Известия вузов. Математика
2025, №4, с. 80–89

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Х.У. ХАЯТОВ, О.И. ЖАЛОЛОВ

О НАХОЖДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С.Л. СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Аннотация. Типичной задачей приближения является задача интерполяции. Классический метод ее решения состоит в построении интерполяционного многочлена. Однако многочлены обладают рядом недостатков, как аппарат приближения функций с особенностями и функций с не слишком большой гладкостью. На практике для того, чтобы хорошо приблизить функции, вместо построения интерполяционного полинома высокой степени используют сплайны, которые очень удобны в применении.

В данной работе исследуется построение интерполяционных сплайнов с использованием метода Соболева, минимизирующих норму в одном гильбертовом пространстве.

Впервые С.Л. Соболевым (“Введение в теорию кубатурных формул” (Наука, М., 1974)) была поставлена задача нахождения экстремальной функции для интерполяционной формулы и вычисления нормы функционала погрешности в пространстве Соболева.

Приведены представление экстремальной функции и норма функционала погрешности интерполяционной формулы в явном виде в пространстве Соболева $W_2^{(m)}(R^n)$, т.е. функция у которой обобщенные производные порядка m интегрируемы с квадратом. В основном рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m = 4$.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство, норма, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

УДК: 517.518.392

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-4-80-89

Введение

Существенным шагом в теории сплайнов явился результат Дж.С. Холлидея [1], связывающий кубические сплайны И. Шенберга с решением вариационной задачи о минимуме квадрата нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее, результат Дж.С. Холлидея был обобщен К. де Буром [2].

В настоящее время теория сплайн-интерполяции быстро развивается. Теории сплайнов посвящено много работ, например, Дж. Альберг и др. [3], Р. Арканджели и др. [4], А. Берлинет и К. Томас-Агнан [5], К. де Бур [2], М.И. Игнатов и А.Б. Певный [6], Н.П. Корнейчук и др. [7], П.Ж. Лоран [8], С.Б. Стечкин и Ю.Н. Субботин [9].

В работе Х.М. Шадиметова, Н.Х. Маматовой [10] вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. В работе

Поступила в редакцию 12.03.2024, после доработки 12.03.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

этих же авторов [11] вычисляется точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Доказываются существование и единтвенность оптимальной интерполяционной формулы, которая дает наименьшую погрешность. Приводится алгоритм нахождения коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы. Реализовав этот алгоритм находятся оптимальные коэффициенты.

Допустим, что в $n+1$ произвольно расположенных точках $\{x_i\}$ $\left(i=\overline{0,N}\right)$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)$ функции $f(x)$.

Требуется построить интерполяционную формулу $P_f(x)$, т. е.

$$f(x) \cong P_f(x) = \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(x) f(x_\lambda), \tag{1}$$

совпадающую с функцией $f(x)$ в узлах интерполирования:

$$f(x_i) = P_f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, N; \tag{2}$$

здесь точки $x_\lambda \in T_1$ и параметры $C_\lambda\,(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1), T_1 — одномерный тор, т. е. окружность длины, равной единице.

Важной задачей в теории интерполирования является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $f(x) \cong P_f(x)$ над данным классом функций. Значение этой функции в некоторой точке z есть функционал, определенный как

$$< \ell(x), f(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) f(x) dx = f(z) - P_f(z) = f(z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda), \tag{3}$$

где ясно, что $P_f(z) = \sum\limits_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z) f(x_\lambda)$ — интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\lambda=0}^{N} C_\lambda(z)\delta(x - x_\lambda) \tag{4}$$

— функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\lambda(z)$ — коэффициенты, а x_λ — узлы формулы $P_f(z)$, $x_\lambda \in [0,1]$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака и $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$.

Определение. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$ определяется как пространство функций, заданных одномерной T_1-окружностью с длиной, равной единице, и имеющих все обобщенные производные порядка m, суммируемые с квадратом [12].

Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)$ становится гильбертовым, если ввести скалярное произведение

$$< f\,(x)\,, \varphi\,(x) >= \int_{T_1} f^{(m)}\,(x)\,\varphi^{(m)}\,(x)\,dx + \left(\int_{T_1} f\,(x)\,dx\right)\left(\int_{T_1} \varphi\,(x)\,dx\right).$$

Норма определяется по формуле

$$\left\| f | \tilde{W}_2^{(m)}\,(T_1)\, \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f\,(x)\,dx\right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left|\hat{f}_k\right|^2.$$

1. Постановка задачи

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_f(z)$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре Гильбертова пространства $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, т.е. при помощи нормы функционала (4):

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\| = \sup_{\left\|f|\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\right\|=1} <\ell, f>,$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ — пространство, сопряженное с пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Значит, для того чтобы оценить погрешность (3) интерполяционной формулы $P_f(z)$, достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_f(z)$. Понятно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ. Если

$$\left\|\overset{o}{\ell}|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\| = \inf_{C_\lambda(x), x_\lambda} \left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|, \tag{5}$$

то функционал $\overset{o}{\ell}(x)$ называется оптимальным функционалом погрешности, а соответствующая интерполяционная формула называется оптимальной интерполяционной формулой.

Таким образом, возникает

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\lambda(z)$ и узлов x_λ интерполяционной формулы $P_f(z)$, которые удовлетворяют равенству (5).

Коэффициенты $C_\lambda(z)$ и узлы x_λ, удовлетворяющие равенству (5), называют оптимальными коэффициентами и оптимальными узлами интерполяционной формулы $P_f(z)$.

В работе [12] С.Л. Соболевым решена задача интерполирования функций n-переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$. В пространстве $L_2^{(m)}(R)$ задачи 1 и 2 исследованы в [13]. В [14] рассмотрена задача построения оптимальных интерполяционных формул вида (1) с условием интерполяции (2) (при фиксированных узлах x_λ) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и для оптимальных коэффициентов получена система линейных уравнений. Алгоритм для вычисления коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дан в работе [6].

В работе [15] рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве С.Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ при $m=3$. В настоящей работе решение этой задачи рассматривается в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ для случая $m=4$.

2. Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Теорема 1 ([15])**.** *Квадрат нормы функционала погрешности интерполяционной формулы* (1) *над пространством* $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ *равен*:

$$\left\|\ell|\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2 = \left|1-\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z)\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\cos 2\pi kz - \sum\limits_{\lambda=1}^{N} C_\lambda(z) e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}},$$

где $C_\lambda(z)$ *— коэффициенты,* $x^{(\lambda)}$ *— узлы интерполяционной формулы вида* (1).

Теорема 2 ([15]). *Функция*

$$\psi_\ell\left(x\right)=1-\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2m}}\sum_{k\neq0}\frac{\hat{\ell}_k e^{-2\pi ikx}}{k^{(2m)}} \tag{6}$$

является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1) *и* $\psi_\ell\left(x\right)\in\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. *В периодическом пространстве Соболева* $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$ *существует единственная оптимальная интерполяционная формула вида* (1) *с функционалом погрешности* (4), *коэффициенты которой при* $m=4$ *имеют следующий вид*:

$$C_{[\beta]}\left(z\right)=\frac{1+\dfrac{1}{\left(2\pi\right)^8}\dfrac{1}{N^8}\displaystyle\sum_{k\neq0}\frac{\cos2\pi k\left(z-h\beta\right)}{k^8}}{N\left(1+\dfrac{1}{\left(2\pi\right)^8}\dfrac{1}{N^8}\displaystyle\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^8}\right)},$$

где $\beta=\overline{1,N}, N=2,3,\ldots$.

Доказательство. Так как из условия теоремы 2 $\psi_\ell\left(x\right)$ является экстремальной функцией для интерполяционной формулы (1), т. е. $\psi_\ell\left(x\right)\in\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$, то известно [12], что по теореме Бабушки условие оптимальности интерполяционной формулы запишется в виде

$$<\delta\big(x-x^{(\beta)}\big),\psi_\ell\left(x\right)>=\psi_\ell\big(x^{(\beta)}\big)=0, \tag{7}$$

где $\psi_\ell(x)$ — экстремальная функция интерполяционной формулы (1) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Известно [8], что в равенстве (6) $\hat{\ell}_k=\cos2\pi kz-\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}$, тогда представление экстремальной функции при $m=4$ имеет вид

$$\psi_\ell\left(x\right)=1-\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{\left(2\pi\right)^8}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\cos2\pi kz-\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)e^{-2\pi ikx}}{k^8}, \tag{8}$$

где $x^{(\lambda)}$ и $C_\lambda\left(z\right)$ — узлы и коэффициенты интерполяционной формулы (1). Так как мы рассматриваем интерполяционные формулы с равномерно распределенными узлами, то имеем $x^{(\beta)}=h\beta$ и $x^{(\lambda)}=h\lambda$ $(\beta=1,\ldots,N,\ \lambda=1,\ldots,N)$. Тогда, учитывая (7), из (8) получим

$$\psi_\ell\left(h\beta\right)=0,\ \beta=\overline{1,N},$$

т. е. для $\psi_\ell\left(h\beta\right)$ имеем следующую систему уравнений:

$$1-\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{\left(2\pi\right)^8}\sum_{k\neq0}\frac{\left(\cos2\pi kz-\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right)e^{-2\pi ikx^{(\beta)}}}{k^8}=0,\ \text{где }\beta=\overline{1,N}. \tag{9}$$

Преобразуя (9), имеем

$$1-\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{(\cos 2\pi kz)\,e^{-2\pi ikh\beta}}{k^8}-\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{N}C_\lambda(z)e^{2\pi ik(h\beta-h\lambda)}\right)}{k^8}=0,$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta(z)+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum\limits_{\beta=1}^{N}C_\beta(z)e^{2\pi ik(h\beta-h\lambda)}\right)}{k^8}=1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^8}. \tag{10}$$

После некоторых преобразований из (10) получим

$$\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta(z)\left[1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^8}\right]=1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^8}. \tag{11}$$

Умножая обе части (11) на число

$$a=\frac{1}{N\left(D_4\,(0)+2D_4\,(1)+2\sum\limits_{\gamma=2}^{\infty}D_4\,[h\gamma]\right)\left(1+\frac{1}{(2\pi)^8N^8}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k^8}\right)}, \tag{12}$$

имеем

$$\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta(z)a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^8}\right]=a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^8}\right). \tag{13}$$

Обозначим

$$a\left[1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(h\beta-h\lambda)}{k^8}\right]=\nu_4\,(h\beta-h\lambda)\quad\left(\lambda=\overline{1,N}\right),$$

$$a\left(1+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k\,(z-h\beta)}{k^8}\right)=f_4\,(h\beta)\,. \tag{14}$$

Из (13) получим следующее уравнение:

$$\sum_{\beta=1}^{N}C_\beta\,(z)\nu_4\,(h\beta-h\lambda)=f_4\,(h\beta)\;\;\left(\lambda=\overline{1,N}\right). \tag{15}$$

Переобозначив $\nu_4\,(h\beta)=\nu_4\,[\beta]$ и $f_4\,(h\beta)=f_4\,[\beta]$, систему (15) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$C_\beta\,(z)*\nu_4\,[\beta]=f_4\,[\beta]\,,\quad \beta=\overline{0,N}, \tag{16}$$

$$C_\beta\,(z)=0,\quad h\beta\notin T_1.$$

Далее нам понадобится

Теорема 4 ([2]). *Дискретный аналог* $D_m[\beta]$ *дифференциального оператора* $\left(1-\frac{d^2}{(2\pi)^2dx^2}\right)^m$ *при* $m=4$*, удовлетворяющий равенству*

$$D_4[\beta]*\nu_4[\beta]=\delta[\beta], \tag{17}$$

где $\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0;\\ 0, & \beta\neq 0,\end{cases}$
определяется формулой

$$D_4[\beta]=B\begin{cases} c+\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{A_i}{\lambda_i}\ , & \beta=0;\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{3}A_i, & |\beta|=1;\\ \sum\limits_{i=1}^{3}A_i{\lambda_i}^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\end{cases}$$

где

$$B=\frac{2^2\cdot 3}{\pi^2\cdot a_1},\ a_1=-15a+120hb-12\cdot 16\pi h^2a+32\pi^2h^3b,$$

$$c=\frac{a_2}{a_1}+8b,\ a_2=90ab-240h\left(1+2b^2\right)+12\cdot 16\pi^2a\cdot 2\,(1+b)+32\pi^2h^3\cdot 8\left(b^2-1\right),$$

$$A_i=\frac{{\lambda_i}^8+b_1'{\lambda_i}^7+b_2'{\lambda_i}^6+b_3'{\lambda_i}^5+b_4'{\lambda_i}^4+b_5'{\lambda_i}^3+b_6'{\lambda_i}^2+b_7'+1}{\lambda_i^2-1}\quad (i=\overline{1,3}),$$

$$b_1'=-8b, b_2'=4\left(b^2+1\right), b_3'=8b\left(1-4b^2\right), b_4'=2\left(24b^2+8b^4+3\right);$$

здесь

$$b_1'=b_7', b_2'=b_6', b_3'=b_5',$$

λ_i — *корни многочлена* $P_6(\lambda)=\left(\lambda^6+b_1\lambda^5+b_2\lambda^4+b_3\lambda^3+b_4\lambda^2+b_5\lambda+1\right)\quad (i=\overline{1,3})$,

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}, b_2=\frac{a_3}{a_1}, b_3=\frac{a_4}{a_1};$$

здесь

$$a_3=-45a\left(1+4b^2\right)+120hb\left(11+4b^2\right)+12\cdot 16\pi h^2a\,(8b-11)+32\pi^2h^3b\left(4b^2-13\right),$$

$$a_4=60ab\,(3+2b)-120h4\left(1+4b^2\right)+12\cdot 16\pi h^2a4\left(1+2b^2+3b\right)+32\pi^2h^3 16\left(2-b^2\right),$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\left(\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)\right)^{1/2}\right]+\left(\frac{1}{4}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\left(\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)\right)^{1/2}\right]^2-4\right)^{1/2}\right\},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\left(\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)\right)^{1/2}\right]-\left(\frac{1}{4}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\left(\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)\right)^{1/2}\right]^2-4\right)^{1/2}\right\},$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{9}+\frac{q^2}{4}}},\quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{9}+\frac{q^2}{4}}};$$

здесь

$$p=-\frac{b_1^2}{3}+b_2-3,q=2\cdot\frac{b_1^3}{9}-\frac{b_1\left(b_2-3\right)}{3}+2b_1-b_3$$

и h — малый параметр.

Применяя оператор $D_4\left[\beta\right]$ к обеим частям уравнения (16), получим

$$C_\beta\left(z\right)\cdot D_4\left[\beta\right]*\nu_4\left[\beta\right]=D_4\left[\beta\right]*f_4\left[\beta\right],\quad \beta=\overline{0,N}. \tag{18}$$

Согласно (16), (17) и теореме 3 из (18) имеем

$$C_\beta\left(z\right)=D_4\left[\beta\right]*f_4\left[\beta\right],\quad \left[\beta\right]=\left[0,1\right]. \tag{19}$$

Подставляя (14) в (19), имеем

$$\begin{aligned}C_\beta\left(z\right)=D_4\left[\beta\right]*a\cdot\left(1+\frac{1}{\left(2\pi\right)^8}\sum_{k\neq0}\frac{\cos 2\pi k\left(z-h\beta\right)}{k^8}\right)=\\=a\cdot\left(D_4\left[\beta\right]*1+\frac{1}{\left(2\pi\right)^8}\sum_{k\neq0}\frac{e^{2\pi ikz}}{k^8}D_4\left[\beta\right]*e^{-2\pi ikh\beta}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Так как

$$D_4\left[\beta\right]*1=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_4\left(h\beta\right)=D_4\left(0\right)+2D_4\left(1\right)+2\sum_{\beta=2}^{\infty}D_4\left(h\beta\right) \tag{21}$$

и

$$D_4\left[\beta\right]*e^{2\pi ikh\beta}=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}D_4\left[\gamma\right]e^{2\pi ikh(\gamma-\beta)}=$$

$$=e^{-2\pi ikh\beta}\left[D_4\left(0\right)+2D_4\left(1\right)\cos 2\pi kh+2\sum_{\gamma=2}^{\infty}D_4\left(h\gamma\right)e^{2\pi ikh\gamma}\right], \tag{22}$$

то ввиду (21) и (22) из (20) получим

$$C_\beta(z) = a\cdot\left(D_4[0] + 2D_4[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^8}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^8}\left(D_4[0] + 2D_4[1]\cos 2\pi kh + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]e^{2\pi kh\gamma}\right)\right),$$

$$C_\beta(z) = a\cdot\left(D_4[0] + 2D_4[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma] + \frac{1}{(2\pi)^8}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^8}\left([D_4[0] + 2D_4[1]\cos 2\pi kh] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]\cos 2\pi kh\gamma\right)\right). \tag{23}$$

Так как при $kh \in Z$, где Z — множество целых чисел, $\cos 2\pi kh = 1$ и

$$2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]\cos 2\pi kh\gamma = 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma],$$

то после некоторых преобразований из (23) имеем

$$C_\beta(z) = a\cdot\left(D_4[0] + 2D_4[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]\frac{1}{(2\pi)^8 N^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^8}\right)\times$$
$$\times\left(\left[D_4[0] + 2D_4[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]\right]\right) = a\cdot\left(D_4[0] + 2D_4[1] + 2\sum_{\gamma=2}^{\infty} D_4[h\gamma]\right)\times \tag{24}$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^8 N^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^8}\right).$$

В силу (12) для оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы (1) из (24) получим

$$C_\beta(z) = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{(2\pi)^8 N^8}\displaystyle\sum_{k\neq 0}\frac{\cos 2\pi k(z-h\beta)}{k^8}\right)}{N\left(1 + \dfrac{1}{(2\pi)^8}\dfrac{1}{N^8}\displaystyle\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8}\right)},$$

где $h = \dfrac{1}{N}$ и $\beta = \overline{1, N}, N = 2, 3, \ldots$. Таким образом, получили коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы (1). Что и требовалось доказать. $\square$

Заключение

Интерполяция имеет важное теоретическое и практическое значение при аппроксимации функций с заданными табличными значениями. В математике и ее приложениях многие практические задачи решаются с помощью интерполяции. Различают классический и вариационный методы интерполяции. В настоящей статье рассматривается задача построения интерполяционной формулы на основе вариационного метода. Здесь построена оптимальная интерполяционная формула в гильбертовом пространстве. В вариационном подходе сплайны понимаются как элементы гильбертова или банахова пространства, минимизирующие определенные функционалы. Данная работа посвящена именно вариационным методам. В этой работе, используя метод С.Л. Соболева, решается одна минимизационная задача интерполирования.

Результатом настоящей работы является новая оптимальная интерполяционная формула в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(4)}(T_1)$; здесь, использовав дискретный аналог $D_4[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1-\dfrac{d^2}{(2\pi)^2dx^2}\right)^4$, получили коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(4)}(T_1)$.

Литература

[1] Holladay J.C. *Smoothest curve approximation*, Math. Tables Aids Comput. **11**, 223–243 (1957).

[2] de Boor C. *Best approximation properties of spline functions of odd degree*, J. Math. Mech. **12**, 747–749 (1963).

[3] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The Theory of Splines and Their Applications* (Academic Press, New York, 1967).

[4] Arcangeli R., de Silanes M. C.L., and Torrens J.J. *Multidimensional Minimizing Splines* (Springer, Boston, 2004).

[5] Berlinet A., Thomas-Agnan C. *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics* (Springer, Boston, 2004).

[6] Игнатов М.И., Певный А.Б. *Натуральные сплайны многих переменных* (Наука, Л., 1991).

[7] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов* (Наукова Думка, Киев, 1992).

[8] Лоран П.Ж. *Аппроксимация и оптимизация* (Мир, М., 1975).

[9] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике* (Наука, М., 1976).

[10] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *Составные кубатурные формулы на решетке*, Изв. вузов. Матем. (11), 59–74 (2023).

[11] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *О задаче оптимального интерполирования функций*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–70 (2023).

[12] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).

[13] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *Об одной интерполяционной задаче в пространстве Соболева*, Узбекск. матем. журн. (3), 180–186 (2009).

[14] Жалолов Ик.И. *Алгоритм построения дискретного аналога $D_h^3[\beta]$ одного оператора*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. **2**, 48–52 (2015).

[15] Жалолов О.И., Хаятов Х.У. *Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. (1), 47–59 (2023).

Хуршиджон Усманович Хаятов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

`e-mail:` wera00@mail.ru, x.u.xayatov@buxdu.uz

Озоджон Исомидинович Жалолов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Kh.U. Khayatov and O.I. Jalolov

On finding the coefficients of the optimal interpolation formula in the space of S.L. Sobolev $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Abstract. A typical approximation problem is the interpolation problem. The classical method for solving it is to construct an interpolation polynomial. However, polynomials have a number of disadvantages, such as being a tool for approximating functions with singularities and functions with not very high smoothness. In practice, in order to approximate functions well, instead of constructing a high-degree interpolation polynomial, splines are used, which are very convenient to use.

This paper examines the construction of interpolation splines using the Sobolev method, minimizing the norm in a certain Hilbert space.

For the first time, S.L. Sobolev [12] posed the problem of finding the extremal function for the interpolation formula and calculating the norm of the error functional in the Sobolev space.

In this work, the extremal function of the interpolation formula is found in explicit form in the Sobolev space $W_2^{(m)}(R^n)$; a function whose generalized derivatives of order m are square integrable. Basically, the problem of constructing optimal interpolation formulas in the space of S.L. Sobolev $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ for $m = 4$ is considered.

Keywords: generalized function, space, norm, error functional, interpolation formula, extremal function.

Khurshidjon Usmanovich Khayatov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: wera00@mail.ru, x.u.xayatov@buxdu.uz

Ozodjon Isomidinovich Jalolov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz