ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2020-yil, iyun)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2020

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2020, Maxsus son

Jurnal Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari boʻyicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruriy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy
Elektron manzil: ped_mahorat@umail.uz

Jumayev Ulug'bek Sattorovich, psixologiya fanlari nomzodi, dotsent

PEDAGOGIK MAHORAT*ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО*PEDAGOGICAL SKILL

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО
Научно-теоретический и методический журнал

2020, специальный выпуск

Журнал включен в список обязательных выпусков ВАК при Кабинете Министров Республики Узбекистан на основании Решении ВАК от 29 декабря 2016 года для получения учёной степени по **педагогике** и **психологии**.

Журнал основан в 2001г.
Журнал выходит 6 раза в год
Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.
Учредитель: Бухарский государственный университет
Адрес редакции: Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
e-mail: ped_mahorat@umail.uz

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ОБЩЕГО ВИДА НАД ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВОМ СОБОЛЕВА

Озоджон ЖАЛОЛОВ
Бухарский государственный университет
доцент кафедры
«Информационные технологии»

Хуршид ХАЯТОВ
Бухарский государственный университет
старший преподаватель кафедры
«Информационные технологии»

В работе пространстве $L_2^m(S)$ - функций заданных на сфере S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m вычислены нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы с производными. А также исследовано выражение нормы функционала погрешности для двухмерной единичной сфере.
Ключевые слова: *кубатурная формула, весовая кубатурная формула, обобщённая функция, функционалом погрешности.*

In the work in the space $L_2^m(S)$ of functions given on sphere S and possessing square integrable generalized derivatives of m-th order the norm of the error functional of weight cubature formulas with derivative is calculated. Furthermore, the expression of the norm of the error functional on two dimensional unique sphere is investigated.
Key words: *cubature formula, weight cubature formula, generalized function, functional errors.*

Пусть функции $f\left(\theta\right)$, заданные на единичной сфере S принадлежат некоторому банаховому пространству B, вложенному в пространство $C\left(S\right)$ непрерывных функций на S. Функции $f\left(\theta\right)$ $\in B$ продолжим на все пространство R^n, считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы S и будем обозначать через $\overline{f}\left(x\right)$.

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int\limits_S P(\theta)\, f(\theta) \alpha\theta \approx \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

на функциях из B:

$$\ell_N^{(\alpha)}[f] = <\ell_N^{(\alpha)}, f> = \int\limits_S P(\theta)\, f(\theta) \alpha\theta - \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(\theta^{\lambda}\right) = \int\limits_{R^n} \ell_N^{(\alpha)} f(x) dx, \tag{2}$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \delta_S(1-r)\, p(x) - \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}\left(x - \theta^{(\lambda)}\right),$$

$\delta_S\left(1-r\right)$, $\delta\left(x-\theta^{(\lambda)}\right)$ - дельта функции Дирака, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$,

$\sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \hat{P}_{0,0}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и $P\left(\theta\right) \in L\left(S\right), 0 \le t \le m$, $P_{0,0}$- нулевой коэффициент Фурье $P(\theta)$.

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданном на B в силу предположения вложенности $B \to C\left(S\right)$ [1], этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ будет непрерывным. Поэтому он и его норма определяется по формуле [3]

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| = \sup_{f \in B, f \neq 0} \frac{\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right|}{\| f \mid B \|}.$$

Функция $f_0 \in B,$ для которой имеется место равенство

$$\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| \cdot \| f_0 \mid B \|,$$

называется *экстремальной функцией*.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства B, равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или что тоже самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B возьмём пространство $L_2^m(S)$ - функций заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщёнными производными порядка m, норма которых определяется равенством

$$\left\| f(\theta) \mid L_2^m(S) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \tag{3}$$

и предположим, что $2m > n$. Справедлива следующая

Теорема. *Норма функционала погрешности* $\ell_N^{(\alpha)}$ *кубатурной формулы (1) над пространством* $L_2^{m*}(S)$ *равна*

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{P}_{k.\ell} - \sum_{|\alpha| \le t} \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2}, \text{ где } \hat{P}_{k,\ell} = \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta.$$

Доказательство. Известно [4], что если $f(\theta) \in L_2^m(S)$, то для абсолютной и равномерной сходимости ряда $f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta)$, где $Y_k(\theta)$ - сферические гармоники порядка k, достаточно выполнение условия $2m > n$.

Таким образом, функция $f(\theta) \in L_2^m$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \tag{4}$$

где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ, $a_{k,\ell}$ - коэффициенты Фурье, т.е. $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) \alpha\theta$ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник, т.е. $\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2)$.

Подставляя (4) в левую часть (2), находим

$$< \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) =< P(\theta) - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) >=$$

$$=< P(\theta), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) > - < \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le t} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) >=$$

$$=\int_S P(\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)d\theta - < \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta) >=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} ak,\ell\int_S P(\theta)Y_{k,\ell}(\theta)d\theta - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n.k)} a_{k,\ell}\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} < \delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), Y_{k,\ell}(\theta) >=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}\left[\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le t} c_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right], \tag{5}$$

Если в правой части (5) $a_{k,\ell}$ помножить на $k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}$, а кубатурную сумму поделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то имея ввиду равенство (3), получим

$$\left|< \ell_N^{(\alpha)}, f >\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}k^m(k+n-2)^m \cdot$$

$$\cdot\left[\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]\Big/ k^m(k+n-2)^m \le$$

$$\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m(k+n-2)^m\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\left\| f(\theta) \mid L_2^m(S)\right\| \cdot \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{m*}(S)\right\| \le \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{P}_{k,\ell}\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

Для того чтобы получить равенство в (7) рассмотрим функцию

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta), \tag{8}$$

где

$$b_{k,\ell}=\frac{\hat{P}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}c_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{m}\left(n+k-2\right)^{2}}, \tag{9}$$

Так как для сферических функций имеет место оценка [4]

$$\max\left|Y_K\left(\theta\right)\right|\le C\left(n\right)k^{-m+\frac{n}{2}-1}\left\| f\left(\theta\right)|\,L_2^m(S)\right\|,$$

то из определения (9) коэффициентов ряда (8) вытекает, что $U\left(\theta\right)\in L_2^m\left(S\right)$.

Вычислив погрешность (5) кубатурной формулы для этой функции будем иметь следующее равенство:

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)},U>\right|=\left|<P\left(\theta\right)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}c_{\lambda}^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\hat{P}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}}Y_{k,\ell}\left(\theta\right)>\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\hat{P}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}}\cdot\left[<P\left(\theta\right),Y_{k,\ell}\left(\theta\right)>-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}<\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),Y_{k,\ell}\left(\theta\right)>\right]\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\hat{\hat{P}}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{2}}\cdot\left[\int_S P\left(\theta\right)Y_{k,\ell}\left(\theta\right)d\theta-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\hat{P}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^{2}}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}}\right|=\left\|U\left(\theta\right)/L_2^m\left(S\right)\right\|^{2}, \tag{10}$$

Сопоставляя (7) и (10) находим, что

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}\,|\,L_2^{m*}(S)\right\|=\left\|U\left(\theta\right)|\,L_2^m(S)\right\|,$$

где $U\left(\theta\right)$ является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е. $U\left(\theta\right)$ является функцией Рисса для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}\left(\theta\right)$, что и требовалось доказать.

Отметим что, в работе [4] эта задача решена при $t=0$.

На основании этой теоремы, функционал погрешности кубатурной формулы (1) для функций класса $L_2^m\left(S\right)$ имеет оценку:

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}(\theta),f\left(\theta\right)>\right|\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\hat{P}_{k,\ell}-\sum\limits_{|\alpha|\le t}\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^{2}}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}^{2}k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В связи с тем, что нахождение оптимальных или близких к ним к.ф. над пространством $L_2^m\left(S^{n-1}\right)$ довольно сложно из-за повышения размерности пространства, мы будем рассматривать случай $n+1=3$, т.е. формулы вида

$$\int_o^{2\pi}\int_o^{\pi} f\left(\theta,\varphi\right)\sin\theta d\theta d\varphi \approx \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda f\left(\theta^{(\lambda)},\varphi^{(\lambda)}\right)$$

В этом случае норма функционала погрешности приобретает вид

$$\left\|\ell_N \mid L_2^{m*}(S^2)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=-k}^{k}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|\ell|!)}{k+|\ell|!}} e^{i\ell\varphi^{(\lambda)}} P_k^{(\ell)}\left(\cos\theta^{(\lambda)}\right)\right)^{1/2}}{k^m(k+1)^m}$$

Экстремальная функция функционала погрешности имеет вид

$$\psi_\ell\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{\ell=-k} Y_{k,\ell}\left(\theta'_\lambda,\varphi'_\lambda\right)}{k^m(k+1)^m} Y_{k,\ell}\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)P_k\left(\cos\gamma^{(\lambda)}\right)}{k^m(k+1)^m},$$

где $\cos\gamma^{(\lambda)}=\cos\theta\cos\theta'_\lambda+\sin\theta\sin\theta'_\lambda e^{i(\varphi-\varphi'_\lambda)}$, γ - расстояние между двумя точками на сфере, т.е. длина дуги большой окружности, соединяющая эти точки и $0\le\gamma\le\pi$

$$\psi_\ell\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda G_m\left(\theta,\varphi,\theta'_2,\varphi'_2\right),$$

где

$$G_m\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{\ell=-k}^{k} Y_{k,\ell}\left(\theta',\varphi'\right)}{k^m(k+1)^m} Y_{k,\ell}\left(\theta,\varphi\right) \tag{11}$$

Если применять оператор Бельтрами $\Delta^*\left(\theta,\varphi\right)$ в (11) $m-1$ раз в функции $G_m\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)$ [6], то получим

$$\Delta^{*(m-1)}\left(\theta,\varphi\right)G_m\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{\ell=-k}^{k} Y_{k,\ell}\left(\theta',\varphi'\right)}{k(k+1)} Y_{k,\ell}\left(\theta,\varphi\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)P_k\left(\cos\gamma\right)}{k(k+1)}=G\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)\cdot\left\|G\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)\mid L_2(S)\right\|=\int_S\left|G\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)\right|^2 dS=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|G\left(\theta,\varphi,\theta',\varphi'\right)\right|^2\sin\theta d\theta d\varphi=\int_S\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{\ell=-k}^{k} Y_{k,\ell}\left(\theta',\varphi'\right)}{k(k+1)} Y_{k,\ell}\left(\theta,\varphi\right)\right|^2 dS=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{\ell=-k}^{k}\left|Y_{k,\ell}\left(\theta',\varphi'\right)\right|^2}{k^2(k+1)^2}\le c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{k^2(k+1)^2}\le c'\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}<\infty\cdot$$

Здесь мы использовали оценку $\left|Y_{k,\ell}\left(\theta,\varphi\right)\right|\le ck^{\frac{1}{2}}$

Отсюда следует, что $G\left(\theta,\varphi\right)\in L_2\left(S^2\right)$.

Список литературы

1. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
2. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
3. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
4. Жалолов О.И., Г.А.Акмалова. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева // «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ». Материалы IX Международной научно-практической конференции. -Том 1. 11 марта 2015 г., -Россия, г. -Санкт-Петербург. -182-191ст.
5. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
6. Жалолов О.И, И.Ф. Жалолов. Об одной асимптотической оптимальной кубатурной формуле // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г.Казань. -№ 10 (114) . Май, -2016 г.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г. Казань. -№ 13 (117) . -Июль, -2016 г.
9. Жалолов О.И., Абдуллаев Б.Р. Построение оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве периодических функций С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$. // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
10. Жалолов О.И., Боборахимова М. И. Алгоритм построения дискретного аналога одного оператора $D_4[\beta]$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
11. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.
12. Жалолов О.И. О существовании наилучших кубатурных формул общего вида над пространством С.Л.Соболева // Universum:технические науки: электрон. научн. журн. 2020. № 11(80).
13. OI Jalolov, KU Khayatov. Top evaluation for the rate of functional of error weight cubature formula in space // Scientific reports of Bukhara State University. 2020. №3(4),.32-37p
14. Жалолов О.И. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С.Л.Соболева // Сибирский федеральный университет. 2011г.
15. З.Ш. Жумаев, О.И. Жалолов. Анализ алгебраических моделей коэффициента турбулентной вязкости при исследовании круглых турбулентных струй реагирующих газов // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан.2003г. 11-14ст.

16. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.
17. Хаятов Х.У, Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.
18. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.
19. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространств // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.
20. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одном погрешности весовых кубатурных формул в Пространстве $\tilde{C}^{(m)}T_n$ // Сибирский федеральный университет. — 2011.
21. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.
22. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.