

HISOBLASH VA AMALIY МАТЕМАТИКА MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(64) 2025

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Алоев Р.Д., Амиргалиев Е.Н. (Казахстан), Арушанов М.Л., Бурнашев В.Ф.,
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатьев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Иманкулов Т.С. (Казахстан), Исмагилов И.И. (Россия),
Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия), Курбонов Н.М., Маматов Н.С.,
Мирзаев Н.М., Мухамадиев А.Ш., Назирова Э.Ш., Нормуродов Ч.Б.,
Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Расулмухамедов М.М., Расулов А.С.,
Садуллаева Ш.А., Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Халджигитов А.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Dimov I. (Болгария), Li Y. (США),
Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Singh D. (Южная Корея),
Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

Э-почта: journals@airi.uz.

Веб-сайт: <https://journals.airi.uz>.

Дизайн и вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТТИ.

Подписано в печать 25.04.2025 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(64) 2025

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Aloev R.D., Amirgaliev E.N. (Kazakhstan), Arushanov M.L., Burnashev V.F.,
Zagrebina S.A. (Russia), Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia),
Imankulov T.S. (Kazakhstan), Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),
Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamadiev A.Sh., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Rasulov A.S., Sadullaeva Sh.A., Starovoitov V.V. (Belarus),
Khayotov A.R., Khaldjigitov A., Khamdamov R.Kh., Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh.,
Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan), Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Singh D. (South Korea), Singh M. (South
Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.
Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(998) 712-319-253, 712-319-249.

E-mail: journals@airi.uz.

Web-site: <https://journals.airi.uz>.

Layout design:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 25.04.2025

Format 60x84 1/8. Order No. 2. Print run of 100 copies.

Содержание

Хужаёров Б.Х., Файзиев Б.М., Сагдуллаев О.К.

Математическая модель переноса деградирующего вещества в двухзонной пористой среде 5

Салимова А.И., Паровик Р.И.

Программный комплекс ABMVAFracSim для исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри 17

Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.

Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена в процессе хранения зерновых продуктов с учетом воздействия вредителей 30

Рустамов Н., Амиртаев К.

Эвристическая модель оценки психического свойства лидера 46

Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К., Шакаева Э.Э.

Спектрально-сеточная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной 54

Хайётов А.Р., Бердимуродова У.,А.

Оптимальная квадратурная формула с производными для произвольно фиксированных узлов в пространстве Соболева 64

Нормуродов Ч.Б., Шакаева Э.Э., Зиякулова Ш.А.

Дискретный вариант метода предварительного интегрирования и его применение к численному решению сингулярно возмущенного уравнения 74

Адылова Ф.Т.

Почему квантовые вычисления – это будущее искусственного интеллекта? . 87

Мухамедиева Д.Т., Раупова М.Х.

Квадратичное программирование в модели распределения ресурсов в сельском хозяйстве на основе квантового алгоритма 101

Шарипов Д.К., Саидов А.Д.

Модифицированный метод SHAP для интерпретируемого прогнозирования осложнений сердечно-сосудистых заболеваний 114

Contents

<i>Khuzhayorov B.Kh., Fayziev B.M.</i>	
Mathematical model of transport of degrading substance in a two-zone porous medium	5
<i>Salimova A.I., Parovik R.I.</i>	
ABMVAFracSim software package for studying the fractional van der Pol-Airy oscillator	17
<i>Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M.</i>	
Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during grain storage considering pest impact	30
<i>Rustamov N., Amirtayev K.</i>	
A heuristic model for evaluating the mental qualities of a leader	46
<i>Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.</i>	
Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative	54
<i>Hayotov A.R., Berdimuradova U.A.</i>	
An optimal quadrature formula with derivatives for arbitrarily fixed nodes in the Sobolev space	64
<i>Normurodov Ch.B., Shakaeva E.E., Ziyakulova Sh.A.</i>	
A discrete variant of the method pre-integration and its application to the numerical solution of a singularly perturbed equation	74
<i>Adilova F.T.</i>	
Why are quantum computing technologies the future of artificial intelligence? . .	87
<i>Mukhamediyeva D.T., Raupova M.H.</i>	
Quadratic programming in the resource allocation model in agriculture based on the quantum algorithm	101
<i>Sharipov D.K., Saidov A.D.</i>	
Modified SHAP approach for interpretable prediction of cardiovascular complications	114

УДК 519.6+004.9:504.064

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ КОНТРОЛЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И ВЛАГООБМЕНА В ПРОЦЕССЕ ХРАНЕНИЯ ЗЕРНОВЫХ ПРОДУКТОВ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВРЕДИТЕЛЕЙ

¹*Равшанов Н., ²Шадманов И.У., ^{2*}Адизова З.М.***zuhroadizova096@gmail.com*¹Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А;

²Бухарский государственный университет,

200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол дом 11.

В данной статье представлена двухмерная математическая модель, описывающая процесс тепло- и влагообмена в пористых средах для контроля и прогнозирования их состояния при хранении зерновых продуктов, а также воздействия вредителей. Результаты проведенных численных расчетов на основе математического обеспечения показало, как взаимодействуют изменяются температура и влажность зерна во времени в зависимости от условий хранения. В частности, результаты демонстрируют распределение температуры и влажности от центра к краям, а также изменение этого процесса под воздействием вредителей. Модель позволяет анализировать влияние условий хранения (вентиляция, влажность воздуха) на температуру и влажность. Это подтверждает эффективность работы вычислительной модели и ее полезность для контроля воздействия вредителей и оптимизации условий хранения зерновых продуктов.

Ключевые слова: модель, зерновые продукты, процессы хранения, теплообмен, влагоперенос, вредители, мониторинг, прогнозирование.

Цитирование: *Равшанов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М.* Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена в процессе хранения зерновых продуктов с учетом воздействия вредителей // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2025. – № 2(64). – С. 30-45.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.03.

1 Введение

Процессы контроля передачи тепла и влаги в зерновых хранилищах, а также снижение негативного воздействия вредителей, занимают важное место в области научных исследований и практических разработок.

В статье [1] авторами представлена математическая модель для прогнозирования процессов передачи тепла и влаги, а также результаты расчетных экспериментов, выполненных с использованием ЭВМ. Разработанная модель учитывает такие факторы, как выделение тепла и влаги из пористого натурального материала, изменения температуры и влажности окружающей среды. Разработанное программное обеспечение позволяет прогнозировать изменения температуры и влажности в произвольных точках пористых тел, находящихся под воздействием солнечной радиации.

