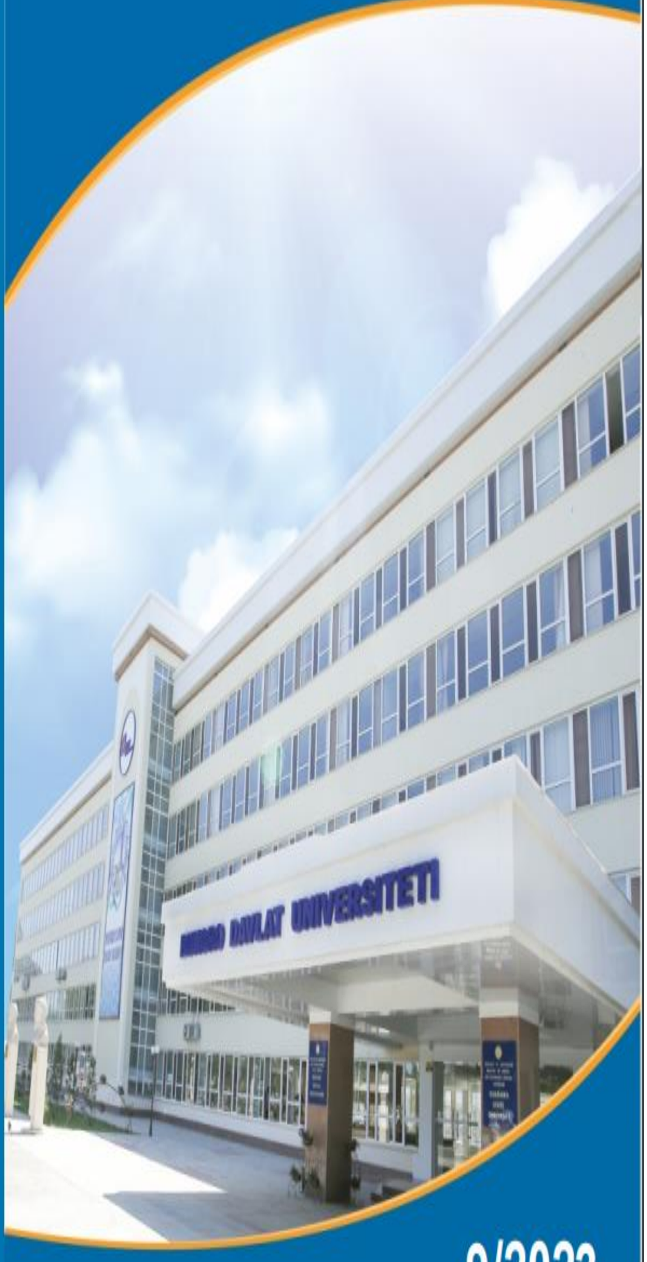
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI



9/2023

https://buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

9/2023

E-ISSN 2181-1466

ISSN 2181-6875

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 9, oktabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruruiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

УДК 517.923

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Суяров Турсунбек Ражаббой угли,
[1]*Бухарский филиал математического института им. В.И. Романовского в Академии наук Республики Узбекистан,*
[2]*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,*
tsuyarov007@gmail.com

Аннотация. *В этой статье мы представляем аналитический метод решения дробной телеграфной задачи, соответствующий по времени. Многие физические процессы представляются системой уравнений гиперболического типа первого и второго порядка. Например, телеграфное уравнение электромагнитных колебаний, динамические уравнения теории упругости и другие. Хорошо известно, что уравнения второго порядка выводятся из них с помощью ряда дополнительных ограничений.*

Ключевые слова: *интегральные уравнения типа Вольтерра, Метод Фурье, соответствующе дробное уравнение.*

DIRECT PROBLEM CONFORMABLE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Abstract. *In this paper, we present a time-consistent analytical method for solving the fractional telegraph problem. Many physical processes are represented by a system of hyperbolic equations of the first and second order. For example, the telegraph equation of electromagnetic oscillations, dynamic equations of the theory of elasticity and others. It is well known that second-order equations are derived from them using a number of additional restrictions.*

Keywords: *integral equations of Volterra type, Fourier method, conformable fractional equation.*

MOS KELUVCHI FRAKSIONAL DIFFUZIYA TENGLAMA UCHUN TOG'RI MASALA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada biz kasrli telegraf muammosini hal qilish uchun vaqtga mos keladigan analitik usulni taqdim etamiz. Ko'pgina fizik jarayonlar birinchi va ikkinchi darajali giperbolik tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi. Masalan, elektromagnit tebranishlarning telegraf tenglamasi, elastiklik nazariyasining dinamik tenglamalari va boshqalar. Ma'lumki, ikkinchi tartibli tenglamalar ulardan bir qancha qo'shimcha cheklovlar yordamida olinadi.*

Kalit so'zlar: *Volterra tipidagi integral tenglamalar, Furye usuli, mos keladigan kasr tenglama.*

Введение. Решение прямых задач непосредственно приводит к решению этих систем. При α=1 уравнение в этой работе представляет собой классическое телеграфное уравнение, введенное Оливером Хевисайдом [1]. Это уравнение представляет собой линейное гиперболическое уравнение второго порядка и моделирует несколько явлений во многих различных областях, таких как анализ сигналов [2], распространение волн [3], теория случайных блужданий [4]. Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн широко изучаются. Нелинейные задачи обратных коэффициентов с различными типами достаточной условия часто встречаются в литературе [например, [5-7] и ссылки в них].

Методы. Этот метод основан на Метод Фурье и свойства соответствующего дробного исчисления.

Полученные результаты. *В статье рассматривается прямая задача – это начально-краевая задача для этой системы на конечном отрезке [0, T]. При полном выполнении некоторых условий данных прямая задача сводится к решению интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных. Кроме того, доказана теорема о локальной существует единственное решение прямой задачи.*

1. Постановка задачи

$$\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u(x,t) + 2c\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x,t) + \mathrm{q}(t)u(x,t) = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t),$$

$(x,t) \in \Omega_T, 0 < \alpha \leq 1,$ (1.1)

начальные условия

$u(x,0) = \varphi(x), \quad \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq \ell,$ (1.2)

и граничные условия

$u(0,t) = u(0,\ell) = 0$ (1.3)

где $\Omega_T := \{(x,t): 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$ с $\ell, T > 0$ задано, $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$ представляет собой лево соответствующему дробную производную порядка $0 < \alpha \leq 1$ относительно t и $\mathcal{D}_t^{(2\alpha)} = \mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\right)$. $f(x,t)$ является исходным термином и α, k являются константами такими, что $k > 0, c > 0$.

Функции $\varphi(x), \psi(x)$, и $f(x,t)$ удовлетворяют следующим предположениям

A1) $\{\varphi, \psi\} \in C^3[0,l], \{\varphi^{(4)}, \psi^{(3)}\} \in L_2[0,l], \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0$;

A2) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ and for $t \in [0,T], f(\cdot,t) \in C^3[0,l], f^{(3)}(\cdot,t) \in L_2[0,l], f(0,t) = f(l,t) = 0, f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0$

Статья организована следующим образом: В разделе 2 мы даем некоторые основные определения и результаты, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 получены существование и единственность решения прямой задачи (1.1)-(1.3).

2. Предварительные сведения о соответствующем дробном исчислении

В этом разделе мы начнем с напоминания некоторых понятий о соответствую-щем дробном исчислении.

Определение 2.1 ([8]). *Пусть* $\varphi: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *заданная функция и* $\alpha \in]0,1]$. *Тогда лево соответствующий дробная производная порядка α определяется формулой:*

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - \varphi(t)}{\varepsilon}. \qquad (2.1)$$

Если $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$ *существует на* $]a, +\infty[$, *то* $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(a) = lim_{t\to a^+} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$. *Если* $a = 0$, *определение (2.1) введено Халилом и др. [9]. В этом случае мы говорим, что* φ, α *-дифференцируема.*

Определение 2.2 *([9]). Пусть* $\alpha \in]0,1]$ *и* $\varphi: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$*- вещественная функция. Лево соответствующий дробный интеграл от* φ *порядка α от 0 до t определяется следующим образом:*

$$I_\alpha \varphi(t) := \int_0^t s^{\alpha-1}\varphi(s)ds, t \geq 0. \qquad (2.2)$$

Лемма 2.1 ([12]). *Пусть* $\varphi: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *— заданная функция и* $0 < \alpha \leq 1$. *Тогда для всех* $t > 0$ *имеем:*

1. *Если* φ *непрерывна, то* $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}[\mathcal{I}_\alpha \varphi(t)] = \varphi(t)$.
2. *Если* φ, α *-дифференцируема, то* $\mathcal{I}_\alpha\left[\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)\right] = \varphi(t) - \varphi(0)$.

Определение 2.3 ([8]). *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$ *и* $\varphi: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *- вещественная функция. Тогда дробное преобразование Лапласа порядка* α, *начиная с нуля* φ, *определяется следующим образом:*

$$\mathcal{L}_\alpha[\varphi(t)](s) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\varphi(t)e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}dt. \qquad (2.3)$$

Предложение 2.1 ([8]). 1. Соответствующее дробное преобразование Лапласа представляет собой линейный оператор:

$$\mathcal{L}_\alpha\{\mu f(t) + \lambda g(t)\}(s) = \mu\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\} + \lambda\mathcal{L}_\alpha\{g(t)\}, \qquad (2.4)$$

где μ и λ — действительные константы.

2. *У нас есть,*

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{f(t)e^{-p\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}\Big|_{s=s+p}, s > -p. \qquad (2.5)$$

3. *Пусть,* $\alpha \in [0,1]$ *и* $f(t), g(t)$ *являются функциями.Соответствующее дробное преобразование Лапласа продукта свертки* f *и* g *определяется формулой:*

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f * g)(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s), \qquad (2.6)$$

где,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f\left((t^\alpha - \tau^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)g(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.$$

Теорема 2.1 ([8]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\varphi: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ — дифференцируемая вещественная функция. Тогда у нас есть:

$$\mathcal{L}_\alpha\left[\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\varphi(t)\right](s) = s\mathcal{L}_\alpha[\varphi(t)](s) - \varphi(0).$$

Введем следующую теорему, которая будет использоваться далее в данной статье.

Теорема 2.2 ([7]). Пусть $g: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\eta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta < \gamma$. Для всех $0 < \alpha \leq 1$, задача начального значения:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}y(t) + 2\eta\mathcal{D}_t^{(\alpha)}y(t) + \gamma^2 y(t) = g(t),\\ y(0) = y_0, \mathcal{D}_t^{(\alpha)}y(0) = y_\alpha.\end{cases}$$

допускает единственное решение, заданное формулой

$$y(t) = y_0 e^{-\eta\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{y_0\eta + y_\alpha}{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}}e^{-\eta\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}}\int_0^t g\left((t^\alpha-\tau^\alpha)^{1/\alpha}\right)e^{-\eta\frac{\tau^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{\tau^\alpha}{\alpha}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.$$

Теорема 2.3. Пусть $\alpha > 0$ и $f: [a,b] \to R$ - заданная функция, удовлетворяющая условиям

- $\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau, \forall t \in [0,T]$, существует для некоторых $\alpha \in (0,1]$.
- $m \leq f(t) \leq M, \forall t \in [0,T]$, для некоторых действительных чисел m и M.

Тогда существует $\mu \in [m,M]$ такой, что such that

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau = \mu\frac{t^\alpha}{\alpha}. \qquad (2.7)$$

Доказательство. По свойству монотонности обычных определенных интегралов [10] имеем

$$m\frac{T^\alpha}{\alpha} = \int_0^T \frac{m}{\tau^{1-\alpha}} \cdot dt \leq \int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau \leq \int_0^T \frac{M}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau \leq M\frac{T^\alpha}{\alpha}.$$

Умножая $\frac{\alpha}{T^\alpha}$, тогда $m \leq \mu \leq M$, где $\mu = \frac{\alpha}{T^\alpha}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau$. Тем самым, (2.7) получено и доказательство завершено.

