

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



100125, Toshkent sh., Buz-2, 17A
Tel.: +(99871) 231-92-45
E-mail: journals@airi.uz
© RTSIR ITI, 2023



RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3/1(50) 2023

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Бурнашев В.Ф., Загребина С.А. (Россия),
Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамедиева Д.Т., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Раджабов С.С.,
Расулов А.С., Садуллаева Ш.А., Самаль Д.И. (Беларусь),
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К.,
Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Шадиметов Х.М., Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США),
Min A. (Германия), Rasulev V. (США), Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная
Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 28.06.2023 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3/1(50) 2023

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Burnashev V.F., Zagrebina S.A. (Russia),
Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamedieva D.T., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Radjabov S.S., Rasulo A.S., Sadullaeva Sh.A.,
Samal D.I. (Belarus), Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khamdamov R.Kh.,
Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Shadimetov Kh.M., Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Rasulev B. (USA), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South
Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: journals@airi.uz.

Web: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Design and desktop publishing:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 28.06.2023

Format 60x84 1/8. Order No. 3. Print run 100 copies.

Содержание

<i>Дониёров Н.Н.</i>	
Алгебро-тригонометрическая оптимальная интерполяционная формула в гильбертовом пространстве	5
<i>Курбонназаров А.И.</i>	
Свойства дискретного аналога дифференциального оператора	20
<i>Жалолов Ф.И., Исомиддинов Б.О.</i>	
Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева	30
<i>Жалолов И.И.</i>	
Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера	42
<i>Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.</i>	
Практичные асимптотические оптимальные кубатурные формулы в пространстве Соболева для n -мерной единичной сферы	54
<i>Хаятов Х.У.</i>	
Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева	62
<i>Шадиметов Х.М., Азамов С.С., Хакимова И.К.</i>	
Оптимальные интерполяционные формулы в одном гильбертовом пространстве	74
<i>Бойтиллаев Б.А.</i>	
Оптимальные формулы приближенного решения обобщенных интегральных уравнений Абеля в гильбертовом пространстве	84
<i>Нафасов А.Ю.</i>	
Дробный явный метод Адамса для дробных дифференциальных уравнений	92
<i>Абдураходов А.А.</i>	
Построение оптимальной квадратурной формулы методом фи-функций	100
<i>Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х.</i>	
Точная верная оценка погрешности интерполяционной формулы	111
<i>Абдуллаева Г., Нуралиев Ф.А.</i>	
Свойства обобщенного сплайна четвертого порядка. Натуральные сплайны	118
<i>Хаитов Т.О.</i>	
Оптимальная формула приближенного вычисления интегралов Римана-Лиувилля	137
<i>Ходжиев С.</i>	
Численное исследование струи, истекающей из коаксиальной щели и распространяющейся в расширяющемся канале, на основе полной системы уравнений Навье – Стокса	149
<i>Ахмедов Д.М., Жабборов Х.Х.</i>	
Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта в пространстве Соболева	159
<i>Бозаров Б.И., Шиев А.К.</i>	
Норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с косинусным весом в пространстве Соболева	167
<i>Ахмедов Д.М.</i>	
Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Адамара	173
<i>Хаётов А.Р., Курбонназаров А.И.</i>	
Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространстве $K_2^{(3)}(0,1)$	183

Contents

<i>Doniyorov N.N.</i>	
Algebro-trigonometric optimal interpolation formula in the Hilbert space	5
<i>Kurbonnazarov A.I.</i>	
Properties of the Discrete Analogue of the Differential Operator	20
<i>Jalolov F.I., Isomiddinov B.O.</i>	
Coefficients of the optimal quadrature formula in the Sobolev space	30
<i>Jalolov I.I.</i>	
Sobolev's algorithm for finding unknown functions for constructing an optimal quadrature formula in the Hörmander space	42
<i>Jalolov O.I., Isomiddinov B.O.</i>	
Practical asymptotic optimal cubature formulas in the Sobolev space for n - dimensional unit sphere	54
<i>Khayatov Kh.U.</i>	
Finding the optimal coefficients of the interpolation formula in the Sobolev space	62
<i>Shadimetov X.M., Azamov S.S., Khakimova I.K.</i>	
Optimal interpolation formulas in a hilbert space	74
<i>Boytillayev B.A.</i>	
Optimal formulas for the approximate solution of the generalized Abel integral equations in the Hilbert space	84
<i>Nafasov A.Y.</i>	
Fractional Explicit Adams Method for Fractional Differential Equations	92
<i>Abduakhadov A.A.</i>	
Computation of an optimal quadrature formula by phi function method	100
<i>Shadimetov Kh.M, Mamatova N.X.</i>	
The sharp upper estimate of the error for the interpolation formula	111
<i>Abdullaeva G., Nuraliev F.A.</i>	
Properties of a generalized spline of fourth order. Natural splines	118
<i>Haitov T.O.</i>	
An optimal formula for the approximate calculation of the fractional Riemann-Liouville integrals	137
<i>Khodjiev S.</i>	
Numerical study of a jet flowing out of a coaxial slot and propagating in an expanding channel based on the complete system of Navier-Stokes equations	149
<i>Akhmedov D.M., Jabborov Kh.Kh.</i>	
Optimal quadrature formulas for singular integrals with the Hilbert kernel in Sobolev space	159
<i>Bozarov B.I., Shaev A.K</i>	
Norm of the error functional for the optimal quadrature formula with cosine weight in the Sobolev space	167
<i>Akhmedov D.M.</i>	
Optimal Quadrature Formulas for Hadamard Type Singular Integrals	173
<i>Hayotov A.R., Kurbonnazarov A.I.</i>	
An optimal quadrature formula for the approximate calculation of Fourier integrals in the space $K_2^{(3)}(0,1)$	183

УДК 517.518.644

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Хаятов Х.У.

x.u.hayatov@buxdu.uz

Бухарский государственный университет,
200114, Узбекистан, г. Бухара ул. М.Икбола, 11.*Посвящается 70-летию со дня рождения профессора Холмата Шадиметова*

Впервые С.Л.Соболевым [1] была поставлена задача о нахождении экстремальной функции для интерполяционной формулы и вычисление нормы функционала погрешности в пространстве Соболева. В этой работе была найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в явном виде в пространстве Соболева, обобщенные производные которой порядка m интегрируемы с квадратом. В настоящей работе рассматривается новая оптимальная интерполяционная формула в пространстве Соболева, здесь используя дискретный аналог дифференциального оператора, при $m=2$ получили оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы в пространстве Соболева и вычислена норма функционала погрешности.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство, норма, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

Цитирование: Хаятов Х.У. Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 3/1(50). – С. 62-73.

1 Введение

Теории интерполяционных формул построены многими авторами, например [1–5] и [12–15]. Допустим, что в $n + 1$ произвольно расположенных точках x_i ($i = 0, N$), которые ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ функции $f(x)$.

Требуется построить интерполяционную формулу $P_f(x)$, т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(x) f(x_\lambda), \quad (1)$$

совпадающую с функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

здесь, точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $C_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины, равная единице.

Важной задачей в теории интерполирования является нахождение максимума погрешности интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данным классом функций. Значение этой функции в некоторой точке z есть функционал, определенный как

$$\langle \ell(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) f(x_\lambda), \quad (3)$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) f(x_\lambda)$ - интерполяционная формула
и

$$\ell(x) = \delta(x - z) - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \delta(x - x_\lambda) \quad (4)$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$ - коэффициенты, а x_λ узлы в формуле $P_f(z)$, $x_\lambda \in T_1$, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций, заданных одномерным T_1 - окружность длины, равная единице, и имеющих все обобщённые производные порядка m , суммируемые с квадратом [6].

Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если в него ввести скалярное произведение

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{T_1} f^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx + \left(\int_{T_1} f(x) dx \right) \left(\int_{T_1} \varphi(x) dx \right).$$

Норма функций в этом пространстве определяется по формуле (см. [6] XII.9.5)

$$\|f|_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)}\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2. \quad (5)$$

2 Постановка задачи

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\|\ell|_{\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)}\| = \sup_{\|f|_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)}\|=1} |\langle \ell, f \rangle|, \quad (6)$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ - пространство, сопряженное к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Таким образом, для того, чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$.

Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ . Если

$$\|\ell^0|_{\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)}\| = \inf_{C_\lambda(x), x_\lambda} \|\ell|_{\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)}\|, \quad (7)$$

тогда функционал $\ell^0(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующая интерполяционная формула называется оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, возникает следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$, которые удовлетворяют равенству (7).

Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ , удовлетворяющие равенству (7), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.

В работе [1], С.Л.Соболевым решена задача интерполирования функций n -переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ и решена задача 1. В [7] задачи 1 и 2 исследованы в пространстве $L_2^{(m)}(R)$. В [8] рассмотрена задача построения оптимальных интерполяционных формул вида (1) с условием интерполяции (2) (при фиксированных узлах x_λ) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и для оптимальных коэффициентов получена система линейных уравнений. Алгоритм для вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дан в работе [9].

В работе [11] рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m = 1$; в настоящей работе эта задача решается для случая $m = 2$.

3 Норма и экстремальная функция функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \quad (8)$$

где $C_\lambda(z)$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы вида (1).

Доказательство

Известно, что [6] для функции $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} = \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi i k x},$$

где

$$\hat{f}_k = \langle f(x), e^{2\pi i k x} \rangle = \int_{T_1} f(x) e^{2\pi i k x} dx$$

т.е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell(x), f(x) \rangle &= \langle \ell(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} \rangle = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \langle \ell(x), e^{-2\pi i k x} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k} = \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k}, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\hat{\ell}_0 = \int_{T_1} \ell(x) dx$, $\hat{\ell}_k = \int_{T_1} \ell(x) e^{2\pi i k x} dx$.

Теперь вычислим значение коэффициентов Фурье $\hat{\ell}_k$.

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_k &= \langle \ell(x), e^{2\pi i k x} \rangle = \langle \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \delta(x-x^{(\lambda)}) \rangle, \\ & e^{2\pi i k x} \rangle = \langle \delta(x-z), e^{2\pi i k x} \rangle - \\ & - \langle \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \delta(x-x^{(\lambda)}), e^{2\pi i k x} \rangle = e^{2\pi i k z} - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} = \\ & = \cos 2\pi k z + i \sin 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} = \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \end{aligned}$$

где $e^{2\pi i k z} = \cos 2\pi k z + i \sin 2\pi k z$ только, при $kz \in Z$
 $e^{2\pi i k z} = \cos 2\pi k z$, потому что, $\sin 2\pi k z = 0$,

т.е.

$$\hat{\ell}_k = \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \quad (10)$$

При $k = 0$ из (10) имеем

$$(\ell(x), 1) = 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z). \quad (11)$$

Применяя к правой части (9) неравенство Шварца, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\langle \ell(x), f(x) \rangle| &= \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k} \right| \leq \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 \right| + \left| \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k} (2\pi i k)^m \frac{1}{(2\pi i k)^m} \right| \leq \\ & \leq \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 \right| + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right| \left| \hat{\ell}_{-k} \right| \left| (2\pi i k)^m \right| \frac{1}{\left| (2\pi i k)^m \right|} \leq \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 \left| 2\pi k \right|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \\ & \cdot \left\{ \left| \hat{\ell}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_{-k} \right|^2}{\left| 2\pi k \right|^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \|f| \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\| \cdot \left\{ \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_{-k} \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

из (12) видно, что

$$\left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 \leq \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \quad (13)$$

Существует такая функция из пространства $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$, что в неравенстве (13) достигается равенство.

Действительно, рассмотрим следующую функцию $u(x)$:

$$u(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi i k x}}{k^{2m}}. \quad (14)$$

Пользуясь формулами (10) и (11), после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned}
& \langle \ell(x), u(x) \rangle = \langle \ell(x), \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi i k x}}{(2\pi)^{2m} k^{2m}} \rangle = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \\
& + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \hat{\ell}_{-k}}{k^{2m}} = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{|\hat{\ell}_k|^2}{k^{2m}} = \\
& = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x(\lambda)} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. Квадрат нормы функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\|u|_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)}\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x(\lambda)} \right|^2}{k^{2m}}.$$

Доказательство. Так как для всех функций $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет место равенство (5), отсюда следует, что, в том числе, для нормы функции $u(x)$ справедливо равенство

$$\|u|_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)}\|^2 = \left(\int_{T_1} u(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{u}_{k_1}|^2, \quad (16)$$

где $k_1 \in Z$ и \hat{u}_{k_1} - коэффициенты Фурье.

Таким образом вычислим норму функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ по формуле (16).

В (16) для каждого слагаемого произведем отдельное вычисление:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{T_1} u(x) dx \right)^2 &= \left(\int_{T_1} \left[1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi i k x}}{k^{2m}} \right] dx \right)^2 = \\
&= \left(\left[1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right] \int_{T_1} dx + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \int_{T_1} e^{-2\pi i k x} dx}{k^{2m}} \right)^2 \quad (17)
\end{aligned}$$

Так как $\int_{T_1} e^{-2\pi i k x} dx = 0$ и $\int_{T_1} dx = 1$, то (17) примет следующий вид

$$\left(\int_{T_1} u(x) dx \right)^2 = \left(\left[1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right] \right)^2 \quad (18)$$

Теперь вычислим значение \hat{u}_{k_1} :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{k_1} &= \int_{T_1} u(x) e^{-2\pi i k_1 x} dx = \int_{T_1} \left[1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi i k x}}{k^{2m}} \right] e^{-2\pi i k_1 x} dx = \\ &= \left[1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right] \int_{T_1} e^{-2\pi i k_1 x} dx + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \int_{T_1} e^{-2\pi i k_1 x} e^{2\pi i k x} dx}{k^{2m}} = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k}{k^{2m}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $e^{2\pi i(k-k_1)x} = 1$, только при $k = k_1$

Подставляя (18) и (19) в правую часть (16), имеем

$$\left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \sum_{k \neq 0} (2\pi)^{2m} k^{2m} \frac{|\hat{\ell}_k|^2}{(2\pi)^{4m} k^{4m}} \quad (20)$$

Таким образом, после некоторых сокращений из (20) следует, что

$$\left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{|\hat{\ell}_k|^2}{k^{2m}}. \quad (21)$$

Учитывая (10), из (21) следует доказательство леммы.

Сопоставляя правые части (13) и (21), получим

$$\left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 \leq \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 \quad (22)$$

Учитывая лемму для правых частей (15), имеем

$$\langle \ell(x), u(x) \rangle = \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \cdot \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \quad (23)$$

Для погрешности интерполяционной формулы (1) для функций $u(x)$ справедливо:

$$\langle \ell(x), u(x) \rangle \leq \left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| \cdot \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \quad (24)$$

Подставляя правую часть (23) в левую часть (24), имеем

$$\left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \cdot \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \leq \left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| \cdot \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \quad (25)$$

После сокращений из (25) следует, что

$$\left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| \geq \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \quad (26)$$

Из (22) и (26) получим, что

$$\left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \left\| u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \quad (27)$$

Если принимать во внимание (27), то можем написать следующую:

$$\langle \ell(x), u(x) \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle. \quad (28)$$

Равенство (28) свидетельствует о существовании $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ и таким образом оно является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1), т.е.

$$u(x) = \psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1), \quad (29)$$

для которой выполняется следующее равенство

$$|\langle \ell(x), \psi_\ell(x) \rangle| = \left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \quad (30)$$

Тогда (30) принимает следующий вид

$$\langle \ell(x), \psi_\ell(x) \rangle = \langle \psi_\ell(x), \psi_\ell(x) \rangle \quad (31)$$

Это означает, что выполняется все условия теоремы Рисса [10].

Справедлива следующая

Теорема 2. Равенство (15), (27) и (29) подтверждает, что

$$u(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi i k x}}{k^{2m}}$$

является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) и $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Таким образом, учитывая (20), (27) и условия леммы для квадрата нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1), имеем

$$\left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \quad (32)$$

что и требовалось доказать.

4 Минимизация нормы функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. В пространстве периодических функций Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4), коэффициенты которой при $m = 2$ имеют следующий вид

$$C_\beta(z) = \frac{1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^4}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \quad (33)$$

где $\beta = \overline{0, N}$, $N = 2, 3, \dots$

Доказательство. Имея в виду (29), (30) и условия теоремы 2, $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) т.е. $\psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Известно [6], что по теореме Бабушки условие оптимальности интерполяционной

формулы запишется в виде

$$\langle \delta(x - x^{(\beta)}), \psi_\ell(x) \rangle = \psi_\ell(x^{(\beta)}) = 0, \quad (34)$$

где ψ_ℓ экстремальная функция интерполяционной формулы (1) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. В силу (10) и (14), представление экстремальной функции имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left(\cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N c_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right) e^{-2\pi i k x}}{k^4}, \quad (35)$$

где $x^{(\lambda)}$ и $C_\lambda(z)$ узлы и коэффициенты интерполяционной формулы (1).