Статья [2] посвящена глубокому анализу процессов тепло- и влагообмена при хранении зерновых продуктов, а также моделированию этих процессов. В статье подчеркивается важность управления условиями хранения, направленными на сохранение качества продукции и минимизацию потерь. Рассматриваются современные технологии мониторинга и прогнозирования в области хранения зерновых культур и переработанных продуктов, авторы анализируют ключевые факторы, влияющие на процессы тепло- и влагообмена.

В статье [3] рассматриваются основные аспекты контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена при хранении зерновых продуктов и их значение для агропромышленного комплекса. В ходе исследовательской работы, в основном, при анализе экспериментальных данных использовалась пшеница.

В работе [4] авторы рассматривают многомерную математическую модель, численный алгоритм и программные средства для визуализации процессов передачи тепла и влаги. На основе этой модели исследуется влияние выделения тепла из натурального материала, а также изменения температуры и влажности окружающей среды. Также изучаются процессы хранения и сушки пористых материалов.

В статье [5] исследуются процессы тепло- и массопереноса в пористых средах. Изучаемые материалы описаны экспериментально, и оценены их тепловые свойства, такие как теплопроводность, а также специфическая теплоемкость в различных состояниях (сухое-влажное). Рассмотрены гигроскопические свойства, такие как проницаемость водяного пара и его сорбция. Авторы представляют и подтверждают математическую модель, описывающую тепло- и массоперенос в биоосновных материалах, которая хорошо предсказывает гигротермическое поведение таких материалов, согласно экспериментальным данным.

В исследовании [6] была разработана модель для пористого тела в неполностью закрытом состоянии (уравнение состояния), которая согласована со вторым законом термодинамики. В существующих моделях эта характеристика не была учтена.

Результаты теоретического исследования теплового и механического взаимодействия в контактных парах, состоящих из материалов с различными текстурными свойствами, представлены в статье [7]. Здесь предложена математическая модель для теплового сопротивления контакта, которая позволяет прогнозировать его значения в зависимости от широкого спектра теплотехнических факторов.

В исследовании [8] рассматриваются проблемы систематизации и решения задач, связанных с тепловым состоянием тел и растворов в промышленном производстве. Реализация математических моделей была выполнена с использованием программного обеспечения современного вычислительного оборудования.

В исследовании [9] классифицированы различные процессы теплопереноса и влагообмена в глубоких слоях зерна. Установлено, что теория сушки тонких слоев зерна, находящихся в условиях высокой влажности воздуха и содержания влаги в зерне, недостаточна. Предложено разработать опытную закрытую систему, способную обрабатывать зерновые слои до глубины 4 футов для получения необходимых данных для прогнозирования изменений влажности и температуры и изучения медленного процесса сушки и охлаждения глубоких слоев зерна.

Авторы исследования [10] разработали двухмерную математическую модель, одновременно описывающую процессы теплопереноса и влагообмена при естественном хранении и сушке сельскохозяйственных продуктов на открытых территориях. Эта модель включает изменения температуры и влажности во времени и пространстве, внутреннее выделение тепла и влаги, тепло- и влагоперенос с окружающей средой,

а также солнечное излучение. Для изучения и прогнозирования процессов теплопереноса и влагообмена было разработано программное обеспечение, проведены эксперименты на сыром хлопке.

В статье [11] рассмотрено использование сорбционно-связанных (через взаимосвязь) методов при сушке сельскохозяйственных продуктов, обсужден процесс сорбции влаги на поверхности продукта сорбентом-гигроскопическим материалом. В результате было установлено, что процесс массового переноса ускоряется, и зависит от коэффициента диффузии влаги в материале, удержания влаги и температурного градиента.

В статье [12] разработана совместная математическая модель процессов теплопереноса и влагообмена в неоднородных пористых телах, в которой учитываются внутренний тепловой и влагообмен, а также тепло- и влагоперенос с окружающей средой.

В данном исследовании [13] изучены распределение стали в процессе сушки зерна и взаимосвязь теплопереноса и влагообмена. Исследование сосредоточено на создании моделей сушки кукурузы с различной степенью повреждения зерна с постоянным расположением.

Автор статьи [14] разработал математическую модель для моделирования одновременных процессов теплопереноса и влагообмена при естественном хранении и сушке сельскохозяйственных продуктов на открытых территориях. Модель учитывает солнечное излучение, внутреннее выделение тепла и влаги, тепло- и влагоперенос с окружающей средой, а также изменения температуры и влажности во времени и пространстве.

Процесс сушки связан с тепло- и массопереносом между сушильным потоком и продуктом, а также с комплексными процессами переноса влаги внутри продукта. В статье [15] представлены аналитические подходы к сушке картофеля. Законы изменения влажности в качестве функции массопереноса использованы для теоретического подхода. Исследование проводилось для определения основных параметров сушки при микроволновом сушении.

В исследовании [16] была разработана математическая модель, числовой алгоритм, решение и результаты вычислительных экспериментов для прогнозирования процесса передачи тепла и влаги в пористых средах. Этот процесс учитывает такие факторы, как выделение внутреннего тепла и влаги пористыми природными продуктами, такими как сырой хлопок и его переработанные продукты, а также семена различных сельскохозяйственных культур. Разработанное в данном исследовании математическое обеспечение позволяет прогнозировать изменение температуры и влажности в любой точке пористых материалов. Это помогает предотвратить потерю качества материалов под воздействием солнечного излучения и их самовоспламенение, а также служит для анализа и принятия управленческих решений.

В этом исследовании [17] рассматриваются проблемы передачи тепла и массы в процессе сушки с использованием теплового насоса и инфракрасного излучения, включая эксперимент по сушке и теорию математических уравнений, связанных с передачей тепла и массы. Эксперимент по сушке пурпурного ямса с использованием IR-излучения был проведен для оценки воздействия мощности IR на скорость сушки и нагрева.

В данной статье [18] обсуждаются процессы совместной передачи тепла и массы (сушка). В исследовании рассматривается моделирование процесса сушки с учетом

различных параметров сушки и их влияния на конечное качество продукта и экономическую значимость.

Данное исследование [19] показало, что оптимизированная конструкция практически не зависит от входной температуры и относительной влажности, однако другие рабочие условия влияют на её эффективность. Оптимальные значения коэффициента эффективности осушения и нормализованной способности удаления влаги составили соответственно 2,05 и 42 кг/ч·м². Разработанный теплообменник по показателю эффективности осушения в четыре раза превосходит коммерческое колесо с десикантом, однако по способности удаления влаги на единицу фронтальной площади он уступает в два раза. Тем не менее, при одинаковой способности удаления влаги разработанная система потребляет на 75% меньше энергии по сравнению с десикантным колесом.

