№ 1(46) 2023

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(46) 2023

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.02.2023 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

Содержание

УДК 518.517.392

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(M)}(T_1)$

Жалолов О.И., Хаятов Х.У.

*o_jalolov@mail.ru

Бухарский государственный университет,

200114, Узбекистан, Бухара, улица М. Икбол, 11.

В этой работе найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в явном виде в пространстве Соболева $W_2^{(m)}(R^n)$, функций у которых обобщенные производные порядка m интегрируемы с квадратом. В настоящей работе рассматривается задача построение оптимальных интерпояционных формул в пространстве С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m = 1$ и вычислена норма функционала погрешности.

Ключевые слова: оптимальная интерполяционная формула, экстремальная функция, функционал погрешности.

Цитирование: *Жалолов О.И., Хаятов Х.У.* Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 1(46). – С. 47-59.

1 Введение

Задача о построении интерполяционных формул является одной из классических задач вычислительной математики и численного анализа.
Интерполяционные формулы построены многими авторами ([1–5]). Допустим, что в $N+1$ произвольно расположенных точках x_i $(i=\overline{0,N})$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_N)$ функции $f(x)$.
Требуется построит интерполяционную формулу $P_f(x)$, т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x_\lambda), \tag{1}$$

совпадающую функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i),\ i = 0, 1, ..., N, \tag{2}$$

здесь точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $C_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1-одномерный тор, т.е. окружность длины равной единице.

Важной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал, определенный как

$$< \ell(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda), \tag{3}$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda)$ интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x - z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x_\lambda) \tag{4}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $\delta(x)$- дельта- функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом [6].
Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если на нём вести скалярное произведение

$$< f(x), \varphi(x) >= \int_{T_1} f^{(m)}(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx + \left(\int_{T_1} f(x)\, dx\right)\left(\int_{T_1} \varphi(x)\, dx\right).$$

Норма определяется по формуле

$$\left\| f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)\, dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left|\hat{f}_k\right|^2. \tag{5}$$

2 Постановка задачи

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном торе гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\left\| \ell|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \sup_{\left\| f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|=1} |< \ell, f >|, \tag{6}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ -сопряженное пространство пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Значит, для того чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить ному функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$.
Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ.
Если

$$\left\| \overset{o}{\ell}|\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \inf_{C_\lambda(z), x_\lambda} \left\| \ell\, |\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|, \tag{7}$$

тогда функционал $\overset{o}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую интерполяционную формулу называем оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, возникает следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$ которые удовлетворяют равенству (7).
Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (7), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.

В работе [1] С.Л.Соболевым решена задача 1 интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$. В пространстве $L_2^{(m)}(R)$ задачи 1 и 2 исследованы в [2]. В [8] рассмотрена задача построение оптимальных интерполяционных формул вида (1) с условием интерполяции (2) (при фиксированных узлах x_λ) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и для оптимальных коэффициентов получена система линейных уравнений. Алгоритм для вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дан в работе [9]. В настоящей работе рассматривается задача построение оптимальных интерпояционных формул в пространстве С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m=1$ и вычислена норма функционала погрешности.

3 Норма и экстремальная функция функционала погрешности интерполяционной формулы в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Как известно, что задача оценки погрешности интерполяционной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной интерполяционной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Справедлива следующая.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\cos 2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}}, \quad (8)$$

где $C_\lambda(z)$ - коэффициенты, x_λ - узлы интерполяционной формулы вида (1).