Так как мы рассматриваем интерполяционные формулы с равномерно распределенными узлами, то имеем $x^{(\beta)} = h\beta$ и $x^{(\lambda)} = h\lambda$, ($\beta = 0, \dots, N, \lambda = 0, \dots, N$), тогда, учитывая (34), из (35) получим

$$\psi_\ell(h\beta) = 0, \quad \beta = \overline{0, N}. \quad (36)$$

или, что то же самое, для $\psi_\ell(h\beta)$ имеем следующую систему уравнений, т.е.

$$1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left(\cos 2\pi k z - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right) e^{-2\pi i k x^{(\beta)}}}{k^4} = 0, \quad \beta = 0, \dots, N. \quad (37)$$

Преобразуя (37), имеем

$$1 - \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{(\cos 2\pi k z) e^{-2\pi i k h\beta}}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left(\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k (h\beta - h\lambda)} \right)}{k^4} = 0, \quad (38)$$

или

$$\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left(\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) e^{2\pi i k (h\beta - h\lambda)} \right)}{k^4} = 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4}. \quad (39)$$

После некоторых преобразований из (39) получим

$$\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (h\beta - h\lambda)}{k^4} \right] = 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4}. \quad (40)$$

Умножая обе части (40) на число a , где

$$a = \frac{1}{N \left(D_2(0) + 2D_2(1) + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] \right) \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4 N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \quad (41)$$

имеем

$$\sum_{\lambda=0}^N C_\lambda(z) a \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (h\beta - h\lambda)}{k^4} \right] = a \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4} \right). \quad (42)$$

Обозначая

$$a \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (h\beta - h\lambda)}{k^4} \right] = \nu_2 (h\beta - h\lambda), \quad (\lambda = 0, \dots, N), \quad (43)$$

$$a \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4} \right) = f_2 (h\beta), \quad (44)$$

из (42) получим следующее уравнение

$$\sum_{\beta=1}^N C_\beta (z) \nu_2 (h\beta - h\lambda) = f_2 (h\beta), \quad (\lambda = 0, \dots, N) \quad (45)$$

Переобозначив $\nu_2 (h\beta) = \nu_2 [\beta]$ и $f_2 (h\beta) = f_2 [\beta]$,

систему (45) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$C_\beta (z) * \nu_2 (\beta) = f_2 [\beta], \beta = \overline{0, N} \quad (46)$$

$$C_\beta (z) = 0, h\beta \notin T_1. \quad (47)$$

Применяя оператор $D_2 [\beta]$ (см.[16]) к обеим частям уравнения (46), получим

$$C_\beta (z) \cdot D_2 [\beta] * \nu_2 (\beta) = D_2 [\beta] * f_2 [\beta], \beta = \overline{0, N} \quad (48)$$

Пользуясь формулами (19), (20), приведенными в [16], из (48) имеем

$$C_\beta (z) = D_2 [\beta] * f_2 [\beta], [\beta] = [0, 1]. \quad (49)$$

Подставляя (44) в (49), имеем

$$\begin{aligned} C_\beta (z) &= D_2 [\beta] * a \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4} \right) = \\ &= a \left(D_2 [\beta] * 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{2\pi i k z}}{k^4} D_2 [\beta] * e^{-2\pi i k h \beta} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Так как

$$D_2 [\beta] * 1 = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_2 [\beta] = D_2 [0] + 2D_2 [1] + 2 \sum_{\beta=2}^{\infty} D_2 [\beta] \quad (51)$$

и

$$\begin{aligned} D_2 [\beta] * e^{2\pi i k h \beta} &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_2 [\gamma] e^{2\pi i k h (\beta - \gamma)} = \\ &= e^{-2\pi i k h \beta} \left[D_2 [0] + 2D_2 [1] \cos 2\pi k h + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2 [\gamma] e^{2\pi i k h \gamma} \right], \end{aligned} \quad (52)$$

то, имея в виду (51) и (52), из (50) получим

$$\begin{aligned} C_\beta (z) &= a \left(D_2 [0] + 2D_2 [1] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2 [\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \right. \\ &\left. \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^2} \left(D_2 [0] + 2D_2 [1] \cos 2\pi k h + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2 [\gamma] e^{2\pi i k h \gamma} \right) \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$C_{\beta}(z) = a \left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^{(2)}} \left([D_2[0] + 2D_2[1] \cos 2\pi kh] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] \cos 2\pi kh\gamma \right) \right) \quad (54)$$