В статье [20] предложен метод прогнозирования показателей качества зерна риса в процессе хранения, основанный на использовании математической модели состояния зерновой массы и программного комплекса, базирующихся на теории тепломассообмена, многофазной фильтрации в капиллярно-пористых телах и синергетических методах анализа мультистабильных систем.

2 Постановка задачи

Открытые зернохранилища имеют прямоугольную форму и взаимодействуют с внешней средой. Предложенная математическая модель описывает динамику теплового и влажностного состояния зерновой массы с учетом внутреннего теплообмена, уровня влажности и воздействия вредителей, основываясь на уравнениях передачи тепла и влаги:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{\text{eff}}(Q(T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{\text{eff}}(Q(T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g(T, Q) + g_{\text{pest}}(T, Q), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\text{eff}}(Q(T)) \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\text{eff}}(Q(T)) \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q_{\text{pest}}(T, Q), \quad (2)$$

с начальными

$$T(x, z, \tau)|_{\tau=0} = T_0(x, z), \quad (3)$$

$$Q(x, z, \tau)|_{\tau=0} = Q_0(x, z), \quad (4)$$

и граничные условия

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1(T - T_{\text{tash}}), \quad (5)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_1(T - T_{\text{tash}}), \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_1(T - T_{\text{tash}}), \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_1(T - T_{\text{tash}}), \quad (8)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_2(Q - Q_{\text{tash}}), \quad (9)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_2(Q - Q_{\text{tash}}), \quad (10)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_2(Q - Q_{\text{tash}}), \quad (11)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_2(Q - Q_{\text{tash}}). \quad (12)$$

Здесь T и Q — значения температуры и влаги пористого тела; a_{eff} — эффективная тепловая диффузия, зависящая от содержания влаги Q ; $g(T, Q)$ — функция, которая может представлять внешние или внутренние источники/поглотители тепла (возможно, зависящие от температуры и влажности); $g_{\text{pest}}(T, Q)$ — учитывает влияние вредителей на теплопередачу; $D_{\text{eff}}(Q)$ — эффективная диффузия для переноса влаги, которая зависит от содержания влаги Q ; $Q_{\text{pest}}(T, Q)$ — термин, связанный с вредителями, влияющий на перенос влаги; μ — коэффициент теплопроводности; ω — коэффициент влагопроводности; ψ_1 — коэффициент теплоотдачи; T_{tash} — температура окружающей среды; ψ_2 — коэффициент влагоотдачи; Q_{tash} — влажность окружающей среды. Уравнения (1) и (2) определяют взаимосвязь между влажностью Q

и температурой T :

$$Q(T) = Q_0 + kT,$$

где Q_0 — начальная влажность, k — коэффициент влияния температуры на влажность. Уравнение теплопередачи включает зависимость от влажности через $a_{\text{eff}}(Q)$, аналогично, уравнение переноса влаги зависит от температуры T через $D_{\text{eff}}(Q)$ и источник $Q_{\text{pest}}(T, Q)$. Это создаёт систему связанных частных дифференциальных уравнений для T и Q , где каждое зависит от другого.

Предложенная модифицированная математическая модель описывает сопряжённый процесс теплопередачи и переноса влаги, где температура влияет на перенос влаги через эффективную диффузию $D_{\text{eff}}(Q(T))$, а содержание влаги влияет на теплопередачу через $a_{\text{eff}}(Q(T))$.

3 Метод решения

Для решения задачи (1)–(12) используем конечно-разностный метод, заменяя область непрерывного решения на сеточную, введением пространственно-временной сетки:

$$\Omega_c = \{(x_i = i\Delta x, z_j = j\Delta z, \tau_n = n\Delta\tau); i = 1, N_x; j = 1, N_z; n = 0, N_t\}, \\ \Delta\tau = 1/N_t,$$

заменяем дифференциальные операторы уравнения (1) на разностные по Ox :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta\tau} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{2} + \\ & + \frac{1}{\Delta x^2} \left(a_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2} T_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(a_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} + a_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} T_{i+1,j}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} T_{i,j+1}^{n+1/2} - \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} T_{i,j-1}^{n+1/2} \right) = \\ & = -\frac{1}{\Delta\tau} T_{i,j}^n + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$a_{i,j} = \frac{a_{\text{eff},i-0.5,j}}{\Delta x^2}, \quad b_{i,j} = \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{a_{\text{eff},i+0.5,j} + a_{\text{eff},i-0.5,j}}{\Delta x^2}, \quad c_{i,j} = \frac{a_{\text{eff},i+0.5,j}}{\Delta x^2},$$

$$d_{i,j} = \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5} + a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n -$$

$$- \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n - \frac{a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1/2},$$

получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$a_{i,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} + b_{i,j} T_{i,j}^{n+1/2} + c_{i,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} = d_{i,j}. \quad (13)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Ox , получим:

$$\mu \cdot \frac{-3T_{0,j}^{n+1/2} + 4T_{1,j}^{n+1/2} - T_{2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_1 \left(T_{\text{cp}} - T_{0,j}^{n+1/2} \right). \quad (14)$$

Из системы уравнений (13) когда $i = 1$, получим:

$$a_{1,j} T_{0,j}^{n+1/2} - b_{1,j} T_{1,j}^{n+1/2} + c_{1,j} T_{2,j}^{n+1/2} = -d_{1,j}. \quad (15)$$

Поставив $T_{2,j}^{n+1/2}$ из (15) в (14), найдём $T_{0,j}^{n+1/2}$:

$$T_{0,j}^{n+1/2} = \frac{4\mu c_{1,j} - b_{1,j}\mu}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j}} T_{1,j}^{n+1/2} + \frac{d_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j} T_{\text{cp}}}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j}},$$

где прогончные коэффициенты $\alpha_{0,j}, \beta_{0,j}$ вычисляются с помощью:

$$\alpha_{0,j} = \frac{4\mu c_{1,j} - b_{1,j}\mu}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j}}, \quad \beta_{0,j} = \frac{d_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j} T_{\text{cp}}}{3\mu c_{1,j} - a_{1,j}\mu + 2\Delta x \psi_1 c_{1,j}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (6) по Ox при $i = N$, получим:

$$\mu \cdot \frac{T_{N-2,j}^{n+1/2} - 4T_{N-1,j}^{n+1/2} + 3T_{N,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_1 \left(T_{\text{cp}} - T_{N,j}^{n+1/2} \right). \quad (16)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $N, N-1$ и $N-2$ найдём $T_{N-1,j}^{n+1/2}$ и $T_{N-2,j}^{n+1/2}$:

$$T_{N-1,j}^{n+1/2} = \alpha_{N-1,j} T_{N,j}^{n+1/2} + \beta_{N-1,j}, \quad (17)$$

$$T_{N-2,j}^{n+1/2} = \alpha_{N-2,j} T_{N-1,j}^{n+1/2} + \beta_{N-2,j}. \quad (18)$$