Лемма 2.2. Пусть r непрерывная неотрицательная функция на интервале $[a,b]$ и δ , p неотрицательные константы такие, что

$$r(t) \leq \delta + \int_a^t pr(s)(s-a)^{\alpha-1}ds, (t \in [a,b]).$$

Тогда для всех $t \in [a,b]$

$$r(t) \leq \delta e^{p\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}.$$

3.Исследование прямой задачи

Сначала предположим, что решение однородного уравнения в (1.1)-(1.3). Будем искать частные решения задачи (1.1)-(1.3) в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (3.1)$$

Подставив в (1.1)-(1.3), получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases}X''(x) + \lambda X(x) = 0,\\ X(0) = X(\ell) = 0.\end{cases} \qquad (3.2)$$

Эта задача имеет собственные значения

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

и собственные функции

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

Теперь ищем решение неоднородной задачи (1.1)-(1.3) вида

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \qquad (3.3)$$

Чтобы определить $u_n(t)$, разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),\text{ где } f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx. \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (1.1)-(1.3), получаем

$$\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u_n(t)+2c\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_n(t)+q(t)u_n(t)=-\lambda_n k^2 u_n(t)+f_n(t),$$
$$u_n(0)=\varphi_n,\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_n(0)=\psi_n\,. \qquad (3.5)$$

Мы предполагаем, что

$$0\le\frac{c^2}{k^2}<\lambda_1, \qquad (3.6)$$

где $\lambda_1=\pi^2/\ell^2$ – наименьшее собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (3.2). Используя условие (3.6), теорему 2.2, имеем решения задача (3.5) эквивалентна в пространстве C[0, T] интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_n(t)=\varphi_n e^{-c\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\gamma_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{2c\varphi_n+\psi_n}{\sqrt{\lambda_n k^2-c^2}}e^{-c\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}}\int_0^t f_n(\tau)e^{-c\frac{t^\alpha-\tau^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma_n}\frac{t^\alpha-\tau^\alpha}{\alpha}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}}\int_0^t q(\tau)u_n(\tau)e^{-c\frac{t^\alpha-\tau^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma_n}\frac{t^\alpha-\tau^\alpha}{\alpha}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \qquad (3.7)$$

где $\sqrt{\lambda_n k^2-c^2}=\sqrt{\gamma_n}$.

Сначала докажем следующую лемму для функции $u_n(t)$.

Лемма 3.1. Имеем следующие оценки

$$|u_n(t)|\le\left(C_1|\varphi_n|+C_2\frac{2c|\varphi_n|+|\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right)exp\left\{C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right\},$$
$$\left|\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u_n(t)\right|\le 2c\Upsilon_n(\mathrm{T})+(\|q\|_{C[0,T]}+\lambda_n k^2)\Psi_n+\|f_n\|_{C[0,T]}. \qquad (3.8)$$

Доказательство. Решение (3.7) ограничено в $C^\alpha[0,T]$ и удовлетворяет условиям A1), A2) и используем лемма 2.2

$$|u_n(t)|\le C_1|\varphi_n|+C_2\frac{2c|\varphi_n|+|\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}+C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\int_0^t u_n(\tau)\tau^{\alpha-1}d\tau,$$

Используя лемму 2.2, получаем следующее неравенство

$$|u_n(t)|\le\left(C_1|\varphi_n|+C_2\frac{2c|\varphi_n|+|\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right)exp\left\{C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right\}=\Psi_n,$$

Вторую часть леммы 3.1 мы получаем из уравнения задачи (3.5) и первая оценка леммы 3.1 и сначала мы находим функции для оценки $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_n(t)$;

$$\left|\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_n(t)\right|\le(c+\sqrt{\gamma_n})\left(C_1\varphi_n+C_2\frac{2c\varphi_n+\psi_n}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}+\right.$$
$$\left.+C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}\Psi_n(T)}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right)=\Upsilon_n(T),$$

и получим оценки для функции $\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u_n(t)$;

$$\left|\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u_n(t)\right|\le 2c\Upsilon_n(T)+(\|q\|_{C[0,T]}+\lambda_n k^2)\Psi_n(T)+\|f_n\|_{C[0,T]}.$$

Лемма доказана.