Так как при $kh \in Z$, где Z - множество целых чисел $\cos 2\pi kh = 1$ и $2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] \cos 2\pi kh\gamma = 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]$, то после некоторых преобразований из (55) имеем

$$C_{\beta}(z) = a \cdot \left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^2 N^2} \cdot \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^{(2)}} \left(\left[D_2[0] + 2D_2[1] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] \right] \right) \right) = \\ = a \left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2 \sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] \right) \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4 N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^4} \right). \quad (55)$$

Имея в виду (41) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1), из (55) получим

$$C_{\beta}(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4 N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^4} \right)}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \quad (56)$$

где $h = \frac{1}{N}$ и $\beta = \overline{0, N}$, $N = 2, 3, \dots$, таким образом, получили коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы (1). Что и требовалось доказать.

5 Заключение

В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. Методы интерполирования также используются как приближения функций. Имеются классические и вариационные методы построения интерполяционных формул при приближения функций. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы, именно данную работу посвящен вариационным методам. В этой работе используя метод С.Л.Соболева решается одно минимизационную задачу интерполированию.

В основном в настоящей работе рассматривается новая оптимальная интерполяционная формула в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, здесь используя дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi)^2 dx^2} \right)^m$, при $m = 2$ получили оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы в пространстве С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Литература

- [1] Соболев С.Л. Об интерполировании функций n переменных // Докл. АН СССР, – 1961. 137, – С. 778–781.

- [2] Лоран П.Ж. / Аппроксимация и оптимизация / М. Мир – 1975. – 496с.
- [3] Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных / Ленинград. Наука, – 1991.
- [4] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лузун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Киев, Наукова думка, – 1992. – 304 с.
- [5] Arcangeli R., Lopez de Silanes M.C., Torrens T.T. Multidimensional minimizing splines / Kluwer Academic publishers. Boston, – 2004. – 261 p.
- [6] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука, – 1974. – 808с.
- [7] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева // Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009, №3, – С. 180–186.
- [8] Хаётов А.Р. Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве // Узбекский математический журнал. Ташкент, – 2010. №2, – С. 173–179.
- [9] Хаётов А.Р. Алгоритм вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ // Узбекский математический журнал. Ташкент, – 2010, №3. – С. 154–161.
- [10] Шадиметов Х.М., Жалолов И.И. Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, – 2016. – №2. – С. 94–102.
- [11] Жалолов О.И., Хаятов Х.У. Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, – 2023. - №1. – С. 47–59.
- [12] Holladay J.C. Smoothest curve approximation // Math. Tables Aids Comput. – 1957. – V.11. – P. 223–243.
- [13] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения / М.: Мир, – 1972.
- [14] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике / –М.: – 1976.
- [15] Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / – Новосибирск. Наука, – 1984.
- [16] Шадиметов Х.М., Жалолов И.И. Об одном алгоритме построения дискретного аналога $D_2[k]$ одного оператора // УзМЖ, -Ташкент, – 2015. -№1. – С. 158–163.

Поступила в редакцию 20.05.2023

UDC 517.518.644

FINDING THE OPTIMAL COEFFICIENTS OF THE INTERPOLATION FORMULA IN THE SOBOLEV SPACE

Khayatov Kh.U.

x.u.xayatov@buxdu.uz

Bukhara State University, 11 M.Ikbol street, Bukhara 200114, Uzbekistan.

For the first time, S.L. Sobolev [1] posed the problem of finding an extremal function for an interpolation formula and calculating the norm of the error functional in the Sobolev space.

In this work, an explicit extremal function of the interpolation formula was found in the Sobolev space, the generalized derivatives of which are of order as m are square-integrable.

In this paper, we consider a new optimal interpolation formula in the Sobolev space, here using the discrete analogue of the differential operator, for $m=2$, we obtain the optimal interpolation coefficients formula in the Sobolev space and the norm of the error functional is calculated.

Keywords: generalized function, space, norm, error functional, interpolation formula, extremal function

Citation: Khayatov Kh.U. 2023. Finding the optimal coefficients of the interpolation formula in the Sobolev space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3/1(50): 62-73.