Доказательство
Известно, что [6] для функции $f(x)\in\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_k e^{-2\pi ikx}=\sum_k\hat{f}_k e^{-2\pi ikx},$$

где

$$\hat{f}_k=<f(x),e^{2\pi ikx}>=\int_{T_1}f(x)\,e^{2\pi ikx}dx$$

т.е. коэффициенты Фурье.
Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}<\ell(x), f(x)>=<\ell(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi ikx}>= \\ =\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k <\ell(x), e^{-2\pi ikx}>=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \hat{\ell}_k=\hat{f}_0 \hat{\ell}_0+\sum_{k\neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_k\end{gathered} \tag{9}$$

здесь $\hat{\ell}_0=\int\limits_{T_1} \ell(x)dx, \quad \hat{\ell}_k=\int\limits_{T_1} \ell(x)e^{2\pi ikx}dx.$
Теперь вычислим значение коэффициента Фурье $\hat{\ell}_k$.

$$\begin{gathered}\hat{\ell}_k=<\ell(x), e^{2\pi ikx}>=<\delta(x-z)-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x-x_\lambda), e^{2\pi ikx}>= \\ =<\delta(x-z), e^{2\pi ikx}>-<\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x-x_\lambda), e^{2\pi ikx}>= \\ =e^{2\pi ikz}-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ikx_\lambda}=\cos 2\pi kz-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ikx_\lambda}\end{gathered}$$

т.е.

$$\hat{\ell}_k=\cos 2\pi kz-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi ikx_\lambda} \tag{10}$$

При $k=0$ из (10) имеем

$$(\ell(x), 1)=1-\sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z). \tag{11}$$

Применяя к правой части (9) неравенство Шварца, получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}|<\ell(x), f(x)>|=\left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0+\sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_k\right|\leqslant\left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0\right|+\left|\sum_{k\neq 0}\hat{f}_k\hat{\ell}_k(2\pi ik)^m\frac{1}{(2\pi ik)^m}\right|\leqslant \\ \leqslant\left|\hat{f}_0\hat{\ell}_0\right|+\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|\left|\hat{\ell}_k\right||(2\pi ik)^m|\frac{1}{|(2\pi ik)^m|}\leqslant\left\{\left|\hat{f}_0\right|^2+\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|^2|2\pi k|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot \\ \cdot\left\{\left|\hat{\ell}_0\right|^2+\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{|2\pi k|^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\|f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|\cdot\left\{\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}},\end{gathered} \tag{12}$$

из (12) видно, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2\leqslant\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\cos 2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}} \tag{13}$$

Существует такая функция из пространства $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$, что в неравенстве (13) равенство достигается.
Действительно, рассмотрим следующую функцию $u(x)$:

$$u(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}}. \tag{14}$$

Пользуясь формулами (10) и (11),после некоторых вычислений получим

$$\begin{gathered} < \ell(x), u(x) > = < \ell(x), 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) > + < \ell(x), \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{(2\pi)^{2m} k^{2m}} > = \\ = \left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \hat{\ell}_k}{k^{2m}} = \left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}} = \\ = \left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}}. \end{gathered} \tag{15}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. Квадрат нормы функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\left\| u | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}}.$$

Доказательство леммы.
Так как для всех функций $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет место равенство (5) и отсюда следует, что в том числе для нормы функции $u(x)$ справедливо равенство

$$\left\| u | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int\limits_{T_1} u(x)\, dx \right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left|\hat{u}_k\right|^2, \tag{16}$$

где $k \in Z$ и $\hat{u}_k$ - коэффициенты Фурье.
Таким образом вычислим норму функции $u(x)$ в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ по формуле (16). В (16) для каждого слагаемого произведем отдельное вычисление:

$$\begin{gathered} \left(\int\limits_{T_1} u(x)\, dx \right)^2 = \left(\int\limits_{T_1} \left[1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}} \right] dx \right)^2 = \\ = \left([\, 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\,] \int\limits_{T_1} dx + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \int\limits_{T_1} e^{-2\pi ikx} dx}{k^{2m}} \right)^2 \end{gathered} \tag{17}$$

Так как $\int\limits_{T_1} e^{-2\pi ikx} dx = 0$ и $\int\limits_{T_1} dx = 1$, то (17) примут следующий вид

$$\left(\int\limits_{T_1} u(x)\, dx \right)^2 = \left([\, 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\,] \right)^2 \tag{18}$$

