№ 3/1(50) 2023

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

100125, Toshkent sh., Buz-2, 17A
Tel.: +(99871) 231-92-45
E-mail: journals@airi.uz

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3/1(50) 2023

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.06.2023 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3/1(50) 2023

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Web: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Design and desktop publishing:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 28.06.2023
Format 60x84 1/8. Order No. 3. Print run 100 copies.

Содержание

Contents

УДК 517.518.644

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Хаятов Х.У.
x.u.xayatov@buxdu.uz
Бухарский государственный университет,
200114, Узбекистан, г. Бухара ул. М.Икбола, 11.

Посвящается 70-летию со дня рождения профессора Холмата Шадиметова

Впервые С.Л.Соболевым [1] была поставлена задача о нахождении экстремальной функции для интерполяционной формулы и вычисление нормы функционала погрешности в пространстве Соболева. В этой работе была найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в явном виде в пространстве Соболева, обобщенные производные которой порядка m интегрируемы с квадратом. В настоящей работе рассматривается новая оптимальная интерполяционная формула в пространстве Соболева, здесь используя дискретный аналог дифференциального оператора, при m=*2* получили оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы в пространстве Соболева и вычислена норма функционала погрешности.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство, норма, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

Цитирование: *Хаятов Х.У.* Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 3/1(50). – С. 62-73.

1 Введение

Теории интерполяционных формул построены многими авторами, например [1–5] и [12–15]. Допустим, что в $n+1$ произвольно расположенных точках x_i $\left(i=\overline{0,N}\right)$, которые ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_N)$ функции $f(x)$.
Требуется построить интерполяционную формулу $P_f(x)$, т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x_\lambda), \tag{1}$$

совпадающую с функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), \qquad i = 0, 1, ...N, \tag{2}$$

здесь, точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $C_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины, равная единице.

Важной задачей в теории интерполирования является нахождение максимума погрешности интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данным классом функций. Значение этой функции в некоторой точке z есть функционал, определенный как

$$< \ell(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda), \tag{3}$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda)$ - интерполяционная формула
и

$$\ell(x) = \delta(x - z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x_\lambda) \tag{4}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$- коэффициенты, а x_λ узлы в формуле $P_f(z)$, $\quad x_\lambda \in T_1$, $\delta(x)$- дельта-функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций, заданных одномерным T_1 - окружность длины, равная единице, и имеющих все обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом [6].
Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если в него ввести скалярное произведение

$$< f(x), \varphi(x) >= \int\limits_{T_1} f^{(m)}(x)\,\varphi^{(m)}(x)\,dx + \left(\int\limits_{T_1} f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_{T_1} \varphi(x)\,dx\right).$$

Норма функций в этом пространстве определяется по формуле (см. [6] XII.9.5)

$$\left\| f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\,\right\|^2 = \left(\int\limits_{T_1} f(x)\,dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m}\left|\hat{f}_k\right|^2. \tag{5}$$

2 Постановка задачи

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\| = \sup_{\left\|f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|=1} |< \ell, f >|, \tag{6}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ - пространство, сопряженное к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Таким образом, для того, чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$.

Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ. Если

$$\left\|\overset{0}{\ell}|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\| = \inf_{C_\lambda(x), x_\lambda}\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\|, \tag{7}$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующая интерполяционная формула называется оптимальной интерполяционной формулой.
Таким образом, возникает следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$, которые удовлетворяют равенству (7).

Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (7), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.

В работе [1], С.Л.Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ и решена задача 1. В [7] задачи 1 и 2 исследованы в пространстве $L_2^{(m)}(R)$. В [8] рассмотрена задача построения оптимальных интерполяционных формул вида (1) с условием интерполяции (2) (при фиксированных узлах x_λ) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и для оптимальных коэффициентов получена система линейных уравнений. Алгоритм для вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дан в работе [9].

В работе [11] рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m=1$; в настоящей работе эта задача решается для случая $m=2$.

3 Норма и экстремальная функция функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\cos 2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}},\qquad(8)$$

где $C_\lambda(z)$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы вида (1).
Доказательство
Известно, что [6] для функции $f(x)\in\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{-2\pi ikx}=\sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi ikx},$$

где

$$\hat{f}_k=<f(x),e^{2\pi ikx}>=\int_{T_1}f(x)\,e^{2\pi ikx}dx$$

т.е. коэффициенты Фурье.
Таким образом, имеем

$$<\ell(x),f(x)>=<\ell(x),\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{-2\pi ikx}>=$$

$$>=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k<\ell(x),e^{-2\pi ikx}>=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k\hat{\ell}_{-k}=\hat{f}_0\hat{\ell}_0+\sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_{-k},\qquad(9)$$

здесь $\hat{\ell}_0 = \int\limits_{T_1} \ell(x)dx, \quad \hat{\ell}_k = \int\limits_{T_1} \ell(x)e^{2\pi ikx}dx.$
Теперь вычислим значение коэффициентов Фурье $\hat{\ell}_k$.

$$\hat{\ell}_k =< \ell\left(x\right), e^{2\pi ikx} >=< \delta\left(x-z\right) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right)\delta\left(x-x^{(\lambda)}\right),$$
$$e^{2\pi ikx} >=< \delta\left(x-z\right), e^{2\pi ikx} > -$$
$$- < \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right)\delta\left(x-x^{(\lambda)}\right), e^{2\pi ikx} >= e^{2\pi ikz} - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} =$$
$$= \cos 2\pi kz + i\sin 2\pi kz - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} = \cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}$$

где $e^{2\pi ikz} = \cos 2\pi kz + i\sin 2\pi kz$ только, при $kz \in Z$
$e^{2\pi ikz} = \cos 2\pi kz$, потому что, $\sin 2\pi kz = 0$,
т.е.

$$\hat{\ell}_k = \cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda\left(z\right)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}} \tag{10}$$

При $k = 0$ из (10) имеем

$$\left(\ell\left(x\right), 1\right) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\left(z\right). \tag{11}$$

Применяя к правой части (9) неравенство Шварца, получим следующую оценку:

$$|< \ell\left(x\right), f\left(x\right) >| = \left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0 + \sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_{-k}\right| \leqslant \left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0\right| + \left|\sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_{-k}(2\pi ik)^m\frac{1}{(2\pi ik)^m}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0\right| + \sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|\left|\hat{\ell}_{-k}\right||(2\pi ik)^m|\frac{1}{|(2\pi ik)^m|} \leqslant \left\{\left|\hat{f}_0\right|^2 + \sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|^2|2\pi k|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left\{\left|\hat{\ell}_0\right|^2 + \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_{-k}\right|^2}{|2\pi k|^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\|f|\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)\right\|\cdot\left\{\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_{-k}\right|^2}{k^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

из (12) видно, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\left(T_1\right)\right\|^2 \leqslant \left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}} \tag{13}$$

Существует такая функция из пространства $\tilde{W}_2^{(m)^*}\left(T_1\right)$, что в неравенстве (13) достигается равенство.
Действительно, рассмотрим следующую функцию $u\left(x\right)$:

$$u\left(x\right) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}}. \tag{14}$$

Пользуясь формулами (10) и (11), после некоторых вычислений получим

$$< \ell(x), u(x) >=< \ell(x),$$

$$1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) > + < \ell(x), \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{(2\pi)^{2m} k^{2m}} >= \left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \hat{\ell}_{-k}}{k^{2m}} = \left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}} =$$

$$= \left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}. \qquad (15)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. Квадрат нормы функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 = \left|1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}.$$

Доказательство. Так как для всех функций $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет место равенство (5), отсюда следует, что, в том числе, для нормы функции $u(x)$ справедливо равенство

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 = \left(\int_{T_1} u(x)\,dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left|\hat{u}_{k_1}\right|^2, \qquad (16)$$

где $k_1 \in Z$ и $\hat{u}_{k_1}$- коэффициенты Фурье.

Таким образом вычислим норму функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ по формуле (16).

