)(f(s)-\widehat{f}(s))\,ds\right\|\\&\quad\leqslant c\int_0^t(t-s)^{\alpha\varepsilon-1}|q(s)-\widehat{q}(s)|\,\|v(s)\|_{D(A)}\,ds\\&\qquad+c\int_0^t(t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|v(s)-\widehat{v}(s)\|_{D(A)}|\widehat{q}(s)|\,ds\\&\qquad+c\int_0^t(t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|f(s)-\widehat{f}(s)\|_{D(A^\varepsilon)}\,ds\leqslant c\frac{t^{\alpha\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\|v\|_{C([0,T];D(A))}\|q-\widehat{q}\|_{C[0,T]}\\&\qquad+c\frac{t^{\alpha\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\|f-\widehat{f}\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}+c\|\widehat{q}\|_{C[0,T]}\int_0^t(t-s)^{\alpha\varepsilon-1}\|v(s)-\widehat{v}(s)\|_{D(A)}\,ds.\end{aligned}$$

Тогда по леммам 1 и 2 имеем

$$\|v(t)-\widehat{v}(t)\|_{D(A)}\leqslant c\big[\|q-\widehat{q}\|_{C[0,T]}+\|f-\widehat{f}\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}\big],\tag{2.34}$$

где $c>0$ зависит от α, ε, T, $\|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}$ и $\|\widehat{q}\|_{C[0,T]}$.

Те же рассуждения, что и ранее для (2.28), приводят к

$$\|w(t)-\widehat{w}(t)\|_{D(A)}\leqslant c[\|\varphi-\widehat{\varphi}\|_{D(A^{\varepsilon+1})}+\|q-\widehat{q}\|_{C[0,T]}],\tag{2.35}$$

где $c>0$ зависит от α, ε, T и $\|\widehat{q}\|_{C[0,T]}$.

Наконец, из (2.34), (2.35) мы получаем требуемую оценку (2.33). Теорема 4 доказана.

Теперь мы приведем вспомогательный результат, который гарантирует, что при выполнении условий согласования и регулярности (C1)–(C3) из раздела 1 можно сформулировать обратную задачу в виде эквивалентного интегрального уравнения, к которому можно применить принцип неподвижной точки.

Лемма 5. *Пусть условия* (C2), (C3) *выполнены. Тогда задача нахождения решения* (1.1), (1.2) *эквивалентна задаче определения функции* $q\in C[0,T]$, *удовлетворяющей*

$$q(t)=\frac{1}{h(t)}\big(\Phi[f](t)-\partial_t^\alpha h(t)-\Phi[Au](t)\big),\tag{2.36}$$

где

$$Au(t)=AZ(t)\varphi+\int_0^t AY(t-s)f(s)\,ds-\int_0^t AY(t-s)q(s)u(s)\,ds.\tag{2.37}$$

С другой стороны, если (2.36) *имеет решение и выполняются условия* (C2), (C3), *то существует решение обратной задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. Разделим доказательство на два шага.

Шаг 1. Предположим, что задача (1.1), (1.2) имеет решение $q(t) \in C[0,T]$. Учитывая (C2) и применяя Φ к уравнению (1.1), получим

$$\partial_t^\alpha \Phi[u](t) + \Phi[Au](t) + q(t)\Phi[u](t) = \Phi[f](t). \tag{2.38}$$

Учитывая условия (1.2) и $|h(t)| \geqslant 1/h_0 > 0$ для всех $t \in [0,T]$ в (C2), приходим к (2.36).

Шаг 2. Предположим теперь, что $q(t) \in C[0,T]$ удовлетворяет (2.36). Чтобы доказать, что $q(t)$ является решением обратной задачи (1.1), (1.2), достаточно показать, что имеет место соотношение (1.2). По уравнению в (1.1) имеем (2.38). Вместе с (2.36) и (C3) получим, что $y(t) := \Phi[u](t) - h(t)$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha y(t) + q(t)y(t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Таким образом,

$$y(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s)y(s)\, ds \tag{2.40}$$

(см. [3; с. 199]). Тогда для $q(t) \in C[0,T]$ имеем

$$\|y\|_{C[0,t]} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|q\|_{C[0,T]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y\|_{C[0,s]}\, ds \tag{2.41}$$

для всех $t \in [0,T]$. Отсюда, согласно следствию 1, находим $\|y\|_{C[0,t]} = 0$ для всех $t \in [0,T]$, из которого следует $\Phi[u](t) = h(t)$ на $[0,T]$. Лемма 3 доказана.

3. Обратная задача. Для доказательства основного результата, т.е. теорем 1 и 2, мы будем использовать свойства решений прямой задачи и применим теорему о неподвижной точке Банаха. Этот метод широко используется многими авторами, см., например, [17], [18] и ссылки на них. Таким образом, мы докажем существование и единственность решения уравнения (2.36), которое является эквивалентным к обратной задаче.

Доказательство. 1. Определим следующий оператор:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}\colon C[0,T] \to C[0,T], \\ q \to \mathcal{Q}(q)\colon t \mapsto \dfrac{1}{h(t)}\big(\Phi[f](t) - \partial_t^\alpha h(t) - \Phi[Au](t)\big). \end{cases} \tag{3.1}$$

Чтобы доказать, что оператор $\mathcal{Q}$ имеет неподвижную точку, начнем с того, что оператор $\mathcal{Q}$ отображает некоторое замкнутое выпуклое множество в себя в пространстве $C[0,T]$.

Сначала покажем, что существует положительная константа $\tau_1 > 0$ такая, что для любого $T \in (0,\tau_1]$ существует радиус $R > 0$ такой, что замкнутый выпуклый шар

$$\mathrm{B} = \{q \in C[0,T]\colon \|q\|_{C[0,T]} \leqslant R\}$$

является инвариантом оператора $\mathcal{Q}$; т.е. $\mathcal{Q}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$.

По определению оператора A и его линейности, а также в силу (C4) имеем

$$\Phi[Au](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, e_k) \Phi[e_k]$$

и по неравенству Гёльдера получим

$$|\Phi[Au](t)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Phi^2[e_k] \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k (u, e_k))^2 \right)^{1/2} = c \|u(t)\|_{D(A)}$$

или

$$\|\Phi[Au]\|_{C[0,T]} \leqslant c \|u\|_{C([0,T];D(A))}. \tag{3.2}$$

Тогда для любого $q(t) \in \mathrm{B}$, из линейности $\Phi[\,\cdot\,]$ и в силу условия (C4) имеем

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}(q)(t)| &= \left| \frac{1}{h(t)} (\Phi[f](t) - \partial_t^\alpha h(t) - \Phi[Au](t)) \right| \\
&\leqslant h_0 \big(|\Phi[f](t)| + |\partial_t^\alpha h(t)| + |\Phi[Au](t)| \big) \\
&\leqslant h_0 \left(\left| \sum_{k=1}^{\infty} (f(t), e_k) \Phi[e_k] \right| + \|\partial_t^\alpha h\|_{C[0,T]} + c \|u(t)\|_{D(A)} \right) \\
&\leqslant h_0 \big[c(\varepsilon, \lambda_1) \|f(t)\|_{D(A^\varepsilon)} + \|\partial_t^\alpha h\|_{C[0,T]} \\
&\qquad + c E_{\alpha\varepsilon,1} (\Gamma(\alpha\varepsilon) T^{\alpha\varepsilon} R) (\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})} + \|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}) \big].
\end{aligned}$$

Тогда мы можем выбрать достаточно малое τ_1 такое, что

$$\begin{aligned}
&h_0 \big[c(\varepsilon, \lambda_1) \|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))} + \|\partial_t^\alpha h\|_{C[0,T]} \\
&\qquad + c E_{\alpha\varepsilon,1} (\Gamma(\alpha\varepsilon) T^{\alpha\varepsilon} R) (\|\varphi\|_{D(A^{\varepsilon+1})} + \|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}) \big] \leqslant R
\end{aligned}$$

для всех $T < \tau_1$, чтобы получить

$$\|\mathcal{Q}(q)\|_{C[0,T]} \leqslant R. \tag{3.3}$$

Теперь проверим второе условие теоремы о неподвижной точке. Пусть даны $q(t)$, $\widehat{q}(t) \in \mathrm{B}$. Тогда для разности операторов имеем

$$\mathcal{Q}(q)(t) - \mathcal{Q}(\widehat{q})(t) = -\frac{1}{h(t)} (\Phi[Au](t) - \Phi[A\widehat{u}](t)).$$

В силу линейности $\Phi[\,\cdot\,]$ и (C4) находим

$$|\mathcal{Q}(q)(t) - \mathcal{Q}(\widehat{q})(t)| \leqslant h_0 |\Phi[A(u - \widehat{u})](t)| \leqslant c h_0 \|u(t) - \widehat{u}(t)\|_{D(A)}.$$

Тогда по теореме 4 имеем

$$\|\mathcal{Q}(q) - \mathcal{Q}(\widehat{q})\|_{C[0,T]} \leqslant c C h_0 \|q - \widehat{q}\|_{C[0,T]}, \tag{3.4}$$

где C – то же самое, что и (2.33). Поэтому мы можем выбрать достаточно малое τ_2 такое, что

$$c(T) C(T) h_0 := \mu < 1 \tag{3.5}$$

для всех $T \in (0, \tau_2]$, чтобы получить

$$\|\mathcal{Q}(q) - \mathcal{Q}(\widehat{q})\|_{C[0,T]} \leqslant \mu \|q - \widehat{q}\|_{C[0,T]}. \tag{3.6}$$

Оценки (3.3) и (3.6) показывают, что $\mathcal{Q}$ является сжимающим отображением на B для всех $T \in (0, \tau]$, если мы выберем $\tau \leqslant \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Теорема 1 доказана.

Теперь мы докажем теорему 2 об устойчивости решения обратной задачи.

Доказательство. Предположим, что u_i – два решения (1.1), соответствующие $q = q_i$ $(i = 1, 2)$. Пусть $u = u_1 - u_2$ и $q = q_2 - q_1$. Тогда u удовлетворяет

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t) + Au(t) + q_1(t)u(t) = q(t)u_2(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Согласно теореме 3 $u(t)$ определяется следующим образом:

$$u(t) = \mathcal{H}(q)(u_2) - \mathcal{H}(q_1)(u).$$

Теперь получим верхнюю оценку для $\|u(t)\|_{D(A)}$. Аналогично рассуждениям из (2.25) имеем

$$\|u(t)\|_{D(A)} \leqslant c\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon - 1} \|u(s)\|_{D(A)}\, ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1} |q(s)|\, ds\right], \tag{3.8}$$

где $c > 0$ зависят от α, ε, T, $\|q_1\|_{C[0,T]}$, $\|\varphi\|_{D(A^\varepsilon)}$ и $\|f\|_{C([0,T];D(A^\varepsilon))}$. Тогда согласно леммам 1 и 2 имеем

$$\|u\|_{C([0,T];D(A))} \leqslant C\|q\|_{C[0,T]}. \tag{3.9}$$

То есть (1.5) верно.

Применим $\Phi[\,\cdot\,]$ к уравнению (3.7), в результате получим

$$\Phi[u_2](t)q(t) = \partial_t^\alpha \Phi[u](t) + \Phi[Au](t) + q_1(t)\Phi[u](t), \qquad t \in (0, T]. \tag{3.10}$$

Выполняя вычисления, подобные тем, что приведены в уравнениях (2.31) и (3.2), и используя (1.3), имеем

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leqslant \nu|\partial_t^\alpha \Phi[u](t) + \Phi[Au](t) + q_1(t)\Phi[u](t)| \\ &\leqslant \nu\|\partial_t^\alpha \Phi[u]\|_{C[0,T]} + c\nu \int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}|q(s)|\, ds, \qquad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Снова используя лемму 1, получим

$$\|q\|_{C[0,T]} \leqslant c\|\partial_t^\alpha \Phi[u]\|_{C[0,T]} \tag{3.11}$$

и отсюда получается правая часть (1.4). С другой стороны, из (3.10) находим

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha \Phi[u](t)| &\leqslant |\Phi[u_2](t)q(t)| + |\Phi[Au](t)| + |q_1(t)\Phi[u](t)| \\ &\leqslant C|q(t)|\, \|u_2(t)\|_{D(A)} + C\int_0^t (t-s)^{\alpha\varepsilon-1}|q(s)|\, ds \\ &\leqslant C|q(t)|\, \|u_2\|_{C([0,T];D(A))} + C\frac{T^{\alpha\varepsilon}}{\alpha\varepsilon}\|q\|_{C[0,T]}. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\|\partial_t^\alpha \Phi[u]\|_{C[0,T]} \leqslant C(\|u_2\|_{C([0,T];D(A))} + T^{\alpha\varepsilon})\|q\|_{C[0,T]}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О. Г. Новоженова, *Биография и научные труды А. Н. Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных*, Перо, М., 2018.

[2] O. G. Novozhenova, "Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet union", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**:3 (2017), 790–809.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] R. Metzler, J. Klafter, "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach", *Phys Rep.*, **339** (2000), 1–77.

[5] I. M. Sokolov, J. Klafter, "From diffusion to anomalous diffusion: a century after Einstein's Brownian motion", *Chaos*, **15**:2 (2005), 1–7.

[6] K. Fujishiro, Y. Kian, "Determination of time dependent factors of coefficients in fractional diffusion equations", *Math. Control Relat. Fields*, **6**:2 (2016), 251–269.

[7] Y. Kian, M. Yamamoto, "Reconstruction and stable recovery of source terms and coefficients appearing in diffusion equations", *Inverse problems*, **35**:11 (2019), 115006.

[8] D. K. Durdiev, J. J. Jumaev, "Inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation in the bounded domain", *Lobachevskii J. Math.*, **44**:2 (2023), 548–557.

[9] D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov, "Inverse coefficient problem for a fractional wave equation with time-nonlocal and integral overdetermination conditions", *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), **29**:2 (2023), 1–33.

[10] S. Beckers, M. Yamamoto, "Regularity and unique existence of solution to linear diffusion equation with multiple time-fractional derivatives", *Control and Optimization with PDE Constraints*, Internat. Ser. Numer. Math., **164**, Birkhauser, Basel, 2013, 45–55.

[11] Sh. Alimov, R. Ashurov, "Inverse problem of determining an order of the Riemann–Liouville time-fractional derivative", *Fract. Differ. Calc.*, **11**:2 (2021), 203–217.

[12] А. Ю. Попов, А. М. Седлецкий, "Распределение корней функций Миттаг-Леффлера", *Теория функций*, СМФН, **40**, РУДН, М., 2011, 3–171.

[13] А. А. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.

[14] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.

[15] K. Sakamoto, M. Yamamoto, "Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems", *J. Math. Anal. Appl.*, **382**:1 (2011), 426–447.

[16] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Berlin–New York, Springer-Verlag, 1981.

[17] Б. Д. Гельман, "Об одной гибридной теореме о неподвижной точке для многозначных отображений", *Матем. заметки*, **101**:6 (2017), 832–842.

[18] В. Г. Романов, "Одномерная обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики", *Дифференц. уравнения*, **59**:10 (2023), 1397–1411.

А. А. Рахмонов
Институт математики им. В. И. Романовского
АН РУз, г. Ташкент, Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
Узбекистан;
Азиатский международный университет, г. Бухара,
Узбекистан
E-mail: araxmonov@mail.ru; a.a.rahmonov@buxdu.uz

Поступило
05.07.2024
После доработки
02.06.2025
Принято к публикации
10.06.2025