Теперь вычислим значение $\hat{u}_k$:

$$\begin{gathered}
\hat{u}_k=\int\limits_{T_1} u\,(x)e^{-2\pi ikx}dx=\int\limits_{T_1}\left[1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{k^{2m}}\right]e^{-2\pi ikx}dx=\\
=\int\limits_{T_1}\left[1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi ikx}}{k^{2m}}\right]e^{-2\pi ikx}dx=\\
=[\,1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\,]\int\limits_{T_1}e^{-2\pi ikx}dx+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k\int\limits_{T_1}e^{-2\pi ikx}e^{2\pi ikx}dx}{k^{2m}}=\\
=\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k}{k^{2m}}.
\end{gathered}\tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в правую часть (16) имеем

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\sum_{k\neq 0}(2\pi)^{2m}k^{2m}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{(2\pi)^{4m}k^{4m}}\tag{20}$$

Таким образом после некоторых сокращений из (20) следует, что

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|^2=\left|1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{\ell}_k\right|^2}{k^{2m}}.\tag{21}$$

Учитывая (10) из (21) следует доказательство леммы.
Сопоставляя правых частей (13) и (21) получим

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|^2\leqslant\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|^2\tag{22}$$

Учитывая леммы для правых частей (15) будем имеет

$$<\ell\,(x)\,,u\,(x)>=\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|\tag{23}$$

Для погрешности интерполяционной формулы (1) на функциях $u\,(x)$ справедливо:

$$<\ell\,(x)\,,u\,(x)>\leqslant\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|.\tag{24}$$

Подставляя правую часть (23) в левую часть (24) имеем

$$\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|\leqslant\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|\cdot\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|.\tag{25}$$

После сокращений из (25) следует, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|\geqslant\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|.\tag{26}$$

Из (22) и (26) получим, что

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|=\left\|u|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|.\tag{27}$$

Если принимать во внимание (27), то можем написать следующую:

$$< \ell\,(x)\,, u\,(x) >=< u\,(x)\,, u\,(x) > . \tag{28}$$

Равенство (28) свидетельствует о существование $u\,(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$ и таким образом оно является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1), т.е.

$$u\,(x) = \psi_\ell\,(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,, \tag{29}$$

для которой выполняется следующее равенство

$$|< \ell\,(x)\,, \psi_\ell\,(x) >| = \left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)*}\,(T_1)\,\right\| \cdot \left\|\psi_\ell|\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\,\right\|. \tag{30}$$

Тогда (30) принимает следующий вид

$$< \ell\,(x)\,, \psi_\ell\,(x) >=< \psi_\ell\,(x)\,, \psi_\ell(x) > \tag{31}$$

Это означает, что выполняется все условия теоремы Рисса [10].
Справедлива следующая

Теорема 2. Равенство (15),(27) и (29) подтверждает, что

$$u\,(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}}$$

является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) и $u\,(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$.

Таким образом учитывая (20),(27) и условии леммы для квадрата нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) имеем

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}\,(T_1)\,\right\|^2 = \left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}}, \tag{32}$$

что и требовалось доказать.

На основании этой теоремы функционал погрешности интерполяционной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$ имеет оценку

$$|< \ell\,(x)\,, f\,(x) >| \leqslant \left\{\left|\hat{f}_0\right|^2 + \sum_{k\neq 0} \left|\hat{f}_k\right|^2 |2\pi k|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\left|1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi ikx_\lambda}\right|^2}{k^{2m}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4 Минимизация нормы функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$

Из (8) видно, что качество интерполяционной формулы характеризуется нормой функционала погрешности и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по $C_\beta(z)$ и x_β интерполяционной формулы (1) есть задача исследование

функции на экстремум. Значения $C_\beta(z)$ и x_β, реализующие этот минимум, определяют наилучшую интерполяционную формулу.
Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. В пространстве периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4), коэффициенты которой при $m = 1$ имеют следующий вид

$$C_{[\beta]}(z) = \frac{1 + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^2}}{N\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}, \tag{33}$$

где $\beta = \overline{1,N}, N = 2,3,....$

Доказательство.
Имея в виду (29), (30) и условии теоремы 2 $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) и $\psi_\ell(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Известно [6], что по теоремы Бабушки условие оптимальности интерполяционной формулы запишется в виде

$$< \delta(x - x_\beta), \psi_\ell(x) >= \psi_\ell(x_\beta) = 0, \tag{34}$$

где ψ_ℓ экстремальная функция интерполяционной формулы (1) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. В силу (10) и (14) представление экстремальной функции имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x) = 1 - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi i k x_\lambda}\right)e^{-2\pi i k x}}{k^{2m}}, \tag{35}$$

где x_λ и $C_\lambda(z)$ узлы и коэффициенты интерполяционной формулы (1).
Так как мы рассматриваем интерполяционные формулы с равномерно распределенными узлами, то имеем, что $x_\beta = h\beta$ и $x_\lambda = h\lambda$, $(\beta = 1, ..., N, \lambda = 1, ..., N)$, тогда учитывая (34) из (35) получим

$$\psi_\ell(h\beta) = 0,\ \beta = \overline{1,N}. \tag{36}$$

или , что то же самое для $\psi_\ell(h\beta)$ имеем следующую систему уравнений , т.е.

$$1 - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi i k x_\lambda}\right)e^{-2\pi i k x_\beta}}{k^{2m}} = 0, \tag{37}$$

$$\text{где}\beta = \overline{1,N}.$$

Преобразуя (37) имеем

$$\begin{gathered} 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{(\cos 2\pi kz)\,e^{-2\pi i k h\beta}}{k^{2m}} - \\ -\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z)e^{2\pi i k(h\beta - h\lambda)}\right)}{k^{2m}} = 0, \end{gathered} \tag{38}$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta(z) + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left(\sum\limits_{\beta=1}^{N} C_\beta(z) e^{2\pi i k (h\beta - h\lambda)}\right)}{k^{2m}} = \\ = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k\,(z - h\beta)}{k^{2m}}. \tag{39}$$

После некоторых преобразований из (39) получим

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta(z) \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k\,(h\beta - h\lambda)}{k^{2m}}\right] = \\ = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k\,(z - h\beta)}{k^{2m}}. \tag{40}$$

Умножая обе части (40) на число a, где

$$a = \frac{1}{N\left(D_m\left(0\right) + 2D_m\left(1\right)\right)\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m} N^{2m}} \sum\limits_{k\neq 0} \frac{1}{k^{2m}}\right)}, \tag{41}$$

имеем

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta(z) a \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k (h\beta - h\lambda)}{k^{2m}}\right] = a\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k (z - h\beta)}{k^{2m}}\right). \tag{42}$$

Обозначая

$$a\left[1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k\,(h\beta - h\lambda)}{k^{2m}}\right] = \nu_m\left(h\beta - h\lambda\right)\left(\lambda = 1, N\right), \tag{43}$$

$$a\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k\,(z - h\beta)}{k^{2m}}\right) = f_m\left(h\beta\right) \tag{44}$$

Из (42) получим следующую уравнению

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta\left(z\right) \nu_m\left(h\beta - h\lambda\right) = f_m\left(h\beta\right), \left(\lambda = 1, N\right) \tag{45}$$

Пере обозначив $C_\beta\left(z\right) = C_{[\beta]}\left(z\right), \nu_m\left(h\beta\right) = \nu_m\left[\beta\right]$ и $f_m\left(h\beta\right) = f_m\left[\beta\right]$, систему (45) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$C_{[\beta]}\left(z\right) * \nu_m\left(\beta\right) = f_m\left[\beta\right], \beta = \overline{0, N} \tag{46}$$

$$C_{[\beta]}\left(z\right) = 0, h\beta \notin \left[T_1\right]. \tag{47}$$

Применяя оператор $D_m\left[\beta\right]$ [10] к обеим частям уравнение (46) получим

$$C_{[\beta]}\left(z\right) \cdot D_m\left[\beta\right] * \nu_m\left(\beta\right) = D_m\left[\beta\right] * f_m\left[\beta\right], \beta = \overline{0, N} \tag{48}$$

Пользуясь формулами (19),(20), работы [10] из (48) имеем

$$C_{[\beta]}(z) = D_m[\beta] * f_m[\beta], [\beta] = [0,1]. \tag{49}$$

Подставляя (44) в (49) имеем

$$\begin{aligned} C_{[\beta]}(z) &= D_m[\beta] * a\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z - h\beta)}{k^{2m}}\right) = \\ &= a\left(D_m[\beta] * 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{e^{2\pi i k z}}{k^{2m}} D_m[\beta] * e^{-2\pi i k h\beta}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Так как

$$D_m[\beta] * 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta) = D_m(0) + 2D_m(1) + 2\sum_{k=2}^{\infty} D_m(h\beta) \tag{51}$$

и

$$\begin{aligned} D_m[\beta] * e^{2\pi i k h\beta} &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_m[\gamma] e^{2\pi i k h(\beta-\gamma)} = \\ &= e^{-2\pi i k h\beta}\left[D_m(0) + 2D_m(1)\cos 2\pi k h + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_m(h\gamma)\, e^{2\pi i k h\gamma}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

то, имея в виду (51) и (52) из (50) получим

$$\begin{aligned} &C_{[\beta]}(z) = \\ &= a\left(\begin{aligned} &D_m[0] + 2D_m[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_m[h\gamma] + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^{2m}} \left(D_m[0] + 2D_m[1]\cos 2\pi k h + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_m[h\gamma] e^{2\pi k h\gamma}\right) \end{aligned}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

Пусть $m = 1$, тогда будем использовать результаты работы [10] для $D_1[\gamma]$ т.е.

$$D_1[\gamma] = \begin{cases} 2\pi h, \gamma = 0 \\ -\dfrac{1}{\pi 2\pi h}, |\gamma| = 1 \\ 0, |\gamma| \geqslant 2 \end{cases} \tag{54}$$

Применяя (54) к (53) получим

$$\begin{aligned} &C_{[\beta]}(z) = \\ &= a\left(D_1[0] + 2D_1[1] + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^2} \left([D_1[0] + 2D_1[1]\cos 2\pi k h]\right)\right). \end{aligned} \tag{55}$$

Так как при $kh \in Z$, где Z- множество целых чисел $\cos 2\pi k h = 1$, то после некоторых преобразований из (55) имеем

$$\begin{aligned} C_{[\beta]}(z) &= a\left(D_1[0] + 2D_1[1] + \frac{1}{(2\pi)^2 N^2} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^2} \left([D_1[0] + 2D_1[1]]\right)\right) = \\ &= a\left(D_1[0] + 2D_1[1]\right)\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^2 N^2} \sum_{k\neq 0} \frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^2}\right). \end{aligned} \tag{56}$$

Имея ввиду (41) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1) из (56) получим

$$C_{[\beta]}(z) = h\left(\frac{1}{1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}\right)\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^2}\right), \qquad (57)$$

где $h=\frac{1}{N}$ и $\beta=\overline{1,N}, N=2,3,...$, тогда преобразуя (57) имеем коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы (1).

Что и требовалось доказать.

Приводим известные формулы (см.[11])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2\,(2m)!}B_{2m} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}(x), \qquad (58)$$

где B_{2m} - числа Бернулли и $B_{2m}(x)$ - многочлен Бернулли.

При $m=1$, используя формулы (58) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1) из (57) получим

$$C_{[\beta]}(z)=\frac{1+\frac{1}{2N^2}B_2(z-h\beta)}{N\left(1+\frac{1}{2N^2}B_2\right)}. \qquad (59)$$

5 Заключение

В настоящей работе найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в явном виде в пространстве Соболева $W_2^{(m)}(R^n)$, функций у которых обобщенные производные порядка m интегрируемы с квадратом.

$$u(x)=1-\sum_{\lambda=0}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{2m}}$$

В теорема 3 доказана, что в пространстве Соболева периодических функций $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4) и вычислена норма функционала погрешности.

Литература

[1] *Соболев С.Л.* Об интерполировании функций n переменных. // Докл. АНСССР, – 1961. – С. 778–781.

[2] *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. // М. Мир – 1975. – 496 с.

[3] *Игнатов М.И, Певный А.Б.* Натуральный сплайны многих переменных. // Ленинград. Наука, – 1991.

[4] *Корнейчук Н.П, Бабенко В.Ф, Лигун А.А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. // Киев, Науково думка, – 1992. – 304 с.

[5] *Arcangelu R, Lopez de Silanes M.C, Torrens T.T.* Multidimensianal minimizing splines. // Keuwer Academic publishers. Boston, – 2004. – 261 p.

[6] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. // М.: Наука, – 1974. – 808 с.

[7] *Шадиметов Х.М, Маматова Н.Х.* Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева. // Узбекский математический журнал. Тошкент, – №3. – 2009. – С. 180–186.

[8] *Хаётов А.Р.* Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. // Узбекский математический журнал. Тошкент, – №2. – 2010. – С. 173–179.

[9] *Хаётов А.Р.* Алгоритм вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. // Узбекский математический журнал. Тошкент, – №3. – 2010. – С. 154–161.

[10] *Шадиметов Х.М., Жалолов И.И.* Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, – 2016. – № 2. – С. 94–102.

[11] *Градшитейн И.С. Рыжик И.М.* В Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. // наука, физ-мат., М. – 1971.

[12] *Holladay J.C.* Smoothest curve approximation. // Math.Tabies Aids Comput. – 1957. – V.11. – P. 223–243.

[13] *Алберг Дж.., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. // М.: Мир, – 1972.

[14] *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. // М.: – 1976.

[15] *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. // Новосибирск. Наука, – 1984.

[16] *Khayatov Kh.U.* "Optimal interpolation formula in S. L. Sobolev's periodic space $\tilde{W}_2^{(m)}$ $[0,1]$ " Materials of the international scientific-practical conference "Modern problems of applied mathematics and information technology". Bukhara, – 2021. – P. 105–110.

[17] *Hayotov A.R., Babaev S.S.* "Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space" Problems of computational and applied matematics, – 2020. – No.4, – P. 73–85.

[18] *Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.O.* "On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$ Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 – 2020. 112713.

[19] *Jalolov O.I.* "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 – 2021. https://doi.org/10.1063/5.0057015.

Поступила в редакцию 24.01.2023

UDC 518.517.392

ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE OPTIMAL INTERPOLATION FORMULA IN THE SOBOLEV SPACE $\tilde{W}_2^{(M)}(T_1)$

*__Jalolov O.I., Khayatov Kh.U.__

*o_jalolov@mail.ru

Bukhara State University,

11, M.Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan.

For the first time, S.L. Sobolev [1] set the task of finding the extremal function for the interpolation formula and calculating the norm of the error functional in the Sobolev space. In this paper, an explicit extremal function of the interpolation formula is found in the Sobolev space $W_2^{(m)}(R^n)$ whose functions have generalized derivatives of order

m are square-integrable. S. L. Sobolev considered the problem of constructing optimal lattice formulas over the space $L_2^{(m)}(R^n)$ and reduced the finding of optimal coefficients to solution of a discrete problem of the Wiener-Hopf type. S. L. Sobolev, investigating a discrete problem of the Wiener-Hopf type, proved the existence and uniqueness of the solution to this problem and gave an algorithm for finding the optimal coefficients of cubature and interpolation formulas. In this paper, we consider the problem of constructing optimal interpotion formulas in the Sobolev space $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ for $m=1$ and the norm of the error functional is calculated.

Citation: Jalolov O.I., Khayatov Kh.U. 2023. Algorithm for constructing the optimal interpolation formula in the Sobolev space $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 1(46): 47-59.