Решения задачи (1.1)-(1.3) будем искать в виде (3.3) ряда Фурье. Формально продифференцировав ряд (3.3) почленно, получим следующие ряды

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (3.9)$$
$$\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathcal{D}_t^{(2\alpha)}u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (3.10)$$

$$u_{xx}(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \qquad (3.11)$$

Докажем равномерную сходимость рядов (3.3), (3.9) - (3.10) в области Ω. Это ряд для любого $(x,t)\in\bar{\Omega}_T$ мажорируется

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}(c+\sqrt{\gamma_n})\left(C_1\varphi_n+C_2\frac{2c\varphi_n+\psi_n}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}+C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}\Psi_0}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right),$$

$$2c\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\Upsilon_n(T)+(\|q\|_{C[0,T]}+\lambda_n k^2)\Psi_n(T)+\|f_n\|_{C[0,T]}\right),$$

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left(C_1|\varphi_n|+C_2\frac{2c|\varphi_n|+|\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}}+C_3\frac{\|f_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right)exp\left\{C_3\frac{\|q\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{T^\alpha}{\alpha}\right\}.$$

где $\bar{\Omega}_T:=\{(x,t):0\le x\le l, 0\le t\le T\}$.

Мы получаем следующей вспомогательной леммы.

Лемма 3.2. Если условия A1), A2) выполнены, то имеют место равенства

$$\varphi_n=\frac{1}{\lambda_n^2}\varphi_n^{(4)},\psi_n=\frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}}\psi_n^{(3)},f_n=\frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}}f_n^{(3)} \qquad (3.12)$$

где

$$\varphi_n^{(4)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi^{(4)}(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx, \psi_n^{(3)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi^{(3)}(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx,$$

$$f_n^{(3)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f^{(3)}(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx,$$

со следующими оценками:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{(4)}\right|^2\le\|\varphi^{(4)}\|_{L_2[0,l]}, \sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_n^{(3)}\right|^2\le\|\psi^{(3)}\|_{L_2[0,l]},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n^{(3)}\right|^2\le\|f^{(3)}\|_{L_2[0,T]}. \qquad (3.13)$$

Если функции $\varphi(x),\psi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3.2, то в силу представлений (3.12) и (3.13) ряды (3.3), (3.9) - (3.10) сходятся равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}_T$, поэтому функция $u(x,t)$ удовлетворяет соотношениям (1.1)–(1.3).

Используя приведенные выше результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. Если выполнены $q(t)\in C[0,T]$, A1), A2), то существует единственное решение прямой задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)\in C[0,T]$.

Заключение.

Методом Фурье получено аналитическое решение дробно-временного телеграфного уравнения с тремя граничными условиями. Дробная производная по времени рассматривается в созвучном смысле.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Хевисайд О. Электромагнитная теория, Том-2. Издательство «Челси», Нью-Йорк, 1899 г.

2. Джордан П. и Пури А.. Распространение цифрового сигнала в дисперсионных средах. Дж. Прил. Phys., 85(3):1273-1282, 1999.

3. Уэстон В. и Хе С. Волновое расщепление телеграфного уравнения в r3 и его применение к обратному рассеянию. Обратная задача, 9:789-812, 1993.

4. Банасиак Дж. и Мика Дж. Сингулярно возмущенные телеграфные уравнения с приложениями в теории случайных блужданий. Дж. Прил. Математика. Стох. