



BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

10/2023

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz

10/2023

<https://buxdu.uz>

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 10, noyabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023 yil 29 avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liq Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexriyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza Toymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, dotsent

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Самиев К.А.	Снижение теплопотерь через светопрозрачное ограждение зданий с использованием энергосберегающего оконного блока	3
Hikmatov B.A., Mirzayev M.S., Fayziyev Sh.Sh.	Мажбурий конвексийали quyosh quritgichlarida tajriba tadqiqotlari natijalari	8
Ibodullayev M.X.	Kimyo va neft-gazni qayta ishlash sanoatlarda issiqlik almashinish apparatlarini intensivlash usullari va hisoblari	14
Kengboyev S.A., Safarov N.M.	Vakuum muhitida elektron nur bilan (yuqori sifatli U9A po‘lat) tikuv jihozining mokisini azotlash ustida olib borilgan tadqiqotlar	22
Ochilov L.I., Mirzayev M.S., Fayziyev Sh.Sh., Samiyev K.A.	Passiv quyosh isitish tizimiga ega turar-joy binolarida issiqlik quvuridan foydalanish imkoniyatini baholash	29
Rasulov X.R.	Uzluksiz vaqtli qat’iy Novolterra dinamik sistemasining sifatliy tahlili haqida	34
Kengboyev S.A., Safarov N.M.	Tikuv mashinalari transport mexanizmi va ulardagi mumkin bo‘lgan muammolarni bartaraf etish usullari	40
Shafiyev T.R.	Zararli moddalarning atmosferada ko‘chishi va diffuziya jarayonini monitoring va bashoratlash uchun matematik model va hisoblash algoritmini ishlab chiqish	44
Жумаев Ж., Авезов А.А.	Естественная конвекция между двумя вертикально расположенными стержнями	54
Назаров Э.С., Торемуратова А.Б.	Особенности и сферы применения наполненных полимерных композиционных материалов	59
Назаров М.Р., Назарова Н.М.	К раскрытию понятий энергия и энтропия	64
Sulaymanova Z.A., Umarov B.B., Mirzayeva G.A., Atoyeva M.O.	Ferrosen asosida oraliq metall komplekslari sintezi va IQ spektroskopik tadqiqoti	71
Abdieva G.B.	Tizimli xavfsizlikning amaliy masalalari	77
Qodirov J.R.	Takomillashgan tabiiy konvексийали bilvosita quyosh quritgichining tajribaviy tadqiqotlari	81
Raxmatov I.I., Samiyev K.A., Mirzayev M.S.	Buxoro davlat universitetida 300 kw quvvatga ega tarmoqqa ulangan quyosh fotoelektrik tizimining samaradorlik tahlili	90
Sobirov J.A., Jumayev S.S., Begmurodov O.A.	Galiley geometriyasi elementlaridan foydalanib uchburchaklarning yuzini topish	97
Узаков О.Х.	Теория вакуума и материя	103

Назарова С.М.	Суғориладиган ўтлоки тупроқларда озукка моддалар микдори	108
Кадиров Ж.Р., Мирзаев Ш.М., Мавлонов У.М.	Методика разработки и экспериментального исследования воздушного коллектора для солнечной сушилки косвенного действия с естественной конвекцией	112
Исомиддинов Б.О.	Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$	123
Жалолов О.И., Нуруллаева Н.И.	Верхняя оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\bar{L}_2^m(K_n)$	128
Джураев Ш. И., Аблокулов Ш.З.	К вопросу о колебаниях упругозакрепленного корпуса при несовпадении его центра тяжести с центром упругости	134
Авезов Қ.Ғ., Умаров Б.Б., Ганиев Б.Ш., Эргашова Б.З.	2-трифторацетилциклогексанон бензоилгидразонининг кристалл тузилиши, DFT ҳисоблашлари, Ҳиршфельд юзаси таҳлили ва молекуляр докинги	141
Khayriev U.N., Nutfullayeva A.Kh.	The norm for the error functional of the quadrature formula with derivative in the space $W_2^{(2,1)}$ of periodic functions	149
Khudayarov S.S., Absalamov A.T.	Quadratic stochastic dynamical systems of the type (σD)	157
Khakimova N.Kh.	Formation and properties of agricultural irrigated layers of watered lands of Fergana	162
Ibodullayev M.X., Norqulov J.F., Yo‘llyev Sh.R.	Havoni konditsiyalashni o‘lchamli ko‘rsatgichlar bilan eksergetik tahlil qilish	170
Doliyev Sh.Q.	Elektr tarmoqlarida elektr energiya isrofini kamaytirish tahlili va ularning ekonometrik modelini tuzish	180
Esanov H.Q., Barotova M.O.	Buxoro vohasi yuksak o‘simliklarining biomorfologik tahlili	184
Bahronova D.M., Atayeva G.I.	MySQLda ketma-ketliklarni shakllantirish va ulardan foydalanish	188
Absalamov A.T., Khudayarov S.S.	Dynamics of a cooperative system with order one in the plane	193
Зуннунов Р.Т.	Об одной задаче со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области	197
Умаров О.Р.	Изменение агрохимических и микробиологических показателей луговых почв Бухарской области в зависимости от степени засоления	204
Umarov B.B., Amonov M.M., Xayrullayev F.N.	5,5-dimetil-2,4-dioksokseksan kislota etil eter para-almashingan aroilgidrazonining Ni(II) kompleksi sintezi va kristall tuzilishi	208
Muzafarov F.I., Mardonov O`M., Ganiyev B.Sh.	Vanadil(IV) karboksilatlarining IQ spektroskopik tahlili	214
Хаятов Х.У.	Построение оптимальной весовой квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве периодических функций Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	219

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Хаятов Хурииджон Усманович,
преподаватель кафедры Прикладная математика
и технологии программирования,
Бухарский государственный университет,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан
wera00@mail.ru, x.u.xayatov@buxdu.uz

Аннотация. Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах. При исследовании наилучших формул приближённого интегрирования, в первую очередь, возникает вопрос о существовании таких формул. Этот вопрос исследован весьма полно, хотя и является достаточно сложным, о чём свидетельствует, например, статья [1], где было достигнуто существенное продвижение в его решении. До последнего времени исследования наилучших квадратурных формул основывались на изучении сплай-функций специального вида (монослайнов), связанных с рассматриваемыми формулами [2-5]. Эти методы исследований пока не удаётся эффективно применить при исследовании кубатурных формул в $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, являющихся многомерными аналогами пространств $W_2^{(m)}(T_1)$.

В работе рассматриваются весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и найдены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита с использованием необходимого условия экстремума.

Ключевые слова: кубатурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональное пространство, норма, экстремальная функция.

SOBOLEV DAVRIY FUNKSIYALAR FAZOSIDA $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL VAZNLI KVADRATUR FORMULANI QURISH

Annotatsiya. Integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini optimallashtirish muammosi berilgan normallashtirilgan fazolarda formulaning xatolik funksionali normasini minimallashtirishdan iborat. Integrallarni taqribiy hisoblash formulalari uchun eng yaxshi formulalarni o'rganishda birinchi navbatda bunday formulalarning mavjudligi haqida savol tug'iladi. Bu masala juda ko'p o'rganilgan, garchi u juda murakkab bo'lsa-da, masalan, [1] maqolada uni hal qilishda sezilarli yutuqlarga erishilgan. Yaqin vaqtgacha eng yaxshi kvadratura formulalari bo'yicha tadqiqotlarda ko'rib chiqilayotgan formulalar bilan bog'liq bo'lgan maxsus turdagi splayn funksiyalarini o'rganishga asoslangan edi [2-5]. Ushbu tadqiqot usullarini $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ fazolarining ko'p o'lchovli analoglari bo'lgan $W_2^{(m)}(T_1)$ dagi kubatura formulalarini o'rganishda hali samarali qo'llash mumkin emas.

