BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

10/2023

https://buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
10/2023

E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 10, noyabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023 yil 29 avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.518.644

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Хаятов Хуршиджон Усманович,
преподаватель кафедры Прикладная математика
и технологии программирования,
Бухарский государственный университет,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан
wera00@mail.ru, x.u.xayatov@buxdu.uz

Аннотация. *Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах. При исследовании наилучших формул приближённого интегрирования, в первую очередь, возникает вопрос о существовании таких формул. Этот вопрос исследован весьма полно, хотя и является достаточно сложным, о чём свидетельствует, например, статья [1], где было достигнуто существенное продвижение в его решении. До последнего времени исследования наилучших квадратурных формул основывались на изучении сплай-функций специального вида (моносплайнов), связанных с рассматриваемыми формулами [2-5]. Эти методы исследований пока не удаётся эффективно применить при исследовании кубатурных формул в* $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$*, являющихся многомерными аналогами пространств* $W_2^{(m)}(T_1)$.

В работе рассматриваются весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и найдены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита с использованием необходимого условия экстремума.

Ключевые слова: *кубатурная формула, функционал погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональная пространство, норма, экстремальная функция.*

SOBOLEV DAVRIY FUNKSIYALAR FAZOSIDA $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL VAZNLI KVADRATUR FORMULANI QURISH

Annotatsiya. *Integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini optimallashtirish muammosi berilgan normallashtirilgan fazolarda formulaning xatolik funksionali normasini minimallashtirishdan iborat. Integrallarni taqribiy hisoblash formulalari uchun eng yaxshi formulalarni o'rganishda birinchi navbatda bunday formulalarning mavjudligi haqida savol tug'iladi. Bu masala juda ko'p o'rganilgan, garchi u juda murakkab bo'lsa-da, masalan, [1] maqolada uni hal qilishda sezilarli yutuqlarga erishilgan. Yaqin vaqtgacha eng yaxshi kvadratura formulalari bo'yicha tadqiqotlarda ko'rib chiqilayotgan formulalar bilan bog'liq bo'lgan maxsus turdagi splayn funksiyalarini o'rganishga asoslangan edi [2-5]. Ushbu tadqiqot usullarini* $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ *fazolarining ko'p o'lchovli analoglari bo'lgan* $W_2^{(m)}(T_1)$ *dagi kubatura formulalarini o'rganishda hali samarali qo'llash mumkin emas.*

Maqolada Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar qaralgan va optimal koeffitsiyentlar topilgan.

Kalit so'zlar: *kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funksiya.*

CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL WEIGHTED QUADRATURE FORMULA OF HERMITIAN TYPE IN THE SPACE OF PERIODIC SOBOLEV FUNCTIONS $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Abstract. *The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the error functional of the formula on selected normalized spaces. When studying the best formulas for approximate integration, the question first arises about the existence of such formulas. This issue has been studied very fully, although it is quite complex, as evidenced, for example, by article [1], where significant progress has been made in solving it. Until recently, research into the best*

quadrature formulas was based on the study of spline functions of a special type (monosplines) associated with the formulas under consideration [2-5]. These research methods cannot yet be effectively applied in the study of cubature formulas in $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$*, which are multidimensional analogues of the spaces of* $W_2^{(m)}(T_1)$.

The paper examines weighted quadrature formulas of Hermite type and finds the optimal coefficients.

Keywords: *cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, norm, extremal function.*

Введение.

Многие работы, например [1-15] посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не только значения функции $f(x)$ в точках x на T_1, но и значения её производных некоторых порядков, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае в случае использования только значений функций.

В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита:

$$\int_{T_1} P(x)\, f(x)\,dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha} c_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = P(x)\varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_{\lambda}^{\alpha}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right) \tag{2}$$

в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно $c_{\lambda}^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)\in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы , $p(x)$-весовая функция и α - порядок производных, $\varepsilon_{T_1}(x)$– характеристическая функция T_1, а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Определение1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме [4]:

$$\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)\,dx \right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2, \tag{3}$$

где $\hat{f}_k$ - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi i k x}dx$.

Постановка задачи.

Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\| = \inf_{c_{\lambda}^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\|\neq 0} \frac{\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right|}{\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|}, \tag{4}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти такие значения $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная квадратурная формула, и приведена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряжённом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$. А также для функционал погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ получена оценка сверху, и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при $m=2(\alpha=0,1)$.

Отметим, что задача 1 решена в работе [5] и задача 2 решена при $\alpha=0$ в работе [13].

Оптимальная квадратурная в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

В этой работе займёмся минимизацией нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1).

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left|\hat{P}_0-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\alpha=0}^{m-1}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{\alpha}(2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{K^{2m}}, \tag{5}$$

где $c_\lambda^{(\alpha)}$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) и $\hat{P}_k$-коэффициенты Фурье функции $P(x)$.

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, при $m=2(\alpha=0,1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)}=\dfrac{\lambda}{N}$, $\lambda=1,2,\dots,N$ и равные коэффициенты $c_1=c_2=\dots=c_N=\overset{o}{c}$ и $c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=\dots=c_N^{(1)}=\dot{c}^{(1)}$,

которые выражаются формулой:

$$\dot{c}=\frac{\hat{P}_0+\dfrac{1}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{N^4}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{\hat{P}_k}{k^4}}{N\left(1+\dfrac{1}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{N^4}\sum\limits_{k\neq o}\dfrac{1}{k^4}\right)}\quad \text{и}\quad \dot{c}^{(1)}=0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть в равенстве (5) $m=2$, тогда $\alpha=\overline{0,1}$ и в этом случае (5) принимает следующий вид:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left|\hat{P}_o-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi ix^{(\lambda)}}-(2\pi i)\ k\ \sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}e^{2\pi ix^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4} \tag{7}$$

Теперь произведём некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (7).

Пусть $\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\neq 0$, тогда умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину $\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=\sum\limits_{\beta=1}^{N}c_\beta$ и $\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=\sum\limits_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}$ получаем:

$$\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}=$$

$$=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{c_\lambda^{(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}}\right|^2}{k^4}=$$

$$=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4},\qquad(8)$$

где

$$c_\lambda'=\frac{c_\lambda}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta}\qquad \text{и}\qquad c_\lambda'^{(1)}=\frac{c_\lambda^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}}\qquad(9)$$

Очевидно, что $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'}=1$ и $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)'}=1$ (10)

Учитывая (9) и (10), равенство (8) перепишем в виде:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}.\qquad(11)$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left[\hat{P}_0-2\hat{P}_0\sum_{\lambda=1}^{N}\ c_\lambda+\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left[\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right]^2+\left[(2\pi)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right]^2}{k^4}.\qquad(12)$$

Вводя обозначение $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=x_1$ и $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=x_2$,после некоторых упрощений равенство (2) перепишем полинома второй степени по x_1 и x_2.

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left[\hat{P}_0^{\,2}-2\hat{P}_0x_1+x_1^2\right]+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k^{\,2}}{k^4}-+$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{2\hat{P}_kx_1\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{'(1)}e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}.\qquad(13)$$

Имея в виду условия (10) в равенстве (13) и используя результаты работы [6], получим:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^{\,2} - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] +$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k^{\,2}}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}2\hat{P}_k x_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}. \qquad (14)$$

Здесь мы учитывали, что суммы

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda' e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda'^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}$$

достигают своего наименьшего значения, равного соответственно:

$$\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2},$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты c_λ', также $c_\lambda'^{(1)}$ равны между собой, т.е.

$$c_\lambda' = \frac{1}{N}, \; c_\lambda'^{(1)} = \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}, \lambda = \overline{1, N}. \qquad (15)$$

Правую часть (14) будем рассматривать как функцию от x_1, x_2 и обозначим её через $y(x_1, x_2)$ т.е.

$$y(x_1,x_2) = \left[\hat{P}_0^{\,2} - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}2x_1\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}. \qquad (16)$$

Тогда из необходимого условия экстремума после некоторых упрощений из (16) получим систему уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2.

$$\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)x_1 = \hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}$$

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^2}\right)x_2 = 0 \qquad (17)$$

Решая систему (17) и введя некоторые преобразования, последовательно находим x_1 и x_2, т.е.

$$x_1 = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}}{\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)}, \quad \text{и} \quad x_2 = 0. \qquad (18)$$

Пусть $c_\lambda' = \dfrac{1}{N}$ и $c_\lambda'^{(1)} = \dfrac{1}{N}$, $\lambda = \overline{1, N}$

тогда из (6) и (15) следует, что

$c_1 = c_2 = \ldots = c_N = \dot{c}$ и $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \ldots = c_N^{(1)} = \dot{c}^{(1)}$.

Отсюда следует, что

$$x_1 = \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda = N\dot{c} \quad \text{и} \quad x_2 = \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} = N\dot{c}^{(1)}. \qquad (19)$$

Подставляя (18) в (19), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е.

$$\dot{c}=\frac{\hat{P}_0+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)} \quad \text{и} \tag{20}$$

$$\dot{c}^{(1)}=0, \tag{21}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании этой теоремы 1 функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет оценку:

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f>\right|\leq\left\{\left|\hat{f}_0\right|^2+\sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|^2\left|2\pi ik\right|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left|1-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(\alpha)}(2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Вывод.

Качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, которая определяется формулой $\left\|\ell^N/B^*\right\|=\sup_{f\in B}\frac{\left|<\ell^N, f>\right|}{\|f/B\|}$. Она является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача на исследование функции многих переменных на экстремум.

Значения C_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют оптимальную формулу. Таким образом, оптимальной квадратурной формулой мы будем считать такую, в которой при заданном числе узлов N функционал погрешности имеет наименьшую норму.

Для практики нужно решение следующих задач:

1. Вычисление нормы функционала погрешности квадратурных формул над пространством *B*.
2. Построение оптимальной квадратурной формулы, т.е. квадратурной формулы с наименьшей нормой функционала погрешности над *B*.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шадиметов Х.М. Решётчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.

2.Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. матем. заметки. 1969, 6. Вып. 4, с. 475 – 480.

3.Никольский С.М. Квадратурные формулы. М. Наука, 1979, 256 с.

4. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.

5. Жалолов Ф. И. О норме функционала погрешности квадратурных формул общего вида над пространством С. Л. Соболева. УЗМЖ. Ташкент, 2010 №1. с. 46-52.

6. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977, 41, №5, с.1110 – 1124.

7. Хаитов Т.И. Некоторые теоремы теории периодеческих кубатурных формул с заданием производных. ДАН ТаджССР, 1975, т. XVIII, 1.

8. Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, 5.

9. Шайнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой зависящей и ее производных, Диссертация доктора физ.- мат. наук. Новосибирск.

10. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature f0rmulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.

11. Khayatov Kh.U. Algorithm for finding the norm of the error functional of Hermite-type interpolation formulas in the Sobolev space of periodic functions AIP Conference Proceedings 2781, 020063 (2023) https://doi.org/10.1063/5.0144842

12. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И., Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $W_2^{(m)}\left(T_1\right)$*. Докл. АН РУз. - Ташкент, 2011,-1.*

13. Jalolov O.I. Weighted optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space L_P(m)(Kn). AIP Conference Proceedings 2781, 020066 (2023) https://doi.org/10.1063/5.0144837

14. Жалолов О.И., Хаятов Х.У. Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики № 1(46) 2023.

15. Хаятов Х.У. Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики №3/1(50) 2023.