

# **PEDAGOGIK MAHORAT**

**Ilmiy-nazariy va metodik jurnal**

**MAXSUS SON  
(2020-yil, iyun)**

**Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan**

**Buxoro – 2020**

## **PEDAGOGIK MAHORAT**

### **Ilmiy-nazariy va metodik jurnal 2020, Maxsus son**

Jurnal O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrda qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo'yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

#### **Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy  
Elektron manzil: ped\_mahorat@umail.uz

#### **TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Adizov Baxtiyor Rahmonovich – pedagogika fanlari doktori, professor

**Bosh muharrir o'rinbosari:** Navro'z-zoda Baxtiyor Negmatovich – iqtisod fanlari doktori, professor

**Mas'ul kotib: Hamroyev Alijon Ro'ziqulovich** – pedagogika fanlari nomzodi, dotsent

*Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisod fanlari doktori*

*Begimqulov Uzoqboy Shoyimqulovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Mahmudov Mels Hasanovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Ibragimov Xolboy Ibragimovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Choriyev Abdushukur Choriyevich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Yanakiyeva Yelka Kirilova, pedagogika fanlari doktori, professor (N. Rilski nomidagi Janubiy-G'arbiy Universitet, Bolgariya)*

*Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Mahmudova Muyassar, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor*

*Jabborov Azim Meyliqulovich, psixologiya fanlari doktori, professor*

*Sunnatova Ra'no Izzatovna, psixologiya fanlari doktori, professor*

*Kozlov Vladimir Vasilyevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Yaroslavl davlat universiteti, Rossiya)*

*Morogin Vladimir Grigoryevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Xakassiya davlat universiteti, Rossiya)*

*Belobrikina Olga Alfonsasovna, psixologiya fanlari nomzodi, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti, Rossiya)*

*Chudakova Vera Petrovna, psixologiya fanlari nomzodi (Ukraina pedagogika fanlari milliy akademiyasi, Ukraina)*

*Tadjixodjayev Zokirxo'ja Abdusattorovich, texnika fanlari doktori, professor*

*Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor*

*O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor*

*Axmedova Shoiri Ne'matovna, filologiya fanlari doktori, professor*

*Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor*

*Hayitov Shodmon Axmadovich, tarix fanlari doktori, professor*

*To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor*

*Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor*

*Mahmudov Nosir Mahmudovich, iqtisod fanlari doktori, professor*

*Bo'taboyev Muhammadjon To'ychiyevich, iqtisod fanlari doktori, professor*

*Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor*

*Olimov Shirinboy Sharopovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Qahhorov Otabek Siddiqovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent*

*Qosimov Fayzullo Muhammedovich, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent*

**PEDAGOGIK MAHORAT\*ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО\*PEDAGOGICAL SKILL**

**ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО**  
**Научно-теоретический и методический журнал**

**2020, специальный выпуск**

Журнал включен в список обязательных выпусков ВАК при Кабинете Министров Республики Узбекистан на основании Решении ВАК от 29 декабря 2016 года для получения учёной степени по **педагогике и психологии**.

Журнал основан в 2001г.

Журнал выходит 6 раз в год

Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.

**Учредитель:** Бухарский государственный университет

**Адрес редакции:** Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

e-mail: ped\_mahorat@umail.uz

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**Главный редактор:** Адизов Бахтиёр Рахманович – доктор педагогических наук, профессор

**Заместитель главного редактора:** Навруз-заде Бахтиёр Нигматович – доктор экономических наук, профессор

**Ответственный редактор:** Хамраев Алижон Рузикулович – кандидат педагогических наук, доцент

*Хамидов Обиджон Хафизович, доктор экономических наук*

*Бегимкулов Узакбай Шаимкулович, доктор педагогических наук, профессор*

*Махмудов Мэлс Хасанович, доктор педагогических наук, профессор*

*Ибрагимов Холбой Ибрагимович, доктор педагогических наук, профессор*

*Чориев Абдушуккур Чориевич, доктор педагогических наук, профессор*

*Янакиева Елка Кирилова, доктор педагогических наук, профессор (Болгария)*

*Каххаров Сиддик Каххарович, доктор педагогических наук, профессор*

*Махмудова Муяссар, доктор педагогических наук, профессор*

*Баратов Шариф Рамазанович, доктор психологических наук, профессор*

*Джаббаров Азим Мейликулович, доктор психологических наук, профессор*

*Суннатова Рано Иззатовна, доктор психологических наук, профессор*

*Козлов Владимир Васильевич, доктор психологических наук, профессор (Ярославль, Россия)*

*Морогин Владимир Григорьевич, доктор психологических наук, профессор (Абакан, Россия)*

*Белобрыкина Ольга Альфонсасовна, кандидат психологических наук, профессор (Новосибирск, Россия)*

*Чудакова Вера Петровна, PhD (Психология) (Киев, Украина)*

*Таджиходжаев Закирходжа Абдусаттарович, доктор технических наук, профессор*

*Аманов Мухтор Рахматович, доктор технических наук, профессор*

*Ураева Дармоний Саиджановна, доктор филологических наук, профессор*

*Ахмедова Шоира Негматовна, доктор филологических наук, профессор*

*Дурдыев Дурдымурад Каландарович, доктор физико-математических наук, профессор*

*Хаитов Шадман Ахмадович, доктор исторических наук, профессор*

*Тураев Халим Хаджиевич, доктор исторических наук, профессор*

*Мирзаев Шавкат Мустакимович, доктор физико-математических наук, профессор*

*Махмудов Насыр Махмудович, доктор экономических наук, профессор*

*Бутабоев Мухаммадjon Туйчиевич, доктор экономических наук, профессор*

*Буриев Сулаймон Буриевич, доктор биологических наук, профессор*

*Олимов Ширинбай Шаранович, доктор педагогических наук, профессор*

*Каххаров Отабек Сиддиқович, доктор философии по экономическим наукам (PhD), доцент*

*Касимов Файзулло Мухаммедович, кандидат педагогических наук, доцент*

*Жумаев Улугбек Саттарович, кандидат психологических наук, доцент*

# ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ОБЩЕГО ВИДА НАД ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВОМ СОБОЛЕВА

**Озоджон ЖАЛОЛОВ**

Бухарский государственный университет  
доцент кафедры  
«Информационные технологии»

**Хуршид ХАЯТОВ**

Бухарский государственный университет  
старший преподаватель кафедры  
«Информационные технологии»

*В работе пространстве  $L_2^m(S)$  - функций заданных на сфере  $S$  и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка  $m$  вычислены нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы с производными. А также исследовано выражение нормы функционала погрешности для двухмерной единичной сфере.*

**Ключевые слова:** кубатурная формула, весовая кубатурная формула, обобщенная функция, функционалом погрешности.

*In the work in the space  $L_2^m(S)$  of functions given on sphere  $S$  and possessing square integrable generalized derivatives of  $m$ -th order the norm of the error functional of weight cubature formulas with derivative is calculated. Furthermore, the expression of the norm of the error functional on two dimensional unique sphere is investigated.*

**Key words:** cubature formula, weight cubature formula, generalized function, functional errors.

Пусть функции  $f(\theta)$ , заданные на единичной сфере  $S$  принадлежат некоторому банаховому пространству  $B$ , вложенному в пространство  $C(S)$  непрерывных функций на  $S$ . Функции  $f(\theta) \in B$  продолжим на все пространство  $R^n$ , считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы  $S$  и будем обозначать через  $\bar{f}(x)$ .

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S P(\theta) f(\theta) \alpha \theta \approx \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}), \quad (1)$$

на функциях из  $B$ :

$$\ell_N^{(\alpha)}[f] = \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle = \int_S P(\theta) f(\theta) \alpha \theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell_N^{(\alpha)} f(x) dx, \quad (2)$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \delta_S(1-r) p(x) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - \theta^{(\lambda)}),$$

$\delta_S(1-r)$ ,  $\delta(x - \theta^{(\lambda)})$  - дельта функции Дирака,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ,

$$\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \hat{P}_{0,0}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{и} \quad P(\theta) \in L(S), 0 \leq t \leq m, P_{0,0}$$

нулевой коэффициент Фурье  $P(\theta)$ .

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданном на  $B$  в силу предположения вложенности  $B \rightarrow C(S)$  [1], этот функционал  $\ell_N^{(\alpha)}$  будет непрерывным. Поэтому он и его норма определяется по формуле [3]

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | B^* \right\| = \sup_{f \in B, f \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f | B\|}.$$

Функция  $f_0 \in B$ , для которой имеется место равенство

$$|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f_0 \rangle| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} | B^* \right\| \cdot \|f_0 | B\|,$$

называется *экстремальной функцией*.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства  $B$ , равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к  $B$  пространстве  $B^*$  или что тоже самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы. Для решения этой задачи в качестве  $B$  возьмём пространство  $L_2^m(S)$  - функций заданных на  $S$  и обладающих квадратично суммируемыми обобщёнными производными порядка  $m$ , норма которых определяется равенством

$$\|f(\theta) | L_2^m(S)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \quad (3)$$

и предположим, что  $2m > n$ . Справедлива следующая

**Теорема.** *Норма функционала погрешности  $\ell_N^{(\alpha)}$  кубатурной формулы (1) над пространством  $L_2^{m*}(S)$  равна*

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq \ell} \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2}, \quad \text{где } \hat{P}_{k,\ell} = \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta.$$

**Доказательство.** Известно [4], что если  $f(\theta) \in L_2^m(S)$ , то для абсолютной и равномерной

сходимости ряда  $f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta)$ , где  $Y_k(\theta)$  - сферические гармоники порядка  $k$ , достаточно выполнение условия  $2m > n$ .

Таким образом, функция  $f(\theta) \in L_2^m$  может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (4)$$

где  $Y_{k,\ell}(\theta)$  - сферические гармоники порядка  $k$  вида  $\ell$ ,  $a_{k,\ell}$  - коэффициенты Фурье, т.е.

$$a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) \alpha \theta \quad \text{и} \quad \sigma(n,k) - \text{число линейно независимых сферических}$$

гармоник, т.е.  $\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} (n+2k-2)$ .

Подставляя (4) в левую часть (2), находим

$$\begin{aligned}
& \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle = \langle P(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\
& = \langle P(\theta), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\
& = \int_S P(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right], \tag{5}
\end{aligned}$$

Если в правой части (5)  $a_{k,\ell}$  помножить на  $k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}$ , а кубатурную сумму поделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то имея ввиду равенство (3), получим

$$\begin{aligned}
& \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} k^m (k+n-2)^m \cdot \\
& \cdot \left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right] / k^m (k+n-2)^m \leq \\
& \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \|f(\theta) | L_2^m(S)\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}
\end{aligned}$$

Из (6) следует, что

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{m*}(S) \right\| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

Для того чтобы получить равенство в (7) рассмотрим функцию

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \tag{8}$$

где

$$b_{k,\ell} = \frac{\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^2}, \quad (9)$$

Так как для сферических функций имеет место оценка [4]

$$\max |Y_K(\theta)| \leq C(n) k^{-m + \frac{n-1}{2}} \|f(\theta) | L_2^m(S)\|,$$

то из определения (9) коэффициентов ряда (8) вытекает, что  $U(\theta) \in L_2^m(S)$ .

Вычислив погрешность (5) кубатурной формулы для этой функции будем иметь следующее равенство:

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, U \rangle \right| &= \left| \langle P(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[ \langle P(\theta), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^2} \cdot \left[ \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right| = \|U(\theta) / L_2^m(S)\|^2, \quad (10) \end{aligned}$$

Сопоставляя (7) и (10) находим, что

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{m*}(S) \right\| = \|U(\theta) | L_2^m(S)\|,$$

где  $U(\theta)$  является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е.  $U(\theta)$  является функцией Рисса для функционала погрешности  $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ , что и требовалось доказать.

Отметим что, в работе [4] эта задача решена при  $t = 0$ .

На основании этой теоремы, функционал погрешности кубатурной формулы (1) для функций класса  $L_2^m(S)$  имеет оценку:

$$\left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle \right| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \hat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В связи с тем, что нахождение оптимальных или близких к ним к.ф. над пространством  $L_2^m(S^{n-1})$  довольно сложно из-за повышения размерности пространства, мы будем рассматривать случай  $n+1=3$ , т.е. формулы вида

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \approx \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda f(\theta^{(\lambda)}, \varphi^{(\lambda)})$$

В этом случае норма функционала погрешности приобретает вид

$$\|\ell_N | L_2^{m*}(S^2)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k \frac{\left( \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|\ell|!)}{k+|\ell|!}} e^{i\ell\varphi^{(\lambda)}} P_k^{(\ell)}(\cos \theta^{(\lambda)}) \right)^{1/2}}{k^m (k+1)^m}$$

Экстремальная функция функционала погрешности имеет вид

$$\psi_\ell(\theta, \varphi) = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{\ell=-k}^k Y_{k,\ell}(\theta'_\lambda, \varphi'_\lambda)}{k^m (k+1)^m} Y_{k,\ell}(\theta, \varphi) = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1) P_k(\cos \gamma^{(\lambda)})}{k^m (k+1)^m},$$

где  $\cos \gamma^{(\lambda)} = \cos \theta \cos \theta'_\lambda + \sin \theta \sin \theta'_\lambda e^{i(\varphi - \varphi'_\lambda)}$ ,  $\gamma$  - расстояние между двумя точками на сфере, т.е. длина дуги большой окружности, соединяющая эти точки и  $0 \leq \gamma \leq \pi$

$$\psi_\ell(\theta, \varphi) = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda G_m(\theta, \varphi, \theta'_\lambda, \varphi'_\lambda),$$

где

$$G_m(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{\ell=-k}^k Y_{k,\ell}(\theta', \varphi')}{k^m (k+1)^m} Y_{k,\ell}(\theta, \varphi) \quad (11)$$

Если применять оператор Бельтрами  $\Delta^*(\theta, \varphi)$  в (11)  $m-1$  раз в функции

$G_m(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$  [6], то получим

$$\begin{aligned} \Delta^{*(m-1)}(\theta, \varphi) G_m(\theta, \varphi, \theta', \varphi') &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{\ell=-k}^k Y_{k,\ell}(\theta', \varphi')}{k(k+1)} Y_{k,\ell}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1) P_k(\cos \gamma)}{k(k+1)} = G(\theta, \varphi, \theta', \varphi') \cdot \|G(\theta, \varphi, \theta', \varphi') | L_2(S)\| = \int_S |G(\theta, \varphi, \theta', \varphi')|^2 dS = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |G(\theta, \varphi, \theta', \varphi')|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_S \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{\ell=-k}^k Y_{k,\ell}(\theta', \varphi')}{k(k+1)} Y_{k,\ell}(\theta, \varphi) \right|^2 dS = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{\ell=-k}^k |Y_{k,\ell}(\theta', \varphi')|^2}{k^2 (k+1)^2} \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{k^2 (k+1)^2} \leq c' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \infty. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали оценку  $|Y_{k,\ell}(\theta, \varphi)| \leq ck^{\frac{1}{2}}$

Отсюда следует, что  $G(\theta, \varphi) \in L_2(S^2)$ .



## Список литературы

1. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
2. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве  $\bar{L}_2^m(K_n)$  // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
3. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ . Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
4. Жалолов О.И., Г.А.Акмалова. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева // «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ». Материалы IX Международной научно-практической конференции. -Том 1. 11 марта 2015 г., -Россия, г. -Санкт-Петербург. -182-191ст.
5. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
6. Жалолов О.И, И.Ф. Жалолов. Об одной асимптотической оптимальной кубатурной формуле // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г.Казань. -№ 10 (114) . Май, -2016 г.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве  $L_p^{(m)}(K_n)$  // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г. Казань. -№ 13 (117) . -Июль, -2016 г.
9. Жалолов О.И., Абдуллаев Б.Р. Построение оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве периодических функций С.Л.Соболева  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$  . // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
10. Жалолов О.И., Боборахимова М. И. Алгоритм построения дискретного аналога одного оператора  $D_4[\beta]$  // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
11. Жалолов О.И. Верхняя оценка нормы функционала погрешности кубатурной формулы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.
12. Жалолов О.И. О существовании наилучших кубатурных формул общего вида над пространством С.Л.Соболева // Universum:технические науки: электрон. научн. журн. 2020. № 11(80).
13. OI Jalolov, KU Khayatov. Top evaluation for the rate of functional of error weight cubature formula in space // Scientific reports of Bukhara State University. 2020. №3(4),.32-37р
14. Жалолов О.И. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С.Л.Соболева // Сибирский федеральный университет. 2011г.
15. З.Ш. Жумаев, О.И. Жалолов. Анализ алгебраических моделей коэффициента турбулентной вязкости при исследовании круглых турбулентных струй реагирующих газов // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан.2003г. 11-14ст.

16. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.
17. Хаятов Х.У., Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.
18. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.
19. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространствах // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.
20. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в Пространстве  $\tilde{C}^{(m)}T_n$  // Сибирский федеральный университет. — 2011.
21. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.
22. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.