Maqolada Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar qaralgan va optimal koeffitsiyentlar topilgan.

Kalit so'zlar: kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funksiya.

CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL WEIGHTED QUADRATURE FORMULA OF HERMITIAN TYPE IN THE SPACE OF PERIODIC SOBOLEV FUNCTIONS $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Abstract. The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the error functional of the formula on selected normalized spaces. When studying the best formulas for approximate integration, the question first arises about the existence of such formulas. This issue has been studied very fully, although it is quite complex, as evidenced, for example, by article [1], where significant progress has been made in solving it. Until recently, research into the best

quadrature formulas was based on the study of spline functions of a special type (monosplines) associated with the formulas under consideration [2-5]. These research methods cannot yet be effectively applied in the study of cubature formulas in $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, which are multidimensional analogues of the spaces of $W_2^{(m)}(T_1)$.

The paper examines weighted quadrature formulas of Hermite type and finds the optimal coefficients.

Keywords: cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, norm, extremal function.

Введение.

Многие работы, например [1-15] посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не только значения функции $f(x)$ в точках x на T_1 , но и значения её производных некоторых порядков, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае в случае использования только значений функций.

В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита:

$$\int_{T_1} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha c_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x^{(\lambda)}), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = P(x) \varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \delta^{(\alpha)}(x - x^{(\lambda)}) \tag{2}$$

в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы, $p(x)$ -весовая функция и α - порядок производных, $\varepsilon_{T_1}(x)$ - характеристическая функция T_1 , а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Определение1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщённые производные порядка m , суммируемые с квадратом в норме [4]:

$$\|f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2, \tag{3}$$

где \hat{f}_k - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$.

Постановка задачи.

Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\| = \inf_{c_\lambda^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|}, \tag{4}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти такие значения $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная квадратурная формула, и приведена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряжённом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$. А также для функционал погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ получена оценка сверху, и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при $m = 2(\alpha = 0, 1)$.

Отметим, что задача 1 решена в работе [5] и задача 2 решена при $\alpha = 0$ в работе [13].

Оптимальная квадратурная в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

В этой работе займёмся минимизацией нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1).

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{K^{2m}}, \quad (5)$$

где $c_\lambda^{(\alpha)}$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) и \hat{P}_k - коэффициенты Фурье функции $P(x)$.

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, при $m = 2(\alpha = 0, 1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$, $\lambda = 1, 2, \dots, N$

и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{\circ}{c}$ и $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \overset{\circ}{c}^{(1)}$,

которые выражаются формулой:

$$\overset{\circ}{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{c}^{(1)} = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть в равенстве (5) $m = 2$, тогда $\alpha = \overline{0, 1}$ и в этом случае (5) принимает следующий вид:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \quad (7)$$

Теперь произведём некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (7).

Пусть $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \neq 0$, тогда умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину

$$\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda = \sum_{\beta=1}^N c_\beta \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} = \sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \quad \text{получаем:}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \left| \frac{\hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{k^4} \right|^2 = \\
 & = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \left| \frac{\hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)}}}{k^4} \right|^2 = \\
 & = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \left| \frac{\hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{k^4} \right|^2, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$c'_\lambda = \frac{c_\lambda}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta} \quad \text{и} \quad c'^{(1)}_\lambda = \frac{c_\lambda^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)}} \quad (9)$$

$$\text{Очевидно, что} \quad \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_\lambda = 1 \quad (10)$$

Учитывая (9) и (10), равенство (8) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left(\hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right)^2 + \\
 & \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \left| \frac{\hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{k^4} \right|^2. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0 - 2\hat{P}_0 \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda + \left(\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right)^2 \right] + \\
 & \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \left[\frac{\left[\hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2}{k^4} + \left[(2\pi) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2 \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda = x_1$ и $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} = x_2$, после некоторых упрощений равенство (2)

перепишем полинома второй степени по x_1 и x_2 .

$$\begin{aligned}
 & \left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - + \\
 & - \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{2\hat{P}_k x_1 \left| \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Имея в виду условия (10) в равенстве (13) и используя результаты работы [6], получим:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2\hat{P}_k x_1 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (14)$$

Здесь мы учитывали, что суммы

$$\sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2}$$

достигают своего наименьшего значения, равного соответственно:

$$\frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2},$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты c_{λ} , также $c_{\lambda}^{(1)}$ равны между собой, т.е.

$$c_{\lambda} = \frac{1}{N}, \quad c_{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}, \quad \lambda = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Правую часть (14) будем рассматривать как функцию от x_1, x_2 и обозначим её через $y(x_1, x_2)$ т.е.

$$y(x_1, x_2) = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2x_1 \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (16)$$

Тогда из необходимого условия экстремума после некоторых упрощений из (16) получим систему уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 .

$$\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right) x_1 = \hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}$$

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right) x_2 = 0 \quad (17)$$

Решая систему (17) и введя некоторые преобразования, последовательно находим x_1 и x_2 , т.е.

$$x_1 = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \quad \text{и} \quad x_2 = 0. \quad (18)$$

Пусть $c_{\lambda} = \frac{1}{N}$ и $c_{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{N}$, $\lambda = \overline{1, N}$

тогда из (6) и (15) следует, что

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = \dot{c} \quad \text{и} \quad c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \dot{c}^{(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} = N\dot{c} \quad \text{и} \quad x_2 = \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} = N\dot{c}^{(1)}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е.

$$\dot{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \hat{P}_k}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \quad \text{и} \quad (20)$$

$$\dot{c}^{(1)} = 0, \quad (21)$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании этой теоремы 1 функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет оценку:

$$\begin{aligned} |\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle| \leq & \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 \left| 2\pi i k \right|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left| 1 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вывод.

Качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, которая определяется формулой $\| \ell^N / B^* \| = \sup_{f \in B} \frac{|\langle \ell^N, f \rangle|}{\| f / B \|}$. Она является функцией неизвестных

коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача на исследование функции многих переменных на экстремум.

Значения C_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют оптимальную формулу. Таким образом, оптимальной квадратурной формулой мы будем считать такую, в которой при заданном числе узлов N функционал погрешности имеет наименьшую норму.

Для практики нужно решение следующих задач:

1. Вычисление нормы функционала погрешности квадратурных формул над пространством B .
2. Построение оптимальной квадратурной формулы, т.е. квадратурной формулы с наименьшей нормой функционала погрешности над B .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шадиметов Х.М. Решётчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.
2. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. матем. заметки. 1969, 6. Вып. 4, с. 475 – 480.
3. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М. Наука, 1979, 256 с.
4. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.
5. Жалолов Ф. И. О норме функционала погрешности квадратурных формул общего вида над пространством С. Л. Соболева. УЗМЖ. Ташкент, 2010 №1. с. 46-52.
6. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977, 41, №5, с.1110 – 1124.
7. Хаитов Т.И. Некоторые теоремы теории периодических кубатурных формул с заданием производных. ДАН ТаджССР, 1975, т. XVIII, 1.
8. Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, 5.
9. Шайнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой зависящей и ее производных, Диссертация доктора физ.- мат. наук. Новосибирск.

10. Hayotov A.R., Boboev S.S. *Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.*
11. Khayatov Kh.U. *Algorithm for finding the norm of the error functional of Hermite-type interpolation formulas in the Sobolev space of periodic functions AIP Conference Proceedings 2781, 020063 (2023) <https://doi.org/10.1063/5.0144842>*
12. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И., *Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $W_2^{(m)}(T_1)$. Докл. АН РУз. - Ташкент, 2011,-1.*
13. Jalolov O.I. *Weighted optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space $L_P(m)(Kn)$. AIP Conference Proceedings 2781, 020066 (2023) <https://doi.org/10.1063/5.0144837>*
14. Жалолов О.И., Хаятов Х.У. *Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики № 1(46) 2023.*
15. Хаятов Х.У. *Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики №3/1(50) 2023.*