В (16) для каждого слагаемого произведем отдельное вычисление:

$$\left(\int_{T_1} u(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_{T_1} \left[1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}}\right] dx\right)^2 =$$

$$= \left([1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)] \int_{T_1} dx + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \int\limits_{T_1} e^{-2\pi ikx} dx}{k^{2m}}\right)^2 \qquad (17)$$

Так как $\int\limits_{T_1} e^{-2\pi kx} dx = 0$ и $\int\limits_{T_1} dx = 1$, то (17) примет следующий вид

$$\left(\int_{T_1} u(x)\,dx\right)^2 = \left([1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)]\right)^2 \qquad (18)$$

Теперь вычислим значение $\hat{u}_{k_1}$:

$$\hat{u}_{k_1}=\int\limits_{T_1}u\,(x)e^{-2\pi ik_1x}dx=\int\limits_{T_1}\left[1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{k^{2m}}\right]e^{-2\pi ik_1x}dx=$$

$$=[1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)]\int\limits_{T_1}e^{-2\pi ik_1x}dx+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k\int\limits_{T_1}e^{-2\pi ik_1x}e^{2\pi ikx}dx}{k^{2m}}=\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k}{k^{2m}},\tag{19}$$

где $e^{2\pi i(k-k_1)x}=1$, только при $k=k_1$

Подставляя (18) и (19) в правую часть (16), имеем

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\sum_{k\neq 0}(2\pi)^{2m}k^{2m}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{(2\pi)^{4m}k^{4m}}\tag{20}$$

Таким образом, после некоторых сокращений из (20) следует, что

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}}.\tag{21}$$

Учитывая (10), из (21) следует доказательство леммы.
Сопоставляя правые части (13) и (21), получим

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\;\right\|^2\leqslant\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|^2\tag{22}$$

Учитывая лемму для правых частей (15), имеем

$$<\ell\,(x)\,,u\,(x)>=\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\tag{23}$$

Для погрешности интерполяционной формулы (1) для функций $u\,(x)$ справедливо:

$$<\ell\,(x)\,,u\,(x)>\leqslant\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\;\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|.\tag{24}$$

Подставляя правую часть (23) в левую часть (24), имеем

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\leqslant\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|.\tag{25}$$

После сокращений из (25) следует, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|\geqslant\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|.\tag{26}$$

Из (22) и (26) получим, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|=\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\;\right\|.\tag{27}$$

Если принимать во внимание (27), то можем написать следующую:

$$<\ell\,(x)\,,u\,(x)>=<u\,(x)\,,u\,(x)>\,.\tag{28}$$

Равенство (28) свидетельствует о существовании $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ и таким образом оно является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1), т.е.

$$u(x) = \psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1), \tag{29}$$

для которой выполняется следующее равенство

$$|< \ell(x), \psi_\ell(x) >| = \left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|. \tag{30}$$

Тогда (30) принимает следующий вид

$$< \ell(x), \psi_\ell(x) > = < \psi_\ell(x), \psi_\ell > \tag{31}$$

Это означает, что выполняется все условия теоремы Рисса [10].
Справедлива следующая
Теорема 2. Равенство (15), (27) и (29) подтверждает, что

$$u(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi i k x}}{k^{2m}}$$

является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) и $u(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Таким образом, учитывая (20), (27) и условия леммы для квадрата нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1), имеем

$$\left\| \ell | \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi k z - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \tag{32}$$

что и требовалось доказать.

4 Минимизация нормы функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. В пространстве периодических функций Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4), коэффициенты которой при $m = 2$ имеют следующий вид

$$C_\beta(z) = \frac{1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum\limits_{k \neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^4}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum\limits_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \tag{33}$$

где $\beta = \overline{0, N}, N = 2, 3, \ldots$.
Доказательство. Имея в виду (29), (30) и условия теоремы 2, $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) т.е. $\psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Известно [6], что по теореме Бабушки условие оптимальности интерполяционной

формулы запишется в виде

$$< \delta\left(x-x^{(\beta)}\right), \psi_\ell(x) >= \psi_\ell\left(x^{(\beta)}\right)=0, \tag{34}$$

где ψ_ℓ экстремальная функция интерполяционной формулы (1) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. В силу (10) и (14), представление экстремальной функции имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x)=1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\cos 2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=0}^{N} c_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)e^{-2\pi ikx}}{k^4}, \tag{35}$$

где $x^{(\lambda)}$ и $C_\lambda(z)$ узлы и коэффициенты интерполяционной формулы (1).
Так как мы рассматриваем интерполяционные формулы с равномерно распределенными узлами, то имеем $x^{(\beta)}=h\beta$ и $x^{(\lambda)}=h\lambda$, $(\beta=0,...,N, \lambda=0,...,N)$, тогда, учитывая (34), из (35) получим

$$\psi_\ell(h\beta)=0, \quad \beta=\overline{0,N}. \tag{36}$$

или, что то же самое, для $\psi_\ell(h\beta)$ имеем следующую систему уравнений, т.е.

$$1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\cos 2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)e^{-2\pi ikx^{(\beta)}}}{k^4}=0,\ \beta=0,...,N. \tag{37}$$

Преобразуя (37), имеем

$$1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{(\cos 2\pi kz)\,e^{-2\pi ikh\beta}}{k^4}-\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ik(h\beta-h\lambda)}\right)}{k^4}=0, \tag{38}$$

или

$$\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ik(h\beta-h\lambda)}\right)}{k^4}=1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^4}. \tag{39}$$

После некоторых преобразований из (39) получим

$$\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\left[1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^4}\right]=1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^4}. \tag{40}$$

Умножая обе части (40) на число a, где

$$a=\frac{1}{N\left(D_2(0)+2D_2(1)+2\sum\limits_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]\right)\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4N^4}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)}, \tag{41}$$

имеем

$$\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^4}\right]=a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^4}\right). \tag{42}$$

Обозначая

$$a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^4}\right]=\nu_2\,(h\beta-h\lambda)\,,\quad (\lambda=0,...,N)\,, \tag{43}$$

$$a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^4}\right)=f_2\,(h\beta)\,, \tag{44}$$

из (42) получим следующее уравнение

$$\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta\,(z)\nu_2\,(h\beta-h\lambda)=f_2\,(h\beta)\,,\quad (\lambda=0,...,N) \tag{45}$$

Переобозначив $\nu_2\,(h\beta)=\nu_2\,[\beta]$ и $f_2\,(h\beta)=f_2\,[\beta]$,
систему (45) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$C_\beta\,(z)*\nu_2\,(\beta)=f_2\,[\beta]\,,\beta=\overline{0,N} \tag{46}$$

$$C_\beta\,(z)=0,h\beta\notin T_1. \tag{47}$$

Применяя оператор $D_2\,[\beta]$ (см.[16]) к обеим частям уравнения (46), получим

$$C_\beta\,(z)\cdot D_2\,[\beta]*\nu_2\,(\beta)=D_2\,[\beta]*f_2\,[\beta]\,,\beta=\overline{0,N} \tag{48}$$

Пользуясь формулами (19), (20), приведенными в [16], из (48) имеем

$$C_\beta\,(z)=D_2\,[\beta]*f_2\,[\beta]\,,[\beta]=[0,1]. \tag{49}$$

Подставляя (44) в (49), имеем

$$\begin{gathered}C_\beta\,(z)=D_2\,[\beta]*a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^4}\right)=\\ =a\left(D_2\,[\beta]*1+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{e^{2\pi ikz}}{k^4}D_2\,[\beta]*e^{-2\pi ikh\beta}\right).\end{gathered} \tag{50}$$

Так как

$$D_2\,[\beta]*1=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_2\,[\beta]=D_2\,[0]+2D_2\,[1]+2\sum_{\beta=2}^{\infty}D_2\,[\beta] \tag{51}$$

и

$$\begin{gathered}D_2\,[\beta]*e^{2\pi ikh\beta}=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}D_2\,[\gamma]e^{2\pi ikh(\beta-\gamma)}=\\ e^{-2\pi ikh\beta}\left[D_2\,[0]+2D_2\,[1]\cos 2\pi kh+2\sum_{\gamma=2}^{\infty}D_2\,[\gamma]\,e^{2\pi ikh\gamma}\right],\end{gathered} \tag{52}$$

то, имея в виду (51) и (52), из (50) получим

$$\begin{gathered}C_\beta\,(z)=a\left(D_2\,[0]+2D_2\,[1]+2\sum_{\gamma=2}^{\infty}D_2\,[\gamma]+\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\right.\\ \left.\cdot\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^2}\left(D_2\,[0]+2D_2\,[1]\cos 2\pi kh+2\sum_{\gamma=2}^{\infty}D_2\,[\gamma]e^{2\pi kh\gamma}\right)\right)\end{gathered} \tag{53}$$

$$C_\beta(z) = a\left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^{(2)}}\left([D_2[0] + 2D_2[1]\cos 2\pi kh] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]\cos 2\pi kh\gamma\right)\right) \tag{54}$$

Так как при $kh \in Z$, где Z- множество целых чисел $\cos 2\pi kh = 1$ и $2\sum\limits_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]\cos 2\pi kh\gamma = 2\sum\limits_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]$, то после некоторых преобразований из (55) имеем

$$C_\beta(z) = a\cdot\left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^2 N^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^{(2)}}\left(\left[D_2[0] + 2D_2[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]\right]\right)\right) =$$
$$= a\left(D_2[0] + 2D_2[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_2[\gamma]\right)\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4 N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^4}\right). \tag{55}$$

Имея в виду (41) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1), из (55) получим

$$C_\beta(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4 N^4}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^4}\right)}{N\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right)}, \tag{56}$$

где $h = \frac{1}{N}$ и $\beta = \overline{0,N}, N = 2,3,...$, таким образом, получили коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы (1). Что и требовалось доказать.

5 Заключение

В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. Методы интерполирования также используются как приближения функций. Имеются классические и вариационные методы построения интерполяционных формул при приближения функций. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы, именно данную работу посвящен вариационным методам. В этой работе используя метод С.Л.Соболева решается одно минимизационную задачу интерполированию.

В основном в настоящей работе рассматривается новая оптимальная интерполяционная формула в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, здесь используя дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi)^2 dx^2}\right)^m$, при $m = 2$ получили оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы в пространстве С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Литература

[1] *Соболев С.Л.* Об интерполировании функций n переменных // Докл. АН СССР, – 1961. 137, – С. 778–781.

[2] *Лоран П.Ж.* / Аппроксимация и оптимизация / М. Мир – 1975. – 496с.

[3] *Игнатов М.И., Певный А.Б.* Натуральные сплайны многих переменных / Ленинград. Наука, – 1991.

[4] *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Киев, Наукова думка, – 1992. – 304 с.

[5] *Arcangelu R., Lopez de Silanes M.C., Torrens T.T.* Multidimensianal minimizing splines / Keuwer Academic publishers. Boston, – 2004. – 261 p.

[6] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука, – 1974. – 808с.

[7] *Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х.* Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева // Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009, №3, – С. 180–186.

[8] *Хаётов А.Р.* Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве // Узбекский математический журнал. Ташкент, – 2010. №2, – С. 173–179.

[9] *Хаётов А.Р.* Алгоритм вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ // Узбекский математический журнал. Ташкент, – 2010, №3. – С. 154–161.

[10] *Шадиметов Х.М., Жалолов И.И.* Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, – 2016. – №2. – С. 94–102.

[11] *Жалолов О.И., Хаятов Х.У.* Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, – 2023. - №1. – С. 47–59.

[12] *Holladay J.C.* Smoothest curve approximation // Math. Tables Aids Comput. – 1957. – V.11. – P. 223–243.

[13] *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения / М.: Мир, – 1972.

[14] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике / –М.: – 1976.

[15] *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / – Новосибирск. Наука, – 1984.

[16] *Шадиметов Х.М., Жалолов И.И.* Об одном алгоритме построения дискретного аналога $D_2[k]$ одного оператора // УзМЖ, -Ташкент, – 2015. -№1. – С. 158–163.

Поступила в редакцию 20.05.2023

UDC 517.518.644

FINDING THE OPTIMAL COEFFICIENTS OF THE INTERPOLATION FORMULA IN THE SOBOLEV SPACE

Khayatov Kh.U.

x.u.xayatov@buxdu.uz

Bukhara State University, 11 M.Ikbol street, Bukhara 200114, Uzbekistan.

For the first time, S.L. Sobolev [1] posed the problem of finding an extremal function for an interpolation formula and calculating the norm of the error functional in the Sobolev space.

In this work, an explicit extremal function of the interpolation formula was found in the Sobolev space, the generalized derivatives of which are of order as m are square-integrable.

In this paper, we consider a new optimal interpolation formula in the Sobolev space, here using the discrete analogue of the differential operator, for m=2, we obtain the optimal interpolation coefficients formula in the Sobolev space and the norm of the error functional is calculated.

Keywords: generalized function, space, norm, error functional, interpolation formula, extremal function

Citation: Khayatov Kh.U. 2023. Finding the optimal coefficients of the interpolation formula in the Sobolev space. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 3/1(50): 62-73.