BUXORO
DAVLAT
1930 UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

6/2022

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
6/2022

E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

PUBLISHED SINCE 2000 (Online since 2020)

PUBLISHED SIX TIMES A YEAR

2022/6(94)

SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY

***

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

***

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

The journal is published in the Bukhara Regional Department of Press and Information of the Press and Information Agency of Uzbekistan on August 24, 2020 With registered certificate № 1103

The journal "Scientific reports of Bukhara state university" is included in the list of scientific publications recommended to publish the main scientific results of doctoral dissertations of the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan on philology and physical and mathematical sciences.

The journal is intended for professors and teachers of higher educational institutions, senior researchers, students, scientific staff of scientific research institutions, teachers of academic lyceums, professional colleges, as well as researchers in general secondary education and various fields.

Founder: BUKHARA STATE UNIVERSITY

Executive secretary:
Sayfullaeva N.Z.
Doctor of Philosophy in Pedagogical Sciences (PhD)

Editor: Sobirova Z.R.

Department technicians:
Shirinova M.Sh.
Raximova S.M.

EXACT AND NATURAL SCIENCES		
Турдиев Х.Х., Холиков С.Х., Темирова М. Х.	Смешанная задача для интегро-дифференциальнох гиперболической систем первого порядка с памятью	3
Abdullaev J.I., Ibragimov H.H.	Pifagor va Eyler g‘ishtlari	10
Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.	Построение оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева	16
Jumayev J.	Transport masalasini Mathcad tizimida yechish	27
Raxmatova N.J.	Inverse coefficient problem for the 1d fractional diffusion equation with initial-boundary problem	32
Nurolliyev N.Sh.	Methods and analysis of operating with scientific laboratories to investigate the optical properties of zinc oxide nanorods	41
Хаятов Х.У.	Построение квадратурных формул с помощью оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\widetilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	50
Babaev S.S., Amonova N.A.	To construct basis functions in $W_2^{(1,0)}$ space for finite element method for 1d two-point boundary-value problems	57
LINGUISTICS		
Jumayev E.B., To‘xtayeva M.O.	O‘zbek adabiy tilida so‘roq gap va o‘zlashtirmalik	63
Kambarova M.	Classification of architecture and construction terms for the national corpus	69
Kazakov I.R.	Frazeologiyada millat tili va madaniyati tavsifi	73
Radjabov R.R.	Fransuz tili orfografiyasiga oid ilmiy-nazariy qarashlar	77
Rabieva M.G’.	Kinodiskurs yaxlitligini ta'minlashda verbal-vizual komponentlar va ularning ahamiyati	81
Saidov S.S.	Ikkinchi til o'rganishda ekstraversiyaning foydalari	86
Xolova Sh.D.	Frazeologik birlik-frazema-frazeologizm: tasnif va tadqiqot tahlili	92
Usmonov A.K.	Bog‘lovchilarning pleonastik qo‘llanishining stilistik xususiyatlari	98
Жаббарова Ю.Х.	Қариндошлик терминлари иштирокидаги прагматик коннотация	103
Нурова Ю.У.	Паремалардаги озиқ-овқат номлари этнолингвистика объекти сифатида	109
Раджабов Н.Н.	Инглиз тилида унли фонемаларнинг позицион кўринишлари	114
Рўзиев Я.Б.	Ноқардош тилларда иккинчи тур ўзлаштирмалик ва микроматн	121

Жабборов Э.	Маҳмудхўжа Беҳбудийнинг “сарт” сўзи ҳақидаги қарашлари	126
Kaharova I.S.	Morphological features of imitative words in the Uzbek and English languages	130
LITERARY CRITICISM		
Kurbanova Ch.B.	Abdulla Oripov she’riyatida aruz vazni va uning ahamiyati	137
Nasridinova S.U.	O.Henri hikoyalarida yumorning badiiy vazifalari	143
Obidova N.O.	Kortasar hikoyalarida psixologik tahlil	148
Халимова Ф.Р.	Лингвофонетик воситаларнинг прагматик хусусияти (инглиз шеърий матни мисолида)	152
Zaripova D.B.	Huvaydo lirikasida payg’ambarlar obrazi	156
Ахмедова Ш.Н.	Академик Наим Каримов услубига хос муҳим қирралар (Ойбек ижоди мисолида)	160
Бокарева М.А.	Пути развития русского реализма рубежа XX-XXI веков: от соцреализма до экзистенционального постреализма	166
Джалилова З.Б.	Инглиз шеъриятида инсон образининг гуллар орқали тасвирланиши	173
Каримова Ш.К.	Замонавий ўзбек шеъриятида поэтик синтаксис унсурларининг уйғун келиши	182
Fayziyeva M.Ch.	Amerika va o’zbek badiiy diskursida sadoqat va xiyonat g’oyalari talqini	189
Қодирова Ф.Ш.	Риторика санъатшунослик дискурси контекстида	194
“NAVOIY GULSHANI”		
Амонова З.Қ.	Изҳори ҳамд	198
PHILOSOPHY, LAW AND POLITICAL SCIENCES		
Давидов У.Х.	Миллий-маънавий хавфсизлик ва миллий ўзликни англашнинг ўзига хос сиёсий-мафкуравий хусусиятлари ва эволюцияси	201
Muminkhujaev A.M.	The formation and development of liberal worldview on ideological threats in the context of globalization	207
PEDAGOGICS		
Ҳакимова Н.С.	Бошланғич синф тарбия дарсларида ўқувчиларда ижтимоий-хуқуқий компетенцияларини шакллантириш тамойиллари	212

УДК: 517.518.392

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С.Л.СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Хаятов Хуршиджон Усманович
докторант, кафедрой прикладной математики и технологий программирования,
Бухарский государственный университет,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.
wera00@mail.ru

Аннотация. *Основная сфера применения различных пространств обобщенных функций лежат в теории дифференциальных уравнений и в теории квадратурных и формул. По этому возникает необходимость в изучение пространств обобщенных функций, так или иначе связанных с различными областями в* R^n. *Современная постановка проблемы оптимизации формул приближенного интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах. В этой работе интегрируя решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева* $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, *мы получаем оптимальных квадратурных формул в этом же пространстве Соболева.*

Ключевые слова: *квадратурная формула, функционал погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональная пространство, экстремальная функция.*

Abstract: *The main areas of application of various spaces of generalized functions lie in the theory of differential equations and in the theory of quadrature formulas. Therefore, there is a need to study the spaces of generalized functions connected in one way or another with various domains in* R^n. *The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the formula error functional on chosen normed spaces. In this paper, integrating lattice optimal interpolation formulas in the space of Sobolev* $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, *we obtain optimal quadrature formulas in the same space of Sobolev.*

Keywords*: quadrature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, extremal function.*

Annotatsiya. *Umumlashgan funktsiyalarning turli fazolarda qo'llashning asosiy yo'nalishlari differensial tenglamalar nazariyasi va kvadratur formulalar nazariyasida yotadi. Shu sababli, u yoki bu tarzda turli sohalar* R^n *bilan bog'liq bo'lgan umumlashgan funktsiyalar fazolarini o'rganish zarurati tug'iladi. Taqribiy integrallash formulalarini optimallashtirish muammosining zamonaviy formulasi tanlangan normalangan fazolarda funktsional xatolik formulasining normasini minimallashtirishdan iborat. Ushbu maqolada Sobolev fazosida to`rli optimal interpolyatsion formulalar intergallashtirilgan, Sobolev* $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$ *fazosida optimal kvadratur formulalar olingan.*

Kalit so'zlar: *kvadratur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, ekstremal funksiya.*

1. Введение.

Задача о построении интерполяционных формул является одной из классических задач вычислительной математики и численного анализа.

Теории интерполяционных формул построены многими авторами, например, [1]-[5]. Допустим, что в *n+1* произвольно расположенных точках $\{x_i\}$ $\left(i=\overline{0,N}\right)$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, дани значения $f(x_0), f(x_1),...., f(x_N)$ функции $f(x)$.

Требуется построит интерполяционную формулу $P_f(x)$, т.е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x_\lambda), \qquad (1)$$

совпадающую функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i), \quad i = 0,1,...N, \qquad (2)$$

здесь точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $C_\lambda(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1-одномерный тор ,т.е.

окружность длины равной единице.

Основной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал, определенный как

$$<\ell(x), f(x)> = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x)dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda) \qquad (3)$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda)$

интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x_\lambda) \qquad (4)$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$- коэффициенты, а x_λ узлы формулы $P_f(z)$, $x_\lambda \in [0,1]$, $\delta(x)$- дельта- функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных одномерном T_1 - окружности длины равной единице и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом [6].

Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если на нём вести скалярное произведение

$$< f(x), \varphi(x) > = \int_{T_1} f^{(m)}(x)\varphi^{(m)}(x)dx + \left(\int_{T_1} f(x)dx\right)\left(\int_{T_1} \varphi(x)dx\right).$$

Норма определяется по формуле

$$\left\| f/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left|\hat{f}_k\right|^2. \qquad (5)$$

2. Постановка задачи.

Известно что

$$\left\|\ell/\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\right\| = \sup_{\|\varphi\|\neq 0} \frac{|<\ell,\varphi>|}{\left\|\varphi/\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|}.$$

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\left\| \ell \mid \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \sup_{\left\| f \mid \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| = 1} \left| < \ell, f > \right|, \tag{6}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ -сопряженное пространство пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Значит, для того чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$. Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ. Если

$$\left\| \overset{0}{\ell} \mid \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \inf_{C_\lambda(x), x_\lambda} \left\| \ell \mid \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|, \tag{7}$$

тогда функционал $\overset{0}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующую интерполяционную формулу оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, возникает следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$ которые удовлетворяют равенству (7).

Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (7), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной

формулы $P_f(z)$.

В работе [1] С. Л. Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена задача 1. В пространстве $L_2^{(m)}(R)$ задачи 1 и 2 исследованы в [7]. В [8] рассмотрена задача построение оптимальных интерполяционных формул вида (1) с условием интерполяции (2) (при фиксированных узлах x_λ) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и для оптимальных коэффициентов получена система линейных уравнений. Алгоритм для вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дан в работе [9].

Как известно, что задача оценки погрешности интерполяционной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной интерполяционной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

В работе [3] получен следующий результат

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \cos 2\pi kz - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \tag{8}$$

где $c_\lambda(z)$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы интерполяционной формулы вида (1).

Из (8) видно, что качество интерполяционной формулы характеризуется нормой функционала погрешности и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов.

Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её.

Отыскание минимума нормы функционала погрешности по $c_\beta(z)$ и $x^{(\beta)}$ интерполяционной формулы (1) есть задача исследование функции на экстремум.

Значения $c_\beta(z)$ и $x^{(\beta)}$, реализующие этот минимум, определяют наилучшую интерполяционную формулу.

В работе [10] доказана следующая

Теорема 2. В периодическом пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$ существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида (1) с функционалом погрешности (4), коэффициенты которой при $m=1$ имеют следующий вид

$$c_{[\beta]}(z)=\frac{1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\left(z-h\beta\right)}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}, \tag{9}$$

где $\beta=\overline{1,N}, N=2,3,\ldots$.

Используя этой теоремы, т. е. с помощью оптимальной интерполяционной формулы, построим оптимальные квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx\approx\sum_{\beta=1}^{N}\dot{c}_\beta f\left(h\beta\right), \tag{10}$$

где $f\left(x\right)\in\tilde{W}_2^{(m)}\left[0,1\right]$, $\dot{c}_\beta$ -определяется из (9), т. е. коэффициенты квадратурной формулы.

В следующих теоремах существование и единственность оптимальных квадратурных формул следует из существования и единственности оптимальной интерполяционной формулы. Справедлива следующая

Теорема 3. В пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}\left[0,1\right]$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (10), коэффициенты которой при $m=1$ определяются формулой

$$\overset{o}{c}_\beta=\frac{1}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}. \tag{11}$$

Доказательство. Интегрируя приближенное равенство (1) от нуля до единицы и пользуясь формулой (9) и (10), получим

$$\int_0^1 f(x)dx\cong\int_0^1\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta(x)f(x^{(\beta)})dx \quad \text{или}$$

$$\int_0^1 f(x)dx\cong\int_0^1\sum_{\beta=1}^{N}\dot{C}_\beta(x)f(h\beta)dx, \text{ тогда имеем}$$

$$\int_0^1 f(x)dx\cong\sum_{\beta=1}^{N}\int_0^1\frac{1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\left(x-h\beta\right)}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}f(h\beta)dx \text{ или}$$

$$\int_0^1 f(x)dx\cong\sum_{\beta=1}^{N}\int_0^1\frac{1}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}f(h\beta)dx+\sum_{\beta=1}^{N}\int_0^1\frac{\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi kx\cdot\cos 2\pi kh\beta}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}f(h\beta)dx$$

(12)

Второй интеграл в (12) равен нулю, так как $\int_0^1 e^{-2\pi ikx}dx=0$ при $k\neq 0$.

Тогда из (12) получаем следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=1}^N \int_0^1 \frac{1}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)} f(h\beta)dx \text{ или}$$

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)}\sum_{\beta=1}^N f(h\beta) \tag{13}$$

Это и есть оптимальная квадратурная формула в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, которой получен в работе [4]. Значить ,интегрируя решетчатую интерполяционную формулу в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, мы получаем оптимальную квадратурную формулу в этом же пространстве.

Для вычисления коэффициентов Фурье справедливо следующая

Теорема 4 Среди квадратурных формул вида

$$\int_{T_1} e^{2\pi ipx} f(x)dx \approx \sum_{\beta=1}^N c_\beta f(h\beta), \tag{14}$$

существует единственная оптимальная квадратурная формула в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, коэффициенты которой определяются равенством

$$\overset{o}{c}_\beta = \frac{\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)},\quad \beta=1,2,...,N,\ p=\overline{1,N-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Умножая обе части приближенного равенства (1) на функцию $e^{2\pi ipx}$, интегрируя от нуля до единицы и пользуясь формулой (9), имеем

$$\int_{T_1} e^{2\pi ipx} f(x)dx \approx \sum_{\beta=1}^N \frac{\int_0^1 e^{2\pi ipx}dx + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi kh\beta \int_0^1 e^{2\pi i(p-k)x}dx}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)} f(h\beta)\ . \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что первый интеграл в правой части (16) равен нулю, т.е.

$$\int_0^1 e^{2\pi ipx}dx = 0,\quad p=1,2,...,N-1.$$

Введем обозначения:

$$\mathrm{L}=\sum_{\beta=1}^N \frac{\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi kh\beta \int_0^1 e^{2\pi i(p-k)x}dx}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)} f(h\beta)\ . \tag{17}$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 e^{2\pi i(p-k)}dx = \begin{cases} 1, k=p \\ 0, k\neq p \end{cases}.$$

Так как $\cos 2\pi kh\beta = 1$, если $kh\in Z$ -множество целых чисел.

Отсюда и (17) следует $L=\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right)}f(h\beta)$,что и доказывает теорему 2.

Для приближенного вычисления интегралов вида

$$\int_0^1 x^{\alpha} f(x)dx \tag{18}$$

справедлива следующая

Теорема 5. Следующая квадратурная формула является оптимальной квадратурной формулой в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$ для вычисления интегралов вида (19):

$$\int_{T_1} x^{\alpha} f(x)dx \approx \sum_{\beta=1}^{N}\dot{c}_{\beta} f(h\beta), \tag{19}$$

$$\overset{o}{c} = T_K\left[\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{\alpha-1}\frac{\alpha!}{(n-\alpha)!}\frac{1}{(2\pi ik)^{n+1}}\right],$$

где

$$T_k=\left[N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right)\right]^{-1},\quad \beta=\overline{1,N}, h=\frac{1}{N}, N=2,3,...$$

Доказательство. Умножая обе части приближенного равенство (1) на x^{α}, интегрируя от нуля до единицы и используя формулу (9), имеем

$$\int_{T_1} x^{\alpha} f(x)dx \approx \sum_{\beta=1}^{N}\frac{\int_0^1 x^{\alpha}dx+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi kh\beta\int_0^1 x^{\alpha}e^{-2\pi ikx}dx}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right)}f(h\beta), \tag{20}$$

Обозначим через

$$T_1=\frac{\int_0^1 x^{\alpha}dx+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi kh\beta\int_0^1 x^{\alpha}e^{-2\pi ikx}dx}{k^2}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right)}, \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что

$\int_0^1 x^{\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}$ и $\cos 2\pi kh\beta=1$ если $kh\in Z$ -множество целых чисел.

Для вычисления второго интеграла (21) применяем интегрирование по частям α раз и получаем [7]

$$\int_0^1 x^{\alpha}e^{-2\pi ikx}dx=\left[\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{\alpha-1}\frac{\alpha!}{(n-\alpha)!}\frac{1}{(2\pi ik)^{n+1}}\right]. \tag{22}$$

Из (20)-(22) следует теорема 5.

Вывод.

В первые Соболевым решена задача интерполирования функций *n*-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена задача 1 т.е. вычислен нормы функционала погрешности интерполяционной формулы.

Следует отметить, что решение задачи о минимизации L_p – нормы m – й производной функции, интерполирующей заданные значения y_i в заданных точках x_i, при $p=2$ приводит к развитию теории сплайном. В дальнейшем эта задача исследовалась, во многих работах в более общей постановке, как проблема минимизации функционала при ограничениях.

Одной из основных задач в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данном классом функций. Значение этой функции в некоторой точки z есть функционал, зависящий от коэффициентов и узлов интерполяционной формулы. Минимизирую нормы функционала погрешности решетчатой интерполяционной формулы по коэффициентам, получим оптимальную интерполяционную формулу. В этой работе для некоторых весовых функций интегрируя решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$, мы получаем оптимальных квадратурных формул в этом же пространстве С.Л. Соболева.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Соболев С.Л Об интерполировании функций n переменных. Докл. АНСССР, 1961, 137,-с. 778-781.

2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. -808с.

3. Шадиметов Х.М, Маматова Н.Х. Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева. Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009, №3, -С.180-186.

4. Хаётов А.Р. Об оптимальных интерполяционных формулах в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$*. Узбекский математический журнал. Тошкент,2010, №2,-С.173-179.*

5. Хаятов Х. У. Оптимальная интерполяционная формула в периодическом пространстве С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}[0,1]$*. Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий». Бухара, 2021, с. 105-110.*

6. Жалолов Ф. И. Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством С. Л. Соболева. Докл. АН Р Уз, №2 2010. с. 6-8.

7. И.С. Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. наука, физ-мат., М.1971.

8. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.

9. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020).*

10. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0057015.