Поставив $T_{N-1,j}^{n+1/2}$ из (17) и $T_{N-2,j}^{n+1/2}$ из (18) в (16), найдём $T_{N,j}^{n+1/2}$:

$$T_{N,j}^{n+1/2} = \frac{(4\beta_{N-2,j} - \alpha_{N-2,j}\beta_{N-1,j})\mu - 2\psi_1 \Delta x T_{\text{cp}}}{\alpha_{N-2,j}\alpha_{N-1,j}\mu - 4\alpha_{N-2,j}\mu + 3\mu - 2\psi_1 \Delta x}. \quad (19)$$

Значения последовательности температуры $T_{i,j}^{n+1/2}$, $i = 0, 1, \dots, N$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значения последовательности:

$$T_{i,j}^{n+1/2} = \alpha_{i,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} + \beta_{i,j}, \quad i = N-1, j = 0, \dots, M. \quad (20)$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Ox конечно-разностным соотношением:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{i,j}^{n+1/2} - Q_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{i+1,j}^{n+1/2} - Q_{i+1,j}^n}{\Delta\tau/2} = \\ & = -\frac{1}{\Delta x^2} \left(D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} - \left(D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left(D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} Q_{i,j+1}^{n+1/2} - \left(D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} Q_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \left(\frac{D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \frac{D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} Q_{i+1,j}^{n+1/2} = \\ & = - \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\bar{a}_{i,j} = \frac{D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \quad \bar{b}_{i,j} = \frac{D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i-0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta\tau}, \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{D_{\text{eff},i+0.5,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2},$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^{n+1/2} + \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1/2} + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1/2} \end{aligned}$$

и получим систему трёх диагональных алгебраических уравнений относительно искоемых переменных:

$$\bar{a}_{i,j} Q_{i-1,j}^{n+1/2} - \bar{b}_{i,j} Q_{i,j}^{n+1/2} + \bar{c}_{i,j} Q_{i+1,j}^{n+1/2} = -\bar{d}_{i,j}. \quad (21)$$

Далее, граничное условие (9) аппроксимируем со вторым порядком точности по Ox и получим:

$$\omega \cdot \frac{-3Q_{0,j}^{n+1/2} + 4Q_{1,j}^{n+1/2} - Q_{2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_2 \left(Q_{\text{cp}} - Q_{0,j}^{n+1/2} \right). \quad (22)$$

Из системы уравнений (21) при $i = 1$, получим:

$$\bar{a}_{1,j} Q_{0,j}^{n+1/2} - \bar{b}_{1,j} Q_{1,j}^{n+1/2} + \bar{c}_{1,j} Q_{2,j}^{n+1/2} = -\bar{d}_{1,j}. \quad (23)$$

Поставив $Q_{2,j}^{n+1/2}$ из (23) в (22), найдём значение $Q_{0,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{0,j}^{n+1/2} = \frac{4\bar{\omega}\bar{c}_{1,j} - \bar{b}_{1,j}\omega}{3\omega\bar{c}_{1,j} - \bar{a}_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}} Q_{1,j}^{n+1/2} + \frac{d_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}Q_{\text{cp}}}{3\omega\bar{c}_{1,j} - \bar{a}_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}}, \quad (24)$$

где из соотношения (24) прогончные коэффициенты определяются с помощью:

$$\bar{\alpha}_{0,j} = \frac{4\omega\bar{c}_{1,j} - \bar{b}_{1,j}\omega}{3\omega\bar{c}_{1,j} - \bar{a}_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}}, \quad \bar{\beta}_{0,j} = \frac{d_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}Q_{\text{ср}}}{3\omega\bar{c}_{1,j} - \bar{a}_{1,j}\omega + 2\Delta x\psi_2\bar{c}_{1,j}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (10) по Ox , получим:

$$\omega \cdot \frac{Q_{N-2,j}^{n+1/2} - 4Q_{N-1,j}^{n+1/2} + 3Q_{N,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = -\psi_2 \left(Q_{\text{ср}} - Q_{N,j}^{n+1/2} \right). \quad (25)$$

Применяя метод прогонки для последовательности $N, N-1$ и $N-2$ найдём значение $Q_{N-1,j}^{n+1/2}$ и $Q_{N-2,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{N-1,j}^{n+1/2} = \bar{\alpha}_{N-1,j}Q_{N,j}^{n+1/2} + \bar{\beta}_{N-1,j}, \quad (26)$$

$$Q_{N-2,j}^{n+1/2} = \bar{\alpha}_{N-2,j}Q_{N-1,j}^{n+1/2} + \bar{\beta}_{N-2,j}. \quad (27)$$

Поставив $Q_{N-1,j}^{n+1/2}$ из (26) и $Q_{N-2,j}^{n+1/2}$ из (27) в (25), найдём $Q_{N,j}^{n+1/2}$:

$$Q_{N,j}^{n+1/2} = \frac{(4\bar{\beta}_{N-1,j} - \bar{\alpha}_{N-2,j}\bar{\beta}_{N-1,j} - \bar{\beta}_{N-2,j})\omega - 2\psi_2\Delta xQ_{\text{ср}}}{\bar{\alpha}_{N-2,j}\bar{\alpha}_{N-1,j}\omega - 4\bar{\alpha}_{N-2,j}\omega + 3\omega - 2\psi_2\Delta x}. \quad (28)$$

Значения последовательности влаги $Q_{N-2,j}^{n+1/2}, \dots, Q_{0,j}^{n+1/2}$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению i последовательности:

$$Q_{i,j}^{n+1/2} = \bar{\alpha}_{i,j}Q_{i+1,j}^{n+1/2} + \bar{\beta}_{i,j}, \quad i = N-1, j = 0, \dots, M. \quad (29)$$

Заменяем дифференциальные операторы уравнения (1) на разностные по Oz :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i,j+1}^{n+1/2} - T_{i,j+1}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} = \\ & = \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} T_{i,j+1}^{n+1/2} - \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1/2} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \right. \\ & \quad \left. + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1/2} T_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Далее, используя вышеуказанную технологию, уравнение (1) аппроксимируем по координате Oz , раскрывая скобки и группируя подобные члены, сводим к системе линейных алгебраических уравнений. Далее, используя вышеуказанную технологию, уравнение (1) аппроксимируем по координате Oz , раскрывая скобки и группируя подобные члены, сводим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta\tau/2} = \frac{1}{\Delta z^2} \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} T_{i,j+1}^{n+1} - \right. \\ & \quad \left. - \left(a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1} \right) T_{i,j}^{n+1} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1} T_{i,j-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + a_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) T_{i,j}^{n+1} + \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^{n+1} = \\ & = -\frac{1}{\Delta\tau} T_{i,j}^n + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{i,j} &= \frac{a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2}, \quad \bar{b}_{i,j} = \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5} + a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta \tau}, \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5}}{\Delta z^2}, \\ \bar{d}_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta \tau} - \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5} + a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^n + \frac{a_{\text{eff},i,j+0.5}}{\Delta z^2} T_{i,j+1}^n + \\ &\quad + \frac{a_{\text{eff},i,j-0.5}}{\Delta z^2} T_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} G_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} G_{\text{pest},i,j}^{n+1},\end{aligned}$$

получим систему трёх диагональных алгебраических уравнений:

$$\bar{a}_{i,j} T_{i,j-1}^{n+1} - \bar{b}_{i,j} T_{i,j}^{n+1} + \bar{c}_{i,j} T_{i,j+1}^{n+1} = -\bar{d}_{i,j}. \quad (30)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Oz получим:

$$\mu \cdot \frac{-3T_{i,0}^{n+1} + 4T_{i,1}^{n+1} - T_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{\text{ср}} - T_{i,0}^{n+1}). \quad (31)$$

Из системы уравнений (13) когда $j = 1$, получим:

$$\bar{a}_{i,1} T_{i,0}^{n+1} - \bar{b}_{i,1} T_{i,1}^{n+1} + \bar{c}_{i,1} T_{i,2}^{n+1} = -\bar{d}_{i,1}. \quad (32)$$

Поставив $T_{i,2}^{n+1}$ из (31) в (32), найдём значение $T_{i,0}^{n+1}$.

$$T_{i,0}^n = \frac{4\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\mu}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}} T_{i,1}^n + \frac{\bar{d}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}T_{\text{ср}}}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}, \quad (33)$$

где прогончные коэффициенты $\bar{\alpha}_{i,0}, \bar{\beta}_{i,0}$ вычисляются с помощью:

$$\bar{\alpha}_{i,0} = \frac{4\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\mu}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}, \quad \bar{\beta}_{i,0} = \frac{\bar{d}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}T_{\text{ср}}}{3\mu\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\mu + 2\Delta z\psi_1\bar{c}_{i,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничное условие (6) по Oz при $j = M$, получим:

$$\mu \cdot \frac{T_{i,M-2}^n - 4T_{i,M-1}^n + 3T_{i,M}^n}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{\text{ср}} - T_{i,M}^n). \quad (34)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $M, M-1$ и $M-2$ найдём значение $T_{i,M-1}^n$ и $T_{i,M-2}^n$:

$$T_{i,M-1}^n = \bar{\alpha}_{i,M-1} T_{i,M}^n + \bar{\beta}_{i,M-1}, \quad (35)$$

$$T_{i,M-2}^n = \bar{\alpha}_{i,M-2} T_{i,M-1}^n + \bar{\beta}_{i,M-2}. \quad (36)$$

Поставив $T_{i,M-1}^n$ из (35) и $T_{i,M-2}^n$ из (36) в (34), найдём $T_{i,M}^n$:

$$T_{i,M}^{n+1} = \frac{(4\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\beta}_{i,M-2})\mu - 2\psi_1\Delta zT_{\text{ср}}}{\bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M-1}\mu - 4\bar{\alpha}_{i,M-2}\mu + 3\mu - 2\psi_1\Delta z}. \quad (37)$$

Значения последовательности температуры $T_{i,M-2}^n, \dots, T_{i,0}^n$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению значения j последовательности:

$$T_{i,j}^n = \bar{\alpha}_{i,j} T_{i,j+1}^n + \bar{\beta}_{i,j}, \quad i = 0, N; \quad j = M-1, \dots, 1. \quad (38)$$

Аналогично уравнение (2) аппроксимируем по Oz конечно-разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j+1}^n}{\Delta\tau/2} = \\ & = \frac{1}{\Delta z^2} \left(D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} Q_{i,j+1}^{n+1} - (D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}) Q_{i,j}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1} Q_{i,j-1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

и группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^{n+1} - \left(\frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) Q_{i,j}^{n+1} + \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^{n+1} = \\ & = - \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \\ & + \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i,j} &= \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2}, \quad \bar{b}_{i,j} = \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta\tau}, \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} \\ \bar{d}_{i,j} &= \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1} + D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) Q_{i,j}^n + \\ & + \frac{D_{\text{eff},i,j+0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j+1}^n + \frac{D_{\text{eff},i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta z^2} Q_{i,j-1}^n + \frac{1}{2} Q_{\text{pest},i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

и получим систему трёх диагональных алгебраических уравнений относительно искомых переменных:

$$\bar{a}_{i,j} Q_{i,j-1}^{n+1} - \bar{b}_{i,j} Q_{i,j}^{n+1} + \bar{c}_{i,j} Q_{i,j+1}^{n+1} = -\bar{d}_{i,j}. \quad (38)$$

Далее, граничное условие (9) аппроксимируем со вторым порядком точности по Oz и получим:

$$\omega \cdot \frac{-3Q_{i,0}^n + 4Q_{i,1}^n - Q_{i,2}^n}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{\text{cp}} - Q_{i,0}^n). \quad (39)$$

Из системы уравнений (38) когда $j = 1$, получим:

$$\bar{a}_{i,1} Q_{i,0}^{n+1} - \bar{b}_{i,1} Q_{i,1}^{n+1} + \bar{c}_{i,1} Q_{i,2}^{n+1} = -\bar{d}_{i,1}. \quad (40)$$

Поставив $Q_{i,2}^{n+1}$ из (40) в (39), найдём $Q_{i,0}^n$:

$$Q_{i,0}^n = \frac{4\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\omega}{3\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}} Q_{i,1}^n + \frac{\bar{d}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}Q_{\text{cp}}}{3\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}}, \quad (41)$$

где прогончные коэффициенты $\bar{\alpha}_{i,0}, \bar{\beta}_{i,0}$ вычисляются с помощью:

$$\bar{\alpha}_{i,0} = \frac{4\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{b}_{i,1}\omega}{3\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}}, \quad \bar{\beta}_{i,0} = \frac{\bar{d}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}Q_{\text{cp}}}{3\omega\bar{c}_{i,1} - \bar{a}_{i,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{i,1}}.$$

Аналогично аппроксимируем граничное условие (10) по Oz при $j = M$, получим:

$$\omega \cdot \frac{Q_{i,M-2}^n - 4Q_{i,M-1}^n + 3Q_{i,M}^n}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{\text{ср}} - Q_{i,M}^n). \quad (42)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $M, M-1$ и $M-2$ найдём $Q_{i,M-1}^n$ и $Q_{i,M-2}^n$:

$$Q_{i,M-1}^n = \bar{\alpha}_{i,M-1} Q_{i,M}^n + \bar{\beta}_{i,M-1}, \quad (43)$$

$$Q_{i,M-2}^n = \bar{\alpha}_{i,M-2} Q_{i,M-1}^n + \bar{\beta}_{i,M-2}. \quad (44)$$

Поставив $Q_{i,M-1}^n$ из (42) и $Q_{i,M-2}^n$ из (43) в (41), найдём $Q_{i,M}^n$:

$$Q_{i,M}^{n+1} = \frac{(4\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\beta}_{i,M-1} - \bar{\beta}_{i,M-2})\omega - 2\psi_2\Delta z Q_{\text{ср}}}{\bar{\alpha}_{i,M-2}\bar{\alpha}_{i,M-1}\omega - 4\bar{\alpha}_{i,M-2}\omega + 3\omega - 2\psi_2\Delta z}. \quad (45)$$

Значения последовательности температуры $Q_{i,M-1}^n, Q_{i,M-2}^n, \dots, Q_{i,1}^n$ определяются методом обратной прогонки по уменьшению значения j последовательности:

$$Q_{i,j}^n = \bar{\alpha}_{i,j} Q_{i,j+1}^n + \bar{\beta}_{i,j}, \quad i = 0, N; \quad j = M-1, \dots, 1. \quad (46)$$

Математическая модель и численный алгоритм, разработанные для контроля и прогнозирования процессов тепло- и влагообмена, являются мощным инструментом для оптимизации условий хранения зерновой массы и повышения эффективности управления этими процессами. В частности, цель данной модели заключается не только в описании динамики тепло- и влагообмена, но и в обеспечении возможности прогнозирования изменений этих параметров в зависимости от условий внешней среды, содержания влаги и температуры в зерновой массе.

4 Результаты и обсуждение

В данной работе разработана двумерная математическая модель процессов тепло- и влагообмена при хранении зерновых продуктов. Модель учитывает природные факторы (температуру и влажность воздуха) и влияние вредителей, что позволяет прогнозировать качество и безопасность продукта при различных условиях хранения.

Ниже приведены результаты вычислительных экспериментов, которые показывают, как изменяются температура и влажность зерна во времени в зависимости от условий хранения:

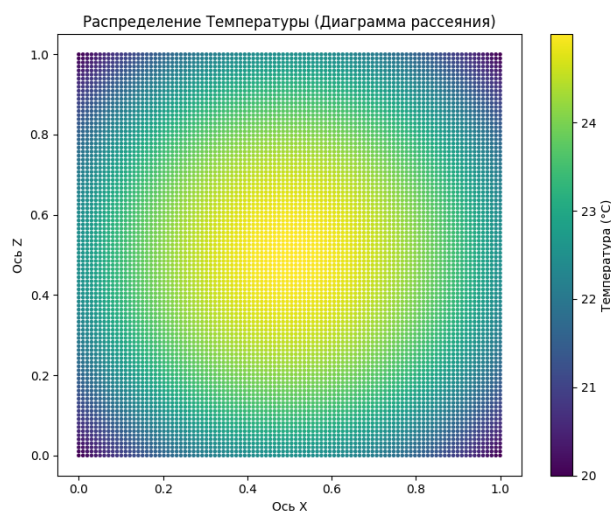


Рис. 1 Изменение температуры в пшеничном гумне после 10 дней хранения при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T(x, z, 0) = 25^\circ\text{C}$

На рисунке 1 представлено распределение температуры в пшеничном гумне после 10 дней хранения на двумерной плоскости. Оси X и Z отображают пространственные координаты на плоскости от 0 до 1. Цвет точек указывает на распределение температуры.

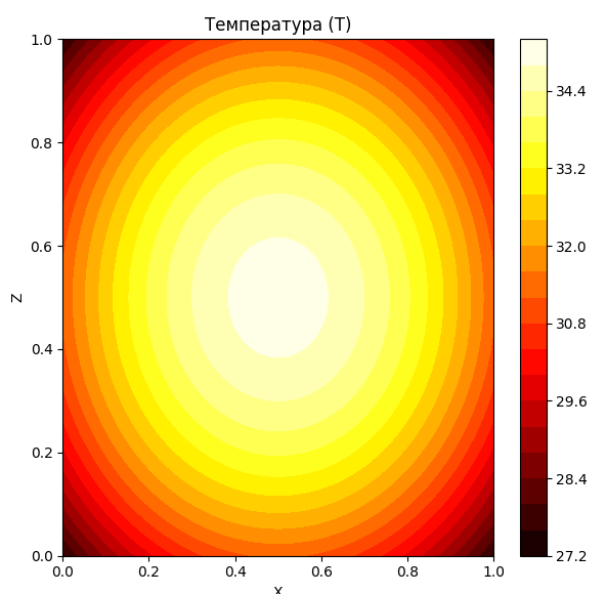


Рис. 2 Изменение температуры в пшеничном гумне после 20 дней хранения при $T_0 = 27^\circ\text{C}$, $T(x, z, 0) = 35^\circ\text{C}$

Рисунок 2 представляет собой контурную диаграмму, отображающую распределение температуры. Температура увеличивается от центра к краям по концентрическим кругам. Цветовая шкала показывает температурный диапазон приблизительно от 27 до 35 градусов. Оси X и Z представляют пространственные координаты.

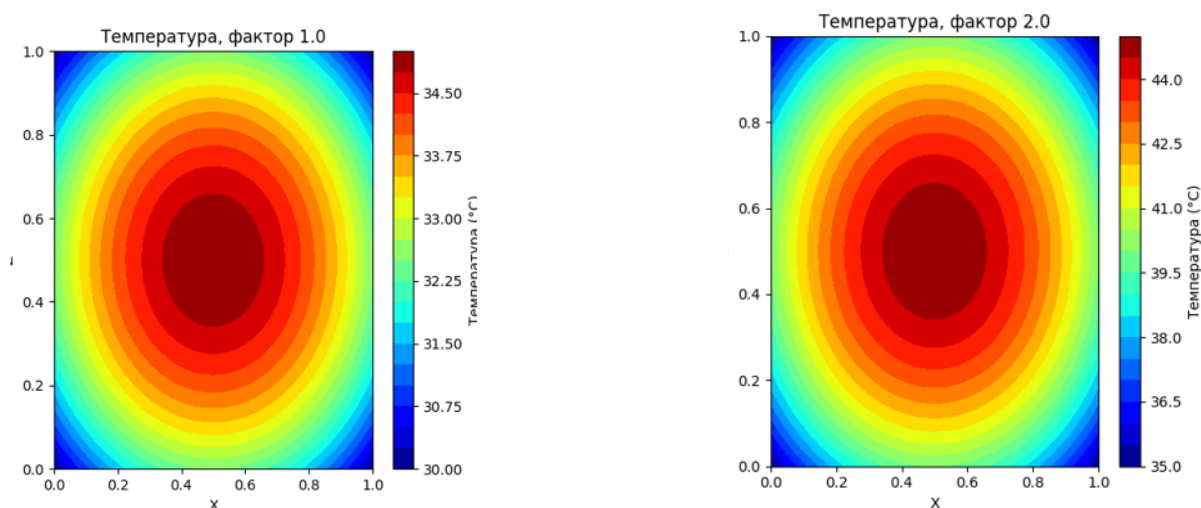


Рис. 3 Изменение температуры в пшеничном гумне после 30 дней хранения

а) $T_0 = 30^\circ\text{C}$, $T(x, z, 0) = 35^\circ\text{C}$ **б)** $T_0 = 35^\circ\text{C}$, $T(x, z, 0) = 40^\circ\text{C}$

Рисунок 3 представляет собой контурную диаграмму, отображающую распределение температуры. На диаграмме видно, что температура увеличивается от центра к краям по концентрическим кругам. Цветовая шкала на рисунке 3(а) показывает температурный диапазон от 30°C до 35°C , а на рисунке 3(б) — от 35°C до 44°C . В центре диаграммы наблюдаются самые низкие значения температуры, а по краям — самые высокие.

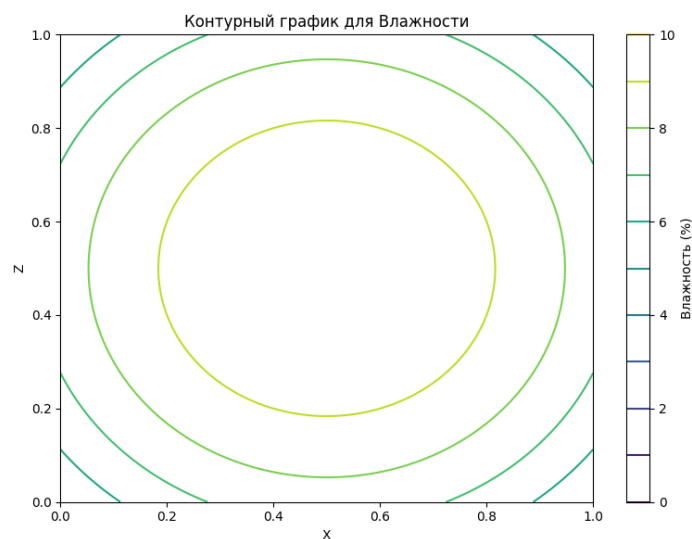


Рис. 4 Распределение влажности в пшеничном гумне после 10 дней хранения при $Q_0 = 0\%$, $Q(x, z, 0) = 10\%$

Рисунок 4 представляет собой контурный график влажности. Уровень влажности изображен концентрическими окружностями и изменяется от 0% до 10% . Влажность увеличивается от центра к краям. Оси X и Z представляют пространственные координаты, нормированные от 0 до 1. Заголовок графика указывает, что это контурный график влажности. Цветовая шкала показывает уровни влажности.

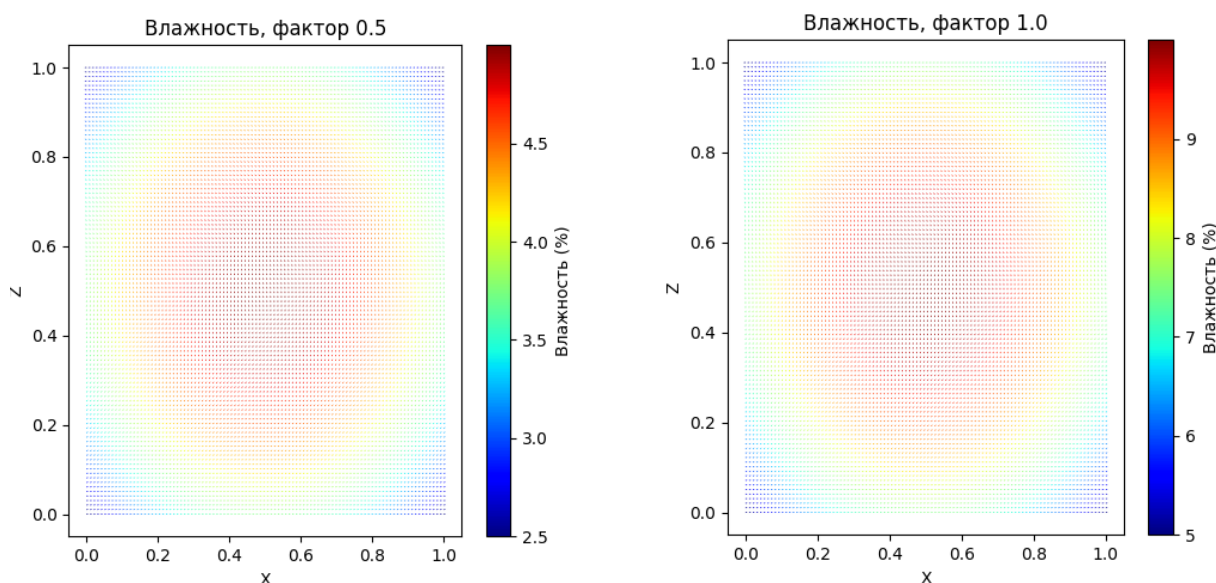


Рис. 5 Распределение влажности в пшеничном гумне после 30 дней хранения

с) $Q_0 = 8\%$, $Q(x, z, 0) = 14\%$ d) $Q_0 = 10\%$, $Q(x, z, 0) = 18\%$

Рисунок 5 содержит четыре контурных графика, демонстрирующих распределение влажности, зависящее от некоторого фактора (коэффициента или параметра модели). Каждый график показывает влажность в процентах (%) на плоскости $X-Z$, где X и Z – нормированные пространственные координаты (от 0 до 1). Цветовой градиент отображает уровень влажности: низкие значения – синим, высокие – красным цветом. Во всех случаях распределение влажности симметрично, с максимальной влажностью в центре и постепенным уменьшением к краям. Графики визуально демонстрируют влияние фактора на распределение влажности.

На графиках показано распределение температуры по центральной и периферийной областям. По ним чётко видны температурные различия в среде хранения. Обычно температура в центре зерновых продуктов может быть выше, поскольку тепло более сильно влияет на центральные части из-за внешних условий (например, температуры воздуха). Эти изменения зависят от условий хранения (вентиляция, влажность воздуха) и активности вредителей. Например, вредители могут локально повышать температуру, что приводит к ускоренному разложению зерна.

5 Заключение

В этой статье разработана математическая модель изменения влажности, внутреннего теплообмена и воздействия внешней температуры на процесс хранения зерна, с учётом влияния вредителей, температуры и влажности. Модель основана на методе конечных разностей, который аппроксимирует граничные условия для пространственных и временных переменных с двойной точностью и обеспечивает абсолютную стабильность.

Модель направлена на мониторинг и прогнозирование процессов тепло- и влагообмена в зерновых продуктах, учитывая внешние условия, содержание влаги и влияние вредителей, с целью повышения эффективности условий их хранения. Эта модель и её результаты имеют важное значение для сохранения качества продукции в сельском хозяйстве и эффективного управления ресурсами. Выше представлены графические результаты данной модели.

Литература

- [1] *Adizova Z., Shadmanov I.* Mathematical Modeling of Heat and Moisture Exchange Processes for Grain Storage. – 2024. – <https://doi.org/10.1063/5.0241493>.
- [2] *Ravshanov N., Shadmanov I.U.* Multidimensional model of heat-moisture transport in porous media. Journal of Physics: Conference Series 1546 – 2020. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1546/1/012098>.
- [3] *Равшанов Н., Шадманов И.У.* Математическая модель термического состояния пористого тела. Научно-технический и информационно-аналитический журнал ТУИТ, Ташкент, – 2019. – №1 (49), – С. 61–77.
- [4] *Равшанов Н. и др.* Разработка математической модели для контроля и прогнозирования процессов теплопередачи и потери влаги при хранении пористых тел // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – № 6(62). – 2024.
- [5] *Thi V.D. et al.* Numerical analysis of heat and moisture transfer in porous material. International Conference On Materials and Energy ICOME 16, France, – P. 175–179.
- [6] *Подурец М.А. и др.* Модель для полностью закрытого состояния пористого тела. Математическое моделирование, – 2024. 36(6), – P. 41–50.
- [7] *Дорняк О.Р. и др.* Теоретическое исследование тепловых и механических взаимодействий в контактных парах. Техн. пробл. теплотехники, – 2019. 1(4), – P. 50–60.
- [8] *Logunova O.S. et al.* Mathematical Models for Investigation of the Heat Condition of Objects. Electrotechnical Systems and Complexes, 43(2), – P. 25–36. – 2019.
- [9] *Boyce D.S.* Heat and moisture transfer in deep grain layers. J. Appl. Phys., – 2016. 37(5), – P. 1602–1608.
- [10] *Shadmanov I. et al.* Mathematical model for the storage and drying processes of agricultural products in open fields. BIO Web of Conf., – 2024. 113, 05005.
- [11] *Abduganieva F.Z. et al.* Use of sorption-connection method in the drying of agricultural products. The Peerian Journal, Article 308.
- [12] *Shadmanov I., Shafiyev T.* Mathematical model of heat and moisture transfer in irregular porous bodies. E3S Web of Conf., – 2023. 43, 101060.
- [13] *Liu W. et al.* Heat and moisture transfer in drying grain: steel distribution analysis. Agriculture, 13(8), 1470. <https://doi.org/10.3390/agriculture13081470>.
- [14] *Shadmanov I.* Mathematical model for simultaneous heat and moisture transfer in open fields. Int. Conf. on Thermal Engineering and Applications, – 2024. 1(1).
- [15] *Haghi A.K., Amanifard N.* Analytical approach to potato drying. Braz. J. Chem. Eng., – 2024. 41(4).
- [16] *Ravshanov N. et al.* Mathematical model and numerical algorithm for heat and moisture transfer. E3S Web of Conf., – 2021. 264, 01038.
- [17] *Haghi A.K., Amanifard N.* Heat and Mass Transfer in Infrared Assisted Heat Pump Drying. Agric. Eng., 2024. <https://doi.org/10.2478/agriceng-2024-0006>.
- [18] *Iqbal M. J. et al.* Heat and mass transfer modeling for fruit drying: A review. MOJ Food Processing & Technology, – 2019. – Vol. 7, – 222 p.
- [19] *Rahnama A., Najafpour S., Bahrami M.* Development of novel isothermal exchanger for humidity control. Appl. Therm. Eng., – 2025. 125227. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2024.125227>.
- [20] *Малеева О.Л.* Разработка метода оценки качества зерновой массы при хранении // Новые технологии. – 2009. – №2.

UDC 519.6+004.9:504.064

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR MONITORING AND FORECASTING HEAT AND MOISTURE EXCHANGE PROCESSES DURING GRAIN STORAGE CONSIDERING PEST IMPACT

¹*Ravshanov N.*, ²*Shadmanov I.U.*, ^{2*}*Adizova Z.M.***zuhroadizova096@gmail.com*¹Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,
17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan;²Bukhara State University,
Muhammad Ikbol 11, Bukhara, 705018 Uzbekistan.

This article presents a two-dimensional mathematical model describing the process of heat and moisture exchange in porous media for monitoring and forecasting their condition during storage of grain products, as well as the impact of pests. The results of numerical calculations based on mathematical software showed how the temperature and humidity of grain interact and change over time depending on storage conditions. In particular, the results demonstrate the distribution of temperature and humidity from the center to the edges, as well as the change in this process under the influence of pests. The model allows analyzing the effect of storage conditions (ventilation, air humidity) on temperature and humidity. This confirms the efficiency of the computational model and its usefulness for monitoring the impact of pests and optimizing storage conditions for grain products.

Keywords: model, grain products, storage processes, heat exchange, moisture transfer, pests, monitoring, forecasting.

Citation: Ravshanov N., Shadmanov I.U., Adizova Z.M. 2025. Development of a mathematical model for monitoring and forecasting heat and moisture exchange processes during grain storage considering pest impact. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(64):30-45.

DOI: https://doi.org/10.71310/pcam.2_64.2025.03.