

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рахмонов, У. Д. Дурдиев, З. Р. Бозоров, Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды, *TMF*, 2021, том 207, номер 1, 112–132

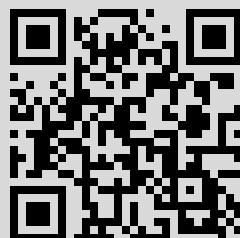
DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.230.96.51

19 июня 2021 г., 13:38:44



© 2021 г. А. А. Рахмонов^{*†}, У. Д. Дурдиев^{*†}, З. Р. Бозоров^{*†}

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА И ФУНКЦИИ ПАМЯТИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматриваются обратные задачи одновременного определения двух неизвестных: скорости распространения электромагнитных волн и функции памяти слоистой среды. Для их нахождения используются данные двух наблюдений флуктуаций на границе области. Основными результатами являются оценки устойчивости решения и теоремы единственности для рассматриваемых задач.

Ключевые слова: обратная задача, данные Неймана, преобразование Фурье, ступенчатая функция Хевисайда, функция Дирака, параметр Ламе.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10035>

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие важные материалы, использующиеся в современных технологиях (например, в нанотехнологии), являются вязкоупругими и анизотропными. Некоторые нанотехнологические математические модели можно найти, например, в статьях [1]–[4] (см. также ссылки в них). При математическом моделировании процессов, протекающих в вязкоупругих материалах, возникает так называемая система с памятью, поведение которой определяется состоянием не только в данный момент, но и зависит от всей истории системы, и поэтому описывается интегро-дифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временной переменной. Одними из важнейших прикладных задач в этой области являются обратные задачи электромагнитной съемки и вязкоупругости.

Взаимодействие электромагнитных полей в среде с памятью моделируется системой уравнений Максвелла, содержащей интегральные члены типа свертки и описывающей электродинамические процессы с дисперсией. В теории упругости такой член в интегро-дифференциальных уравнениях отвечает за влияние вязкости материала. В обоих этих случаях ядро типа свертки обычно является неизвестной функцией, при этом распространение электромагнитных и упругих волн зависит от этого ядра.

*Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан. E-mail: araxmonov@mail.ru, umidjan93@mail.ru, zavqiddinbozorov2011@mail.ru

†Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Тот факт, что D и B (электрическое смещение и магнитная индукция соответственно) единственным образом определяются величинами E и H (интенсивностями соответствующих полей) в тот же момент времени, нарушается в быстро изменяющихся электромагнитных полях, частоты которых не малы по сравнению с начальными частотами электрической и магнитной поляризации, характерными для данной среды. Было доказано, что значения D и B в данный момент времени зависят не только от E и H , но и от всей временной истории этих полей (такая среда называется *среда с последействием*) [5]:

$$\begin{aligned} D(x, t) &= \varepsilon E + \int_0^t \varphi(t - \tau) E(x, \tau) d\tau, \\ B(x, t) &= \mu H + \int_0^t \psi(t - \tau) H(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} D &= (D_1, D_2, D_3), & E &= (E_1, E_2, E_3), \\ B &= (B_1, B_2, B_3), & H &= (H_1, H_2, H_3), \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, диагональные матричнозначные функции $\varphi(t) = \text{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и $\psi(t) = \text{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ описывают наличие памяти. Эти функции конечны для всех значений своих аргументов и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Последнее обстоятельство является выражением того факта, что на значения $D(x, t)$, $B(x, t)$ в данный момент времени не могут заметно влиять значения интенсивностей $E(x, t)$, $H(x, t)$ в глубоком прошлом. Физическим механизмом, лежащим в основе интегральных зависимостей вида (1.1), является процесс формирования электромагнитной поляризации среды, поэтому интервал времени, на котором функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ заметно отличаются от нуля (время релаксации), характеризует скорость этого процесса.

Предположим с учетом уравнений (1.1), что векторы E и H образуют решение задачи Коши для системы уравнений Максвелла, описывающих однородный анизотропный кристалл, с нулевыми начальными условиями [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} D - \text{rot } H + \sigma E + j^{\text{cm}} &= 0, & x_3 \neq 0, \\ \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial t} B + \text{rot } E &= 0, & t > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ε , $\tilde{\mu}$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ – проводимость среды. Мы считаем, что векторы электрического и магнитного полей до момента $t = 0$ удовлетворяют условию

$$E|_{t<0} = H|_{t<0} \equiv 0. \quad (1.3)$$

Пусть вектор плотности внешнего электрического тока имеет вид [7]

$$j^{\text{cm}} = (0, 1, 0) \cdot g(x_1) \eta(x_3) \theta(t), \quad (1.4)$$

где функции $g(x_1)$, $\eta(x_3)$ описывают поперечные размеры источника, $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Такой вид внешнего электрического тока соответствует мгновенному включению тока, параллельного оси x_2 , сосредоточенного на поверхности земли $x_3 = 0$ и распределенного вдоль оси x_1 с плотностью $g(x_1)$. Кроме того, пусть

в системе уравнений Максвелла параметры ε , $\tilde{\mu}$, σ зависят от точки $x = (x_1, x_3)$ и $\varepsilon(x) > 0$, $\mu(x) > 0$, $\sigma(x) \geq 0$. В геофизике эти параметры являются очень важными характеристиками сред и имеют то же значение, что плотность среды и упругие параметры Ламе, а задача определения этих параметров как функций от x является основной в электрогофизической разведке [8].

Далее предположим, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменных x_1 , x_2 , также будем считать, что $\psi = 0$ (отсутствие предыстории магнитного поля), и выберем источник в виде (1.4). Тогда ненулевыми остаются только три компоненты: E_2 , H_1 и H_2 . Исключив последние две из них, запишем итоговое уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) + \\ &+ \int_0^t \varepsilon \varphi_2''(t - \tau) E_2(x_1, x_3, \tau) d\tau + \frac{\partial}{\partial t} j^{\text{cm}}, \quad x_3 > 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее мы будем писать x и z вместо x_1 и x_3 и положим $\tilde{\mu}(x, z) := \tilde{\mu}(z)$, $\eta(z) = \delta(z)$ (дельта-функция Дирака).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы определяем скорость распространения волны и функцию памяти многослойной среды из двумерного интегро-дифференциального волнового уравнения с переменным коэффициентом, представляющего собой более общий случай, чем уравнение (1.5).

Далее предположим, что $\varepsilon = \text{const}$ и $\sigma = \text{const} \neq 0$. Тогда начально-граничные задача для уравнения (1.5) записывается как

$$u_{tt} - \Lambda u - \bar{b}(z)u + \lambda u_t = \int_0^t k(t - \tau) \Lambda u(x, z, \tau) d\tau, \quad (x, z) \in \mathbb{R}_+^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad \left[u_z(x, z, t) + \int_0^t k(t - \tau) u_z(x, z, \tau) d\tau \right]_{z=+0} = \delta(x)\delta'(t) + \delta(x)\theta(t)f(t), \quad (2.2)$$

где $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z > 0\}$, Λ – дифференциальный оператор вида

$$\Lambda u = \mu(z) \Delta u + \mu'(z) u_z, \quad (2.3)$$

в котором Δ – двумерный лапласиан по переменным (x, z) , а $\bar{b}(z)$, $f(t)$ – известные непрерывные функции. Коэффициент $\mu(z)$ является положительной функцией из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$ (здесь $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$), λ – некоторая постоянная, а функции $k(t)$, $f(t)$ непрерывны при $t \in \mathbb{R}$.

Задача вычисления функции $u(x, z, t)$, удовлетворяющей (в обобщенном смысле) уравнениям (2.1), (2.2) для заданных функций $\mu(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$, называется прямой задачей. Граничное условие моделирует мгновенный источник возбуждения волны, расположенный в точке $x = 0, z = 0$.

Изучение обратных задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений и систем является предметом исследований многих авторов. Среди публикаций, близких к настоящей работе, можно выделить статьи [9], [10]. В работе [11] исследовались прямая и обратная задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным членом типа свертки относительно одномерной зависящей от времени функции памяти среды. С помощью метода Фурье обратная задача была сведена к решению интегральных уравнений Вольтерра для неизвестных функций зависящей от времени переменной. В работах [12]–[14] (см. также ссылки в них) исследовалась задача определения многомерного ядра уравнения вязкоупругости для неоднородной изотропной среды. В работах [15], [16] решались задачи восстановления одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной и неограниченной областях и были доказаны теоремы о глобальной однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций со взвешенными нормами. Основная особенность, присутствующая в статьях [17]–[20] и в настоящей работе, заключается в использовании для инициирования волнового процесса источника, локализованного на границе, и/или точечного источника. Наконец, отметим работы [10], [21]–[27], посвященные задачам определения ядра из интегро-дифференциальных уравнений с интегралом типа свертки, и работы [1], [28]–[34], где изучались одно- и двумерные обратные задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды.

Что касается определения подынтегральной функции гиперболических уравнений, то мы соплемся на работы [21], [22]. В работе [21] исследовалась задача нахождения функции памяти в случае трехмерного волнового уравнения с дельта-функцией в правой части. Далее в работе [22] эта задача была обобщена на случай гиперболического уравнения второго порядка с постоянной главной частью и переменными коэффициентами при малых производных. Аналогичные задачи с распределенными источниками возмущений можно найти в работах [35], [36]. В статье [37] изучалась задача определения одномерного коэффициента скорости распространения волны и формы источников импульсов в случае граничного условия, заданного вторым соотношением в (2.2). Оказывается, что для решения этой задачи достаточно задать фурье-образ функции $g(x, t)$ при двух различных значениях переменной преобразования Фурье. В настоящей статье мы исследуем задачу определения двух функций одной переменной, одна из которых находится под знаком интеграла, с помощью процедуры, аналогичной методу работы [8].

Отметим также, что обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений изучались в работах [38]–[43], где были найдены малые локальные поправки и условие устойчивости “в целом”.

Основной особенностью настоящей работы является использование источника, локализованного на границе рассматриваемой области пространства; в результате воздействия этого источника возникает физический процесс передачи волн. Эта особенность существенно увеличивает ценность исследования с точки зрения приложений. В работах Карчевского и Фатьянова [44]–[46] можно ознакомиться с численными методами решения таких задач.

Предположим, что в области $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ задано решение задачи с граничным условием

$$u|_{z=+0} = g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Обратная задача состоит в нахождении $\mu(z)$, $k(t)$ при известных $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $g(x, t)$.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Зададим интегральный оператор

$$L[k, u](t; x, z, t) = u(x, z, t) + \int_0^t k(t - \tau)u(x, z, \tau) d\tau.$$

Иногда, чтобы сократить обозначения, мы не будем указывать в операторе L зависимость функций от своих переменных, т. е. зависимость $k(t)$ и $u(x, z, t)$.

Обозначим как $\tilde{u} = F[u](\nu, z, t)$ преобразование Фурье функции $u(x, y, t)$ по переменной x :

$$\tilde{u}(\nu, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, z, t) e^{i\nu x} dx.$$

Для заданных $\mu(z)$, $\bar{b}(z)$, $f(t)$, $k(t)$ задача (2.1), (2.2) корректно поставлена и имеет единственное решение $u(x, y, t)$ с компактным носителем для любого фиксированного t . Можно переписать уравнения (2.1), (2.2) для функции $u(x, z, t)$ как

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \left(\mu(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu'(z) \frac{\partial}{\partial z} - \nu^2 \mu(z) \right) L[k, \tilde{u}] + \bar{b}(z) \tilde{u} - \lambda \tilde{u}_t, \quad (\nu, z, t) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{u}|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} L[k, \tilde{u}] \Big|_{z=+0} = \delta'(t) + \theta(t) f(t). \quad (3.2)$$

Введем новую переменную

$$y = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\mu(s)}}. \quad (3.3)$$

Заданная таким образом функция $z = l(y)$ монотонна и определяет взаимно однозначное соответствие между y и z по формуле (3.3). Пусть $c(y) := \sqrt{\mu(l(y))}$; введем новую функцию $\tilde{u}(\nu, z, t) = \bar{u}(\nu, y, t)$. В терминах этой функции и переменной y обратная задача (3.1), (3.2), (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{c'(y)}{c(y)} \frac{\partial}{\partial y} - \nu^2 c^2(y) \right) L[k, \bar{u}] + b(y) \bar{u} - \lambda \bar{u}_t, \quad (y, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

$$\bar{u}|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} L[k, \bar{u}] \Big|_{y=+0} = \delta'(t) + \theta(t) f(t), \quad \bar{u}|_{y=0} = \tilde{g}(\nu, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.5)$$

где

$$b(y) = \bar{b}(z), \quad \tilde{g}(\nu, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x, t) e^{i\nu x} dx. \quad (3.6)$$

Теперь преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (3.4) так, чтобы, во-первых, в подынтегральном выражении отсутствовали производные функции \bar{u} по y и, во-вторых, коэффициенты при \bar{u}_y и \bar{u}_t во внеинтегральных членах были равны нулю. Эти требования удовлетворяются, если ввести новую функцию v как

$$v(\nu, y, t) = \sqrt{\frac{c(y)}{c(0)}} e^{(\lambda - k(0))t/2} L[k, \bar{u}](t; \nu, y, t). \quad (3.7)$$

Прямыми вычислениями нетрудно показать, что \bar{u} связана с v соотношением

$$\bar{u}(\nu, y, t) = \sqrt{\frac{c(0)}{c(y)}} L[r, e^{(k(0) - \lambda)t/2} v](t; \nu, y, t), \quad (3.8)$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau. \quad (3.9)$$

Введем обозначения

$$r_{00} := -r'(0) + \frac{1}{4}r^2(0) - \frac{3\lambda}{2}r(0) + \frac{\lambda^2}{4}, \quad c_0 := -\frac{c'(0)}{2c(0)}. \quad (3.10)$$

Перепишем уравнения (3.4), (3.5) в терминах новых функций $\bar{u}(\nu, y, t)$ и $r(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H(\nu, y)v(\nu, y, t) - \\ &- \int_0^t h(t-\tau)v(\nu, y, \tau)d\tau + b(y) \int_0^t p(t-\tau)v(\nu, y, \tau)d\tau, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad \left. \left(\frac{\partial v}{\partial y} + c_0 v \right) \right|_{y=+0} = \delta'(t) - \frac{\lambda + r(0)}{2}\delta(t) + \theta(t)f_0(t), \quad (3.12)$$

$$v|_{y=+0} = \tilde{g}_0(\nu, t) + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\nu, \tau)d\tau, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} H(\nu, y) &:= r_{00} + q_0(y) - \nu^2 q_1(y) + b(y), \\ q_0(y) &:= \frac{1}{4c^2(y)}(2c(y)[c''(y) - 2c'(y)] + c'^2(y)), \quad q_1(y) = c^2(y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

и

$$\begin{aligned} h(t) &:= e^{(\lambda+r(0))t/2}r''(t) + e^{(\lambda+r(0))t/2}r'(t), \quad p(t) := e^{(\lambda+r(0))t/2}r(t), \\ f_0(t) &:= e^{(\lambda+r(0))t/2}f(t), \\ \tilde{g}_0(\nu, t) &:= e^{(\lambda+r(0))t/2}\tilde{g}(\nu, t), \quad k_0(t) := e^{(\lambda+r(0))t/2}k(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

С учетом предположения о гладкости функции $c(y)$ очевидно, что $q_0(y) \in C(\mathbb{R})$, $q_1(y) \in C^2(\mathbb{R})$. В условиях (3.12) использовано равенство $k(0) = -r(0)$, вытекающее из уравнения (3.9).

Из теории гиперболических уравнений следует, что решение прямой задачи (3.11), (3.12) тождественно равно нулю, $v(\nu, y, t) = 0$, при всех $y > t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, поскольку (3.11), (3.12) является начально-краевой задачей с нулевыми начальными данными и некоторым граничным условием, сосредоточенным в области $y = 0$, $t = 0$, $\nu \in \mathbb{R}$. Имеет место следующая

ЛЕММА 3.1. *Решение прямой задачи (3.11), (3.12) представляется в виде*

$$v(\nu, y, t) = -\delta(t-y) + \theta(t-y)\hat{v}(\nu, y, t), \quad (3.16)$$

при этом регулярная функция $\hat{v}(\nu, y, t)$ удовлетворяет в области $t > y > 0$ уравнению

$$\begin{aligned} \hat{v}_{tt} &= \hat{v}_{yy} + H(\nu, y)\hat{v}(\nu, y, t) + h(t-y) - b(y)p(t-y) - \\ &- \int_0^{t-y} h(\tau)\hat{v}(\nu, y, t-\tau)d\tau + b(y) \int_0^{t-y} p(\tau)\hat{v}(\nu, y, t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

с начальным и граничным условиями

$$\hat{v}|_{t=y+0} = \beta(\nu, y) = \beta_0 - \frac{1}{2} \int_0^y H(\nu, \xi) d\xi, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_+, \quad (3.18)$$

$$(\hat{v}_y + c_0 \hat{v})|_{y=0} = f_0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.19)$$

Отметим, что $v = \hat{v}$ при $t > y > 0$. Поэтому далее при рассмотрении прямых и обратных задач в области $t > y > 0$ мы не будем писать значок шляпки над v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (3.16) в уравнения (3.11), (3.12) и применим метод выделения особенностей [47]. Положим $\beta(\nu, y) = \tilde{v}(\nu, y, y+0)$. Подставляя выражение (3.16) в (3.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых сингулярностях, находим, что $\beta(\nu, y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\beta_y(\nu, y) + H(\nu, y) = 0$$

с начальным условием $\beta(\nu, 0) = \beta_0 = (r(0) + \lambda - 2c_0)/2$. Решая это уравнение, получаем

$$\beta(\nu, y) = \beta_0 - \frac{1}{2} \int_0^y H(\nu, s) ds.$$

Кроме того, если подставить выражение (3.16) в (3.12), мы получим условие (3.19). Это завершает доказательство леммы.

Заметим, что в силу (3.13) с учетом введенных выше обозначений функция $\tilde{g}_0(\nu, t)$ имеет вид

$$\tilde{g}_0(\nu, t) = -\delta(t-y) + \theta(t-y)\bar{g}(\nu, t), \quad (\nu, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3.20)$$

где функция $\bar{g}(\nu, t)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости по переменной t , которые обсуждаются ниже. В связи с этим дополнительное условие (3.13) для функции v выглядит как

$$v|_{y=0} = \bar{g}_{00}(\nu, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.21)$$

где

$$\bar{g}_{00}(\nu, t) = \bar{g}(\nu, t) - k_0(t) + \int_0^t k_0(t-\tau)\bar{g}(\nu, \tau) d\tau.$$

Теперь мы сузим данные задачи, предположив, что функция $\bar{g}(\nu, t)$ (и, следовательно, функция $\tilde{g}(\nu, t)$) известна только для двух значений ν_1, ν_2 , таких что $\nu_1^2 \neq \nu_2^2$. Тогда, если известно решение прямой задачи при $\nu = \nu_i, i = 1, 2$, обратная задача (2.1)–(2.4) сводится к задаче определения функций $c(y), k(t)$ из соотношений (3.17)–(3.19) и ее решение задается равенством (3.21). Оказывается, что по этим данным функции $c(y), k(t)$ определяются однозначно. После нахождения $c(y)$ функция $l(z)$, задающая соответствие (3.3) между переменными y и z , находится по формуле

$$l(y) = \int_0^y c(\xi) d\xi,$$

при этом $\sqrt{\mu(z)} = c(l^{-1}(z))$. Благодаря тому, что уравнение (3.17) описывает волновой процесс, распространяющийся с единичной скоростью, решение $v(\nu, 0, t)$ при

$t \in [0, T]$ и фиксированном ν зависит от функции $c(y)$ и ее производных (через функцию $H(\nu, y)$) только на интервале $[0, T/2]$ и от функции $k(t)$ на $[0, T]$. Поэтому естественно ожидать, что верно и обратное: функция $c(y)$ на каждом интервале $[0, T/2]$ и функция $k(t)$ на $[0, T]$ определяются значениями функции $\bar{g}(\nu, t)$ только на интервале $[0, T]$. Оказывается, что такой локальный характер зависимости функций $c(y)$ и $k(t)$ от $\bar{g}(\nu, t)$ действительно имеет место, и это, конечно, отражено в результатах, которые мы намерены далее доказать.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Изучим решение прямой задачи (3.17)–(3.19).

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $b(y) \in C[0, T/2]$, $c(y) \in C^2[0, T/2]$, $f(t) \in C[0, T]$, $k(t) \in C^2[0, T]$ при некотором фиксированном $T > 0$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра ν решение задачи (3.17)–(3.19) для $(y, t) \in D_T$, где*

$$D_T = \{(y, t) : 0 \leq y \leq t \leq T - y\},$$

принадлежит классу функций $C^1(D_T)$ и подчиняется следующей оценке:

$$\|v\|_{C^1(D_T)} \leq d \cdot (\|b(y)\|_{C[0, T/2]} + \|c(y)\|_{C^2[0, T/2]} + \|f(t)\|_{C[0, T]} + \|k(t)\|_{C^2[0, T]}), \quad (4.1)$$

где d зависит только от T , ν , $\|b(y)\|_{C[0, T/2]}$, $\|c(y)\|_{C^2[0, T/2]}$ и $\|k(t)\|_{C^2[0, T]}$. Кроме того, функция

$$\psi(\nu_1, \nu_2, t) = v_t(\nu_1, 0, t) - v_t(\nu_2, 0, t)$$

при любых фиксированных ν_j , $j = 1, 2$, принадлежит классу $C^1[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя для $v_{tt} - v_{yy}$ равенства

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(\nu, y, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_t + v_y) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_t - v_y),$$

из соотношений (3.17)–(3.19) при $(y, t) \in D_T$ интегрированием по соответствующим характеристикам дифференциальных операторов первого порядка получаем

$$\begin{aligned} (v_t + v_y)(\nu, y, t) &= -\frac{1}{2} H\left(\nu, \frac{y+t}{2}\right) + \\ &+ \int_y^{(y+t)/2} \left[H(\nu, \xi) v(\nu, \xi, t+y-\xi) + h(t+y-2\xi) - b(\xi) p(t+y-2\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t+y-2\xi} (h(\tau) - b(\xi) p(\tau)) v(\nu, \xi, t+y-\xi-\tau) d\tau \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} v(\nu, 0, t) &= \beta_0 e^{c_0 t} - \frac{1}{2} \int_0^t e^{c_0(t-\tau)} H\left(\nu, \frac{\tau}{2}\right) d\tau - \int_0^t e^{c_0(t-\tau)} f_0(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t e^{c_0(t-\tau)} \int_0^{\tau/2} \left[H(\nu, \xi) v(\nu, \xi, \tau-\xi) + h(\tau-2\xi) - b(\xi) p(\tau-2\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\tau-2\xi} (h(\alpha) - b(\xi) p(\alpha)) v(\nu, \xi, \tau-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
(v_t - v_y)(\nu, y, t) = & -2f(t - y) + 2c_0v(\nu, 0, t - y) - \frac{1}{2}H\left(\nu, \frac{t - y}{2}\right) + \\
& + \int_0^{(t-y)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y - \xi) + h(t - y - 2\xi) - b(\xi)p(t - y - 2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-y-2\xi} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t - y - \xi - \tau) d\tau \right] d\xi + \\
& + h(t - y)y - p(t - y) \int_0^y b(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^y \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y + \xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-y} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t - y + \xi - \tau) d\tau \right] d\xi. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Из (4.2), (4.4) находим уравнения для v_t , v_y , v :

$$\begin{aligned}
v_t(\nu, y, t) = & -f(t - y) + c_0v(\nu, 0, t - y) - \frac{1}{4}H\left(\nu, \frac{y + t}{2}\right) - \frac{1}{4}H\left(\nu, \frac{t - y}{2}\right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(h(t - y)y - p(t - y) \int_0^y b(\xi) d\xi \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-y)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y - \xi) + h(t - y - 2\xi) - b(\xi)p(t - y - 2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-y-2\xi} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t - y - \xi - \tau) d\tau \right] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^y \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y + \xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-y} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t - y + \xi - \tau) d\tau \right] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^{(y+t)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t + y - \xi) + \right. \\
& \quad \left. + h(t + y - 2\xi) - b(\xi)p(t + y - 2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t+y-2\xi} h(\tau)v(\nu, \xi, t + y - \xi - \tau) d\tau + \right. \\
& \quad \left. + b(\xi) \int_0^{t+y-2\xi} p(\tau)v(\nu, \xi, t + y - \xi - \tau) d\tau \right] d\xi, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_y(\nu, y, t) = & f(t - y) - c_0v(\nu, 0, t - y) - \frac{1}{4}H\left(\nu, \frac{t + y}{2}\right) + \frac{1}{4}H\left(\nu, \frac{t - y}{2}\right) - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-y)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y - \xi) + h(t - y - 2\xi) - b(\xi)p(t - y - 2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-y-2\xi} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t - y - \xi - \tau) d\tau \right] d\xi - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^y \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t - y + \xi) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t-y} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu, \xi, t-y+\xi-\tau) d\tau \Big] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^{(y+t)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, t+y-\xi) + h(t+y-2\xi) - b(\xi)p(t+y-2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t+y-2\xi} h(\tau)v(\nu, \xi, t+y-\xi-\tau) d\tau + \right. \\
& \quad \left. + b(\xi) \int_0^{t+y-2\xi} p(\tau)v(\nu, \xi, t+y-\xi-\tau) d\tau \right] d\xi, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\nu, y, t) = & \beta_0 - \frac{1}{2} \int_0^y H(\nu, \xi) d\xi - \int_0^{t-y} f(\tau) d\tau + c_0 \int_0^{t-y} v(\nu, 0, \tau) d\tau - \\
& - \frac{1}{4} \int_y^t \left[H\left(\nu, \frac{y+t}{2}\right) + H\left(\nu, \frac{t-y}{2}\right) \right] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-y} \left(h(\tau)y - p(\tau) \int_0^y b(\xi) d\xi \right) d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^t \int_0^{(\tau-y)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, \tau-y-\xi) + h(\tau-y-2\xi) - b(\xi)p(\tau-y-2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\tau-y-2\xi} (h(\alpha) - b(\xi)p(\alpha))v(\nu, \xi, \tau-y-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^t \int_0^y \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, \tau-y+\xi) + \int_0^{\tau-y} h(\alpha)v(\nu, \xi, \tau-y+\xi-\alpha) d\alpha - \right. \\
& \quad \left. - b(\xi) \int_0^{\tau-y} p(\alpha)v(\nu, \xi, \tau-y+\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^t \int_y^{(y+\tau)/2} \left[H(\nu, \xi)v(\nu, \xi, \tau+y-\xi) + h(\tau+y-2\xi) - b(\xi)p(\tau+y-2\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\tau+y-2\xi} h(\alpha)v(\nu, \xi, \tau+y-\xi-\alpha) d\alpha + \right. \\
& \quad \left. + b(\xi) \int_0^{\tau+y-2\xi} p(\alpha)v(\nu, \xi, \tau+y-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Уравнение (4.7) – это интегральное уравнение типа Вольтерра в области D_T , имеющее единственное непрерывное решение. Из уравнений (4.5), (4.6) следует, что это решение непрерывно дифференцируемо в D_T . Подставляя выражение для $v(\nu, 0, t)$, полученное из (4.3), в уравнения (4.5)–(4.7) и используя для этих уравнений обычную схему метода последовательных приближений, который имеет факториальную сходимость по t , легко установить справедливость оценки (4.1) в области D_T . Применив уравнение (4.5), построим функцию

$$\begin{aligned}
\psi(\nu_1, \nu_2, t) = & c_0(v(\nu_1, 0, t) - v(\nu_2, 0, t)) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 - \nu_2^2)q_1\left(\frac{t}{2}\right) + \\
& + \int_0^{t/2} \left[H(\nu_1, \xi)v(\nu_1, \xi, t-\xi) - H(\nu_2, \xi)v(\nu_2, \xi, t-\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-2\xi} h(\tau)(v(\nu_1, \xi, t-\xi-\tau) - v(\nu_2, \xi, t-\xi-\tau)) d\tau + \right.
\end{aligned}$$

$$+ b(\xi) \int_0^{t-2\xi} p(\tau) (v(\nu_1, \xi, t - \xi - \tau) - v(\nu_2, \xi, t - \xi - \tau)) d\tau \Big] d\xi. \quad (4.8)$$

Правая часть этого равенства принадлежит классу $C^2[0, T]$. Следовательно, функция $\psi(\nu_1, \nu_2, t) \in C^2[0, T]$ при любых фиксированных ν_i , $i = 1, 2$. Лемма доказана.

5. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Отметим, что в условиях леммы 4.1 в качестве ее следствия мы получаем, что функция $\bar{g}(\nu, t)$ в (3.21) принадлежит классу $C^2[0, T]$ при каждом фиксированном ν , как и функция $\bar{g}(\nu_1, t) - \bar{g}(\nu_2, t)$.

ЛЕММА 5.1. *Пусть функция $\tilde{g}_0(\nu, t)$ имеет вид (3.20), $\bar{g}(\nu, t) \in C^2[0, T]$ при любом фиксированном ν и*

$$\bar{g}(\nu_1, t) - \bar{g}(\nu_2, t) \in C^2[0, T].$$

Пусть дополнительно функция $\bar{g}_t(\nu, 0)$ возрастает по $\nu \in \mathbb{R}$ и $f(t) \in C[0, T]$. Тогда обратная задача (3.17)–(3.19), (3.21) в области D_T эквивалентна задаче нахождения функций v , v_t , $c(y)$, $c'(y)$, $q_0(y)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, $h(t)$, $p(t)$ из следующей замкнутой системы интегральных уравнений:

$$c(y) = c(0) + \int_0^y c'(\xi) d\xi, \quad (5.1)$$

$$c'(y) = c'(0) + \int_0^y \left[2c'(\xi) + 2c(\xi)q_0(\xi) - \frac{(c'(\xi))^2}{2c(\xi)} \right] d\xi, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} q_0(y) = & -r_{00} - b(y) + \nu_1^2 q_1(y) - 2f(2y) + \\ & + 2c_0 \left[\bar{g}(\nu_1, y) - k_0(y) + \int_0^y k_0(\tau) \bar{g}(\nu_1, y - \tau) d\tau \right] - \\ & - \bar{g}_t(\nu_1, y) + k_0'(y) - \bar{g}(\nu_1, 0)k_0(y) - \int_0^y k_0(\tau) \bar{g}_t(\nu_1, y - \tau) d\tau + \\ & + \int_0^y \left[H(\nu_1, \xi)v(\nu_1, \xi, 2y - \xi) + h(2y - 2\xi) - b(\xi)p(2y - 2\xi) - \right. \\ & \left. - \int_0^{2(y-\xi)} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau))v(\nu_1, \xi, 2y - \xi - \tau) d\tau \right] d\xi, \quad y \in [0, T/2], \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$k_0(t) = -r(0) + \left(-r'(0) + \frac{r^2(0)}{2} - \frac{\lambda}{2}r(0) \right) t + \int_0^t (t - \tau) k_0''(\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

$$k_0'(t) = -r'(0) + \frac{r^2(0)}{2} - \frac{\lambda}{2}r(0) + \int_0^t k_0''(\tau) d\tau, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} k_0''(t) = & -c_0 \bar{g}_t(\nu_1, t) + \bar{g}_{tt}(\nu_1, t) + (c_0 + \bar{g}(\nu_1, 0))k_0'(t) + \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2)q_1'(t/2) + \\ & + (c_0 \bar{g}(\nu_1, 0) - \bar{g}_t(\nu_1, 0))k_0(t) + \int_0^t k_0(\tau) (c_0 \bar{g}_t(\nu_1, t - \tau) - \bar{g}_{tt}(\nu_1, t - \tau)) d\tau + \\ & + H\left(\nu_1, \frac{t}{2}\right)v\left(\nu_1, \frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) - H(\nu_2, t/2)v(\nu_2, t/2, t/2) + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{t/2} \left[H(\nu_1, \xi) v_t(\nu_1, \xi, t - \xi) - H(\nu_2, \xi) v_t(\nu_2, \xi, t - \xi) - \right. \\ \left. - (h(t - 2\xi) - b(\xi)p(t - 2\xi)) (v(\nu_1, \xi, \xi) - v(\nu_2, \xi, \xi)) - \right. \\ \left. - \int_0^{t-2\xi} (h(\tau) - b(\xi)p(\tau)) (v_t(\nu_1, \xi, t - \xi - \tau) - v_t(\nu_2, \xi, t - \xi - \tau)) d\tau \right] d\xi, \quad (5.6)$$

$$h(t) = -k_0''(t) - r_{00}k_0(t) - \int_0^t k_0(\tau)h(t - \tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$p(t) = -k_0(t) - \int_0^t k_0(t - \tau)p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (5.8)$$

тогда

$$c(0) = \sqrt{\frac{2G'(0)}{\nu_1^2 - \nu_2^2}}, \quad c'(0) = 2c(0)(r(0) + 2\bar{g}(\nu, 0) - \lambda), \quad (5.9)$$

$$r(0) = \lambda - 2c_0 - 2\bar{g}(\nu, 0), \\ r'(0) = c_0 - 2b(0) - \bar{g}_t(\nu, 0) + (2\bar{g}(\nu, 0) - \lambda + r(0)) \frac{r(0)}{2}. \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим справедливость равенств (5.9) и (5.10). Действительно, подставив $t = 0$ в уравнение (4.3) и использовав условие (3.21), находим

$$\bar{g}(\nu_j, 0) = \frac{1}{2}(\lambda - r(0) - 2c_0), \quad j = 1, 2. \quad (5.11)$$

В частности, отсюда мы заключаем, что $\bar{g}|_{t=0}$ не зависит от ν . Далее из уравнения (4.8) при $t = 0$ получаем

$$G'(0) = \frac{1}{2}(\nu_1^2 - \nu_2^2)c^2(0).$$

Следовательно, в силу положительности $G'(t) = \bar{g}_t(\nu_1, 0) - \bar{g}_t(\nu_2, 0)$ имеем (4.7). Учитывая равенство (5.11) для c_0 , получаем второе равенство в (5.9). Поскольку $\bar{g}|_{t=0}$ не зависит от ν , вторая формула в (3.8) однозначно задает $c'(0)$.

Наложим условие непрерывности на функции $v(\nu, y, t)$, $v_y(\nu, y, t)$ при $y = t = 0$. Из соотношений (3.18), (3.19) и (3.21) нетрудно получить формулу (5.10) для $r(0)$ и $r'(0)$. Чтобы получить последнее равенство для $r'(0)$, применим соотношение $k'(0) = -r'(0) + r^2(0)$, вытекающее из (3.9). Далее мы предполагаем, что значения $r(0)$ и $r'(0)$ подставлены в $H(\nu, y)$.

Продолжим доказательство леммы. Уравнение (4.5) получается из соотношений (3.17)–(3.19). Уравнение (4.7) выводится из (4.6) интегрированием по t от точки $(0, t)$ до точки (y, t) на плоскости переменных (ξ, τ) . В свою очередь, уравнение (4.5) согласуется с (3.17)–(3.20). Далее положим $y = 0$ в (4.5) и используем условие (3.21) при $\nu = \nu_1$. Отсюда после простых преобразований получаем равенство (5.3), в котором для определенности мы положили $\nu = \nu_1$. На самом деле результат вычислений не должен зависеть от выбора параметра ν . Чтобы получить уравнение (5.6), применим соотношение (4.8), которое выводится из уравнения (4.5) с использованием условия (3.21). Заметим, что $\psi(\nu_1, \nu_2, t) := \bar{g}_{00t}(\nu_1, t) - \bar{g}_{00t}(\nu_2, t)$, и продифференцируем равенство (4.5) по t . Получим уравнение (5.6).

Остальные соотношения в формулировке леммы приведены для замыкания системы уравнений. Они получаются из определений функций $h(t)$, $p(t)$ и $k_0(t)$ с использованием равенства (3.9).

Утверждение об эквивалентности системы интегральных уравнений (5.1)–(5.8) и обратной задачи (3.17)–(3.19), (3.21) доказывается в обычном порядке (см., например, работу [16]). Лемма доказана.

Система интегральных уравнений (4.5), (4.7) при $\nu = \nu_j$, $j = 1, 2$, и система (5.1)–(5.8) замкнуты в области D_T и определяют единственным образом непрерывные функции v , v_t , $c(y)$, $c'(y)$, $q_0(y)$, $k_0(t)$, $k'_0(t)$, $k''_0(t)$, $h(t)$, $p(t)$ при достаточно малом T . Не останавливаясь на теореме о локальной однозначной разрешимости задачи, перейдем к результатам, связанным с оценкой устойчивости и однозначной разрешимостью задачи для произвольного $T > 0$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $\Psi(s_0, d_0)$ набор из двух функций $\{c(y), k(t)\}$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ следующим условиям:

$$0 < s_{00} \leq c(y), \quad \|c(y)\|_{C^2[0, T/2]} \leq s_0, \quad \|k(t)\|_{C^2[0, T]} \leq d_0;$$

пусть, кроме того,

$$\|b(y)\|_{C[0, T/2]} \leq b_0, \quad \|f(t)\|_{C[0, T]} \leq f_0,$$

где s_{00} , b_0 , f_0 – заданные числа.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $(c^{(1)}, k^{(1)}) \in \Psi(s_0, d_0)$ и $(c^{(2)}, k^{(2)}) \in \Psi(s_0, d_0)$ суть решения обратной задачи (3.17)–(3.21) с данными*

$$(\bar{g}^{(1)}(\nu_j, t), b^{(1)}(y), f^{(1)}(t)), \quad (\bar{g}^{(2)}(\nu_j, t), b^{(2)}(y), f^{(2)}(t)), \quad j = 1, 2,$$

соответственно. Тогда существует положительная постоянная M , зависящая от ν_1 , ν_2 , s_0 , s_{00} , d_0 , b_0 , f_0 , такая что выполняется следующая оценка:

$$\|k^{(1)}(t) - k^{(2)}(t)\|_{C^2[0, T]} + \|c^{(1)}(y) - c^{(2)}(y)\|_{C^2[0, T/2]} \leq M\tilde{d}, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{d} := & \|b^{(1)}(y) - b^{(2)}(y)\|_{C[0, T/2]} + \|f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t)\|_{C[0, T]} + \\ & + \sum_{j=0}^2 \|\bar{g}^{(1)}(\nu_j, t) - \bar{g}^{(2)}(\nu_j, t)\|_{C^2[0, T]}. \end{aligned}$$

Теорема 6.1 очевидно влечет теорему единственности для любого $T > 0$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть функции $c^{(i)}(y) \in C^2[0, T/2]$, $k^{(i)}(t) \in C^2[0, T]$ и $\bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)$, $b^{(i)}(y)$, $f^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, имеют то же значение, что в теореме 6.1. Если при этом всюду на $[0, T]$*

$$b^{(1)}(y) = b^{(2)}(y), \quad f^{(1)}(t) = f^{(2)}(t), \quad \bar{g}^{(1)}(\nu_j, t) = \bar{g}^{(2)}(\nu_j, t), \quad j = 1, 2,$$

то

$$c^{(1)}(y) = c^{(2)}(y), \quad y \in [0, T/2], \quad k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t), \quad t \in [0, T].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим решения для данных $b^{(i)}, f^{(i)}, c^{(i)}, k^{(i)}, \bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)$ как $v^{(ij)}(y, t)$, $i, j = 1, 2$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{b}(y) &= b^{(1)} - b^{(2)}, & \tilde{f}(t) &= f^{(1)} - f^{(2)}, & \tilde{c}(y) &= c^{(1)} - c^{(2)}, & \tilde{k}_0(t) &= k_0^{(1)} - k_0^{(2)}, \\ \tilde{l}(y) &= l^{(1)} - l^{(2)}, & \tilde{g}_{00}(\nu_j, t) &= \bar{g}_{00}^{(1)} - \bar{g}_{00}^{(2)}, & \tilde{h}(t) &= h^{(1)} - h^{(2)}, & \tilde{p}(t) &= p^{(1)} - p^{(2)}, \\ \tilde{v}^{(j)}(y, t) &= v^{(1j)}(y, t) - v^{(2j)}(y, t), & j &= 1, 2.\end{aligned}$$

Пусть $q_0^{(i)}(y), q_1^{(i)}(y)$ и

$$\begin{aligned}H^{(ij)}(y) &= r_{00}^{(i)} + q_0^{(i)}(y) - \nu_j^2 q_1^{(i)}(y) + b^{(i)}(y), & \tilde{H}^{(j)}(y) &= H^{(1j)} - H^{(2j)}, \\ c_0^{(i)} &= \frac{(c^{(i)})'(0) - a^{(i)}(0)}{2c^{(i)}(0)}, & \beta_0^{(i)} &= \frac{1}{2}(r^{(i)}(0) - 2c_0^{(i)} + \lambda), \\ r_{00}^{(i)} &= -(r^{(i)})'(0) + \frac{(r^{(i)})^2(0)}{4} - \frac{3\lambda r^{(i)}(0)}{2} + \frac{\lambda^2}{4}\end{aligned}$$

суть вспомогательные функции и числа, соответствующим этим функциям $c^{(i)}(y)$. Выпишем соответствующие интегральные соотношения для введенных функций. Из равенств (4.7) и (4.5) следует, что для $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{(j)}(y, t) &= \tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2} \int_0^y \tilde{H}^{(j)}(\xi) d\xi - \int_0^{t-y} \tilde{f}(\tau) d\tau + \tilde{c}_0 \int_0^{t-y} \bar{g}_{00}(\nu_j, \tau) d\tau + \\ &+ c_0^{(2)} \int_0^{t-y} \tilde{g}_{00}(\nu_j, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_y^t \left[\tilde{H}^{(j)}\left(\frac{\tau+y}{2}\right) + \tilde{H}^{(j)}\left(\frac{\tau-y}{2}\right) \right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{t-y} \left(\tilde{h}(\tau)y - \tilde{p}(\tau) \int_0^y b^{(1)}(\xi) d\xi - p^{(2)}(\tau) \int_0^y \tilde{b}(\xi) d\xi \right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_y^t \int_0^{(\tau-y)/2} \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, \tau-y-\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y-\xi) + \right. \\ &\quad + \tilde{h}(\tau-y-2\xi) - b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\tau-y-2\xi) - \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\tau-y-2\xi) - \\ &\quad - \int_0^{\tau-y-2\xi} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y-\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, \tau-y-\xi-\alpha)) d\alpha + \\ &\quad + \int_0^{\tau-y-2\xi} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y-\xi-\alpha) + \\ &\quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, \tau-y-\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_y^t \int_0^y \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, \tau-y+\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y+\xi) + \right. \\ &\quad + \int_0^{\tau-y} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y+\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, \tau-y+\xi-\alpha)) d\alpha - \\ &\quad - \int_0^{\tau-y} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau-y+\xi-\alpha) + \\ &\quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, \tau-y+\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi d\tau +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_y^t \int_y^{(\tau+y)/2} \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, \tau+y-\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau+y-\xi) + \right. \\
& \quad + \tilde{h}(\tau+y-2\xi) - b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\tau+y-2\xi) - \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\tau+y-2\xi) - \\
& \quad - \int_0^{\tau+y-2\xi} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau+y-\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, \tau+y-\xi-\alpha)) d\alpha + \\
& \quad + \int_0^{\tau+y-2\xi} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, \tau+y-\xi-\alpha) + \\
& \quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, \tau+y-\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi d\tau, \quad (6.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_t^{(j)}(y, t) = & -\tilde{f}(t-y) + \tilde{c}_0 \tilde{g}_{00}^{(1)}(\nu_j, t-y) + c_0^{(2)} \tilde{g}_{00}^{(2)}(\nu_j, t-y) - \\
& - \frac{1}{4} \left[\tilde{H}^{(j)}\left(\frac{t+y}{2}\right) + \tilde{H}^{(j)}\left(\frac{t-y}{2}\right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-y)/2} \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, t-y-\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y-\xi) + \right. \\
& \quad + \tilde{h}(t-y-2\xi) - b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(t-y-2\xi) - \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(t-y-2\xi) - \\
& \quad - \int_0^{t-y-2\xi} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y-\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, t-y-\xi-\alpha)) d\alpha + \\
& \quad + \int_0^{t-y-2\xi} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y-\xi-\alpha) + \\
& \quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, t-y-\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, t-y+\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y+\xi) - \right. \\
& \quad - \int_0^{t-y} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y+\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, t-y+\xi-\alpha)) d\alpha + \\
& \quad + \int_0^{t-y} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t-y+\xi-\alpha) + \\
& \quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, t-y+\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_y^{(t+y)/2} \left\{ \tilde{H}^{(j)}(\xi) v^{(1j)}(\xi, t+y-\xi) + H^{(2j)}(\xi) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t+y-\xi) + \right. \\
& \quad + \tilde{h}(t+y-2\xi) - b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(t+y-2\xi) - \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(t+y-2\xi) - \\
& \quad - \int_0^{t+y-2\xi} (h^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t+y-\xi-\alpha) + \tilde{h}(\alpha) v^{(2j)}(\xi, t+y-\xi-\alpha)) d\alpha + \\
& \quad + \int_0^{t+y-2\xi} (b^{(1)}(\xi) p^{(1)}(\alpha) \tilde{v}^{(j)}(\xi, t+y-\xi-\alpha) + \\
& \quad \left. + (b^{(1)}(\xi) \tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi) p^{(2)}(\alpha)) v^{(2j)}(\xi, t+y-\xi-\alpha)) d\alpha \right\} d\xi. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Заметим, что в этих равенствах

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{r}(0) - 2\tilde{c}_0), \quad \tilde{c}_0 = \frac{\tilde{c}(0)(c^{(2)}(0))' - \tilde{c}'(0)c^{(2)}(0)}{2c^{(1)}(0)c^{(2)}(0)}. \quad (6.4)$$

Используя соотношения (5.1)–(5.8), находим

$$\tilde{c}(y) = \tilde{c}(0) + \int_0^y \tilde{c}'(\xi) d\xi, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(y) = & \tilde{c}'(0) + \int_0^y \left[2(\tilde{c}(\xi)q_0^{(1)}(\xi) + c^{(2)}(\xi)\tilde{q}_0(\xi)) - \frac{2\tilde{c}'(\xi)}{c^{(1)}(\xi)} + \right. \\ & \left. + 2\frac{(c^{(1)}(\xi))' + (c^{(2)}(\xi))'}{c^{(2)}(\xi)}\tilde{c}'(\xi) - \frac{7[(c^{(1)}(\xi))']^2 - 4(c^{(2)}(\xi))'}{2c^{(1)}(\xi)c^{(2)}(\xi)}\tilde{c}(\xi) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0(y) = & -\tilde{r}_{00} - \tilde{b}(y) + \nu_1^2 \tilde{q}_1(y) - 2\tilde{f}(2y) + \\ & + 2\tilde{c}_0 \left[\tilde{g}^{(1)}(\nu_1, y) - k_0^{(1)}(y) + \int_0^y k_0^{(1)}(\tau) \tilde{g}^{(1)}(\nu_1, y - \tau) d\tau \right] + \\ & + 2c_0^{(2)} \left[\tilde{g}(\nu_1, y) - \tilde{k}_0(y) + \int_0^y (\tilde{k}_0(\tau) \tilde{g}^{(1)}(\nu_1, y - \tau) + k_0^{(2)}(\tau) \tilde{g}(\nu_1, y - \tau)) d\tau \right] - \\ & - \tilde{g}_t(\nu_1, y) + \tilde{k}_0'(y) - \tilde{g}(\nu_1, 0)k_0^{(1)}(y) - \tilde{g}^{(2)}(\nu_1, 0)\tilde{k}_0(y) - \\ & - \int_0^y (\tilde{k}_0(\tau) \tilde{g}_t^{(1)}(\nu_1, y - \tau) + k_0^{(2)}(\tau) \tilde{g}_t(\nu_1, y - \tau)) d\tau + \\ & + \int_0^y \left\{ \tilde{H}^{(1)}(\xi)v^{(11)}(\xi, 2y - \xi) + H^{(21)}(\xi)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y - \xi) + \tilde{h}(2y - 2\xi) - \right. \\ & \left. - b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(2y - 2\xi) - \tilde{b}(\xi)p^{(2)}(2y - 2\xi) - \right. \\ & \left. - \int_0^{2(y-\xi)} (h^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y - \xi - \alpha) + \tilde{h}(\alpha)v^{(21)}(\xi, 2y - \xi - \alpha)) d\alpha + \right. \\ & \left. + \int_0^{2(y-\xi)} (b^{(1)}(\xi)p^{(1)}(\alpha)\tilde{v}^{(1)}(\xi, 2y - \xi - \alpha) + \right. \\ & \left. \left. + (b^{(1)}(\xi)\tilde{p}(\alpha) + \tilde{b}(\xi)p^{(2)}(\alpha))v^{(21)}(\xi, 2y - \xi - \alpha)) d\alpha \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\tilde{k}_0(t) = -\tilde{r}(0) + \left(-\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{2}(r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)) - \frac{\lambda}{2}\tilde{r}(0) \right) t + \int_0^t (t - \tau) \tilde{k}_0''(\tau) d\tau, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_0'(t) = & -\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{2}(r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)) - \frac{\lambda}{2}\tilde{r}(0) + \int_0^t \tilde{k}_0''(\tau) d\tau, \quad (6.9) \\ \tilde{k}_0''(t) = & -\tilde{c}_0 \tilde{g}_t^{(1)}(\nu_1, t) - c_0^{(2)} \tilde{g}_t(\nu_1, t) + \tilde{g}_{tt}(\nu_1, t) + (\tilde{c}_0 + \tilde{g}(\nu_1, 0))(k_0^{(1)}(t))' + \\ & + (c_0^{(2)} + \tilde{g}^{(2)}(\nu_1, 0))\tilde{k}_0'(t) + \frac{1}{4}(\nu_1^2 - \nu_2^2)\tilde{q}_1'\left(\frac{t}{2}\right) + \\ & + (c_0^{(2)}\tilde{g}^{(2)}(\nu_1, 0) - \tilde{g}_t^{(2)}(\nu_1, 0))\tilde{k}_0(t) + (\tilde{c}_0\tilde{g}^{(1)}(\nu_1, 0) + c_0^{(2)}\tilde{g}(\nu_1, 0) - \tilde{g}_t(\nu_1, 0))k_0^{(1)}(t) + \\ & + \int_0^t \left[(\tilde{c}_0\tilde{g}_t^{(1)}(\nu_1, t - \tau) + c_0^{(2)}\tilde{g}(\nu_1, t - \tau) - \tilde{g}_{tt}(\nu_1, t - \tau))k_0^{(1)}(\tau) + \right. \\ & \left. + (c_0^{(2)}\tilde{g}_t^{(2)}(\nu_1, t - \tau) - \tilde{g}_{tt}^{(2)}(\nu_1, t - \tau)) \right] \tilde{k}_0(\tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{H}^{(1)}\left(\frac{t}{2}\right)\beta^{(1)}\left(\nu_1, \frac{t}{2}\right) + H^{(21)}\left(\frac{t}{2}\right)\tilde{\beta}\left(\nu_1, \frac{t}{2}\right) - \\
& - \tilde{H}^{(2)}\left(\frac{t}{2}\right)\beta^{(1)}\left(\nu_2, \frac{t}{2}\right) - H^{(22)}\left(\frac{t}{2}\right)\tilde{\beta}\left(\nu_2, \frac{t}{2}\right) + \\
& + \int_0^{t/2} \left\{ \tilde{H}^{(1)}(\xi)v_t^{(11)}(\xi, t-\xi) + H^{(21)}(\xi)\tilde{v}_t^{(1)}(\xi, t-\xi) - \right. \\
& - \tilde{H}^{(2)}(\xi)v_t^{(12)}(\xi, t-\xi) + H^{(22)}(\xi)\tilde{v}_t^{(2)}(\xi, t-\xi) - \\
& - (\tilde{h}(t-2\xi) - \tilde{b}(\xi)p^{(1)}(t-2\xi) - b^{(2)}(\xi)\tilde{p}(t-2\xi)) (v^{(11)}(\xi, \xi) - v^{(12)}(\xi, \xi)) - \\
& - (h^{(2)}(t-2\xi) - b^{(2)}(\xi)p^{(2)}(t-2\xi)) (\tilde{\beta}(\nu_1, \xi) - \tilde{\beta}(\nu_2, \xi)) - \\
& - \int_0^{t-2\xi} [(\tilde{h}(\tau) - \tilde{b}(\xi)p^{(1)}(\tau) - b^{(2)}(\xi)\tilde{p}(\tau)) \times \\
& \quad \times (v_t^{(11)}(\xi, t-\xi-\tau) - v_t^{(12)}(\xi, t-\xi-\tau)) + \\
& \quad + (h^{(2)}(\tau) - b^{(2)}(\xi)p^{(2)}(\tau)) \times \\
& \quad \times (\tilde{v}_t^{(1)}(\xi, t-\xi-\tau) - \tilde{v}_t^{(2)}(\xi, t-\xi-\tau))] d\tau \Big\} d\xi, \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$\tilde{h}(t) = -\tilde{k}_0''(t) - \tilde{r}_{00}k_0^{(1)}(t) - r_{00}^{(2)}\tilde{k}_0(t) - \int_0^t (\tilde{k}_0(\tau)h^{(1)}(t-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{h}(t-\tau)) d\tau, \tag{6.11}$$

$$\tilde{p}(t) = -\tilde{k}_0(t) - \int_0^t (\tilde{k}_0(\tau)p^{(1)}(t-\tau) + k_0^{(2)}(\tau)\tilde{p}(t-\tau)) d\tau; \tag{6.12}$$

здесь

$$\tilde{r}_{00} = -\tilde{r}'(0) + \frac{\tilde{r}(0)}{4} (r^{(1)}(0) + r^{(2)}(0)) - \frac{3\lambda\tilde{r}(0)}{2}. \tag{6.13}$$

Оценим функции в системе уравнений (6.2)–(6.13) в области D_T через величину \tilde{d} из теоремы 6.1. Область D_T может быть эквивалентным образом задана как

$$D_T := \left\{ (y, t) : 0 \leq y \leq t \leq \frac{T}{2} - \left| \frac{T}{2} - t \right|, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned}
w(t) = \max \left\{ \max_{0 \leq y \leq T/2 - |T/2-t|} |\tilde{v}^{(j)}(y, t)|, \max_{0 \leq y \leq T/2 - |T/2-t|} |\tilde{v}_t^{(j)}(y, t)|, \right. \\
\left. \max_{0 \leq y \leq T/2 - |T/2-t|} |\tilde{c}(y)|, \max_{0 \leq y \leq T/2 - |T/2-t|} |\tilde{c}'(y)|, \max_{0 \leq y \leq T/2 - |T/2-t|} |\tilde{q}_0(y)|, \right. \\
\left. d|\tilde{k}_0(t)|, |\tilde{k}_0'(t)|, |\tilde{k}_0''(t)|, |\tilde{h}(t)|, |\tilde{p}(t)| \right\}, \quad t \in [0, T], j = 1, 2.
\end{aligned}$$

По лемме 4.1 функции $v^{(ij)}$ дифференцируемы в D_T и удовлетворяют оценке

$$\|v^{(ij)}\|_{C^1(D_T)} \leq m_1, \quad i, j = 1, 2, \tag{6.14}$$

при некоторой постоянной m_1 , зависящей только от $\nu_1, \nu_2, T, s_0, s_{00}, d_0, b_0, f_0$. Функции $G^{(i)}(t) = \bar{g}^{(i)}(\nu_1, t) - \bar{g}^{(i)}(\nu_2, t)$, $i = 1, 2$, суть следы функций $v^{(i1)}(y, t) - v^{(i2)}(y, t)$

при $y = 0$, и для каждой из них, как это следует из (6.14), (4.8), выполняется аналогичная (6.14) оценка, отсюда мы имеем неравенство

$$\|G^{(i)}(t)\|_{C^2(D_T)} \leq m_2, \quad i = 1, 2,$$

в котором постоянная m_2 зависит от тех же параметров, что и m_1 . Из соотношений (6.14), (3.21) следует, что функции $\bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)$ должны быть ограничены постоянной m_1 :

$$\|\bar{g}^{(i)}(\nu_j, t)\|_{C^1[0, T]} \leq m_1, \quad i, j = 1, 2.$$

Числа $c^{(i)}(0)$, $(c^{(i)})'(0)$, $r^{(i)}(0)$, $(r^{(i)})'(0)$, $i = 1, 2$, заданные формулами (5.9), (5.10) через ν_1 , ν_2 , G' , по тем же причинам ограничены постоянной m_3 , которая зависит от тех же параметров, что и m_j , $j = 1, 2$. Следовательно, для $c_0^{(i)}$, \tilde{c}_0 , $\beta_0^{(i)}$, $\tilde{\beta}_0$, $r_{00}^{(i)}$, \tilde{r}_{00} , выраждающихся через $c^{(i)}(0)$, $(c^{(i)})'(0)$, $r^{(i)}(0)$, $(r^{(i)})'(0)$, $i = 1, 2$, с помощью формул (6.5), (6.13), имеют место оценки

$$\max\{|c_0^{(i)}|, |\beta_0^{(i)}|, |r_{00}^{(i)}|\} \leq m_4, \quad \max\{|\tilde{c}_0|, |\tilde{\beta}_0|, |\tilde{r}_{00}|\} \leq \theta m_5,$$

где m_4 , m_5 – некоторые постоянные, зависящие от ν_1 , ν_2 , T , s_0 , s_{00} , d_0 , b_0 , f_0 . Напомним, что θ задана в теореме 6.1.

Далее, функции $q_0^{(i)}(y)$, $q_1^{(i)}(y)$, $H^{(ij)}(y)$, определяющиеся через $r_{00}^{(i)}$, $c^{(i)}(y)$, $b^{(i)}(y)$ и ν_j , $i, j = 1, 2$, аналогичным образом удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \|q_0^{(i)}(y)\|_{C^2[0, T/2]} &\leq m_6, & \|q_1^{(i)}(y)\|_{C^2[0, T/2]} &\leq m_7, \\ \|H^{(ij)}(y)\|_{C^2[0, T/2]} &\leq m_8, & i, j &= 1, 2, \end{aligned}$$

где m_6 , m_7 , m_8 зависят от тех же параметров, что и остальные константы.

С учетом вышеизложенного перейдем к оценке в области D_T функций $\tilde{v}^{(j)}$, удовлетворяющих интегральным уравнениям (6.2). Заметим, что эти уравнения, как и все остальные, содержат члены, содержащие только известные величины и члены с неизвестными функциями. В правой части уравнения (6.2) первые четыре слагаемых зависят от известных функций и чисел и поэтому в совокупности оцениваются значением $A_1 \tilde{d}$ с константой A_1 , зависящей от m_i , $i = 1, \dots, 8$. Как легко видеть, оставшиеся слагаемые в правой части оцениваются в области D_T интегралом вида

$$\kappa_1 \int_0^t \omega(\tau) d\tau,$$

где множитель κ_1 зависит только от постоянных m_i , $i = 1, \dots, 8$, которые, в свою очередь, зависят от ν_1 , ν_2 , T , s_0 , s_{00} , d_0 , b_0 , f_0 . Таким образом,

$$|\tilde{v}^{(j)}(y, t)| \leq A_1 \tilde{d} + \kappa_1 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (y, t) \in D_T, \quad j = 1, 2. \quad (6.15)$$

Из уравнений (6.5), (6.6) мы можем видеть, что $\tilde{c}(y)$, $\tilde{c}'(y)$ оцениваются аналогично:

$$\begin{aligned} |\tilde{c}(y)| &\leq A_2 \tilde{d} + \kappa_2 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, & y \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \\ |\tilde{c}'(y)| &\leq A_3 \tilde{d} + \kappa_3 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.16)$$

Здесь постоянные A_i , κ_i , $i = 2, 3$, зависят от тех же параметров, что и A_1 , κ_1 .

Используем неравенства (6.16) для оценки функций

$$\tilde{q}_1(y) = \tilde{c}(y) [c^{(1)}(y) + c^{(2)}(y)], \quad \tilde{q}'_1(y) = 2[\tilde{c}(y)(c^{(1)}(y))' + c^{(2)}(y)\tilde{c}'(y)],$$

стоящих во внеинтегральных членах в правых частях уравнений (6.7), (6.8). Аналогично получаем неравенства

$$|\tilde{q}_0(y)| \leq A_4 \tilde{d} + \kappa_4 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad |\tilde{k}_0(t)| \leq A_5 \tilde{d} + \kappa_5 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (6.17)$$

а также неравенства для $\tilde{k}'_0(t)$, $\tilde{k}''_0(t)$, $\tilde{h}(t)$, $\tilde{p}(t)$:

$$|\tilde{k}'_0(t)| \leq A_6 \tilde{d} + \kappa_6 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad |\tilde{k}''_0(t)| \leq A_7 \tilde{d} + \kappa_7 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (6.18)$$

$$|\tilde{h}(t)| \leq A_8 \tilde{d} + \kappa_8 \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad |\tilde{p}(t)| \leq A_9 \tilde{d} + \kappa_9 \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (6.19)$$

Применим неравенства (6.16)–(6.19) в оценках функций $\tilde{H}^{(j)}$ во внеинтегральных членах уравнений (6.3), чтобы вывести оценки для функций $\tilde{v}_t^{(j)}(y, t)$:

$$|\tilde{v}_t^{(j)}(y, t)| \leq A_{10} \tilde{d} + \kappa_{10} \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2. \quad (6.20)$$

В полученных неравенствах постоянные A_i , κ_i , $i = 4, \dots, 10$, через постоянные m_i , $i = 1, \dots, 8$, зависят только от параметров ν_1 , ν_2 , T , s_0 , s_{00} , d_0 , b_0 , f_0 . Из соотношений (6.15)–(6.20) следует, что $\omega(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$\omega(t) \leq A \tilde{d} + \kappa \int_0^t \omega(\tau) d\tau,$$

где новые постоянные A , κ зависят только от ν_1 , ν_2 , T , s_0 , s_{00} , d_0 , b_0 , f_0 . Отсюда, используя неравенство Гронуолла, выводим оценку (6.1).

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] S. A. Chivilikhin, V. V. Gusanov, I. Yu. Popov, “Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum models”, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **3**:1 (2012), 7–26.
- [2] A. Dvurechenskii, M. Alfimov, I. Suzdalev et al., “IV Nanotechnology International Forum 2011 (RUSNANOTECH 2011)”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **345**:1 (2012), 011001.
- [3] F. Colombo, D. Guidetti, “A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17**:4 (2007), 537–565.
- [4] F. Colombo, D. Guidetti, “Some results on the Identification of memory kernels”, *Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations, Operator Theory: Advances and Applications*, **216**, eds. M. Ruzhansky, J. Wirth, Springer, Basel, 2011, 121–138.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. 8: Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [6] С. И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука, Новосибирск, 1989.

- [7] С. И. Кабанихин, К. Т. Исаков, М. А. Бектемесов, М. А. Шишленин, *Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач*, ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 2011.
- [8] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.
- [9] Д. К. Дурдиев, “Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **12**:3 (2009), 28–40.
- [10] D. K. Durdiev, “An identification problem of memory function of a medium and the form of an impulse source”, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **2**:2 (2009), 127–136.
- [11] J. Janno, L. Von Welfersdorf, “Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:4 (1997), 291–314.
- [12] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Владикавк. матем. журн.*, **17**:4 (2015), 18–43.
- [13] В. Г. Романов, “Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **15**:1 (2012), 86–98.
- [14] В. Г. Романов, “О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:4 (2007), 867–881.
- [15] Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров, “Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области”, *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 855–867.
- [16] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:2 (2013), 72–82.
- [17] D. K. Durdiev, “Inverse problem for the identification of a memory kernel from Maxwell’s system integro-differential equations for a homogeneous anisotropic media”, *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, **6**:2 (2015), 268–273.
- [18] D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov, “A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **43**:15 (2020), 8776–8796.
- [19] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, “Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волны в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость”, *ТМФ*, **195**:3 (2018), 491–506.
- [20] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, “Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **23**:2 (2020), 63–80.
- [21] Д. К. Дурдиев, “Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью”, *Математический анализ и дискретная математика*, НГУ, Новосибирск, 1989, 19–26.
- [22] Д. К. Дурдиев, “К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 69–77.
- [23] У. Д. Дурдиев, “Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **17** (2020), 179–189.
- [24] U. D. Durdiev, “A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation”, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, **7**:2 (2019), 4–19.
- [25] U. Durdiev, Z. Totieva, “A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **42**:18 (2019), 7440–7451.
- [26] У. Д. Дурдиев, “Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **22**:4 (2019), 26–32.
- [27] Д. К. Дурдиев, У. Д. Дурдиев, “Устойчивость решения обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде”, *Узбек. матем. журн.*, 2014, № 2, 25–34.

- [28] А. Л. Бухгейм, М. В. Клибанов, “Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач”, *Докл. АН СССР*, **260**:2 (1981), 269–272.
- [29] А. Л. Бухгейм, В. Г. Яхно, “О двух обратных задачах для дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **229**:4 (1976), 785–786.
- [30] Z. R. Bozorov, “Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect”, *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, **8**:2 (2020), 28–40.
- [31] З. Р. Бозоров, “Задача определения двумерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **23**:1 (2020), 28–45.
- [32] Ж. Д. Тотиева, “Одномерные обратные коэффициентные задачи анизотропной вязкоупругости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 786–811.
- [33] Ж. Д. Тотиева, Д. К. Дурдиев, “Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости”, *Матем. заметки*, **103**:1 (2018), 129–146.
- [34] Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении коэффициента теплового расширения уравнения термовязкоупругости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **14** (2017), 1108–1119.
- [35] J. Jaan, L. Von Wolfersdorf, “An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity”, *Inverse Problems*, **17**:1 (2001), 13–24.
- [36] А. Л. Карчевский, “Алгоритм восстановления упругих постоянных анизотропного слоя, находящегося в изотропной горизонтально-слоистой среде”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **4** (2007), 20–51.
- [37] A. Favaron, “Identification of memory kernels depending on time and on an angular variable”, *Z. Anal. Anwendungen*, **24**:4 (2005), 735–762.
- [38] A. Lorenzi, “An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation”, *Nonlinear Anal.*, **22**:1 (1994), 297–321.
- [39] A. Lorenzi, E. Paparoni, “Direct and inverse problems in the theory of materials with memory”, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, **87** (1992), 105–138.
- [40] A. Lorenzi, V. I. Priimenko, “Identification problem related to electro-magneto-elastic interactions”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **4**:2 (1996), 115–143.
- [41] V. I. Priimenko, M. P. Vishnevskii, “An identification problem related to the Biot system”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **23**:3 (2015), 219–230.
- [42] V. I. Priimenko, M. P. Vishnevskii, “Nonlinear mathematical problems of electromagnetoelectric interaction”, *Nonlinear Analysis Research Trends*, ed. I. N. Roux, Nova Sci., New York, 2008, 99–155.
- [43] A. A. Rahmonov, “Coefficient determination problem in the system of integro-differential equation for visco-elastic porous medium”, *Uzbek Math. J.*, **2020**:1 (2020), 102–115.
- [44] A. L. Karchevsky, V. G. Yakhno, “One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **7**:4 (1999), 329–346.
- [45] А. Л. Карчевский, А. Г. Фатянов, “Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **4**:3 (2001), 259–268.
- [46] A. L. Karchevsky, Y. M. Turganbayev, S. G. Rakhmetullina, Zh. T. Beldeubayeva, “Numerical solution of an inverse problem of determining the parameters of a source of groundwater pollution”, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, **5**:1 (2017), 53–73.
- [47] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию 14.12.2020,
после доработки 30.12.2020,
принята к публикации 3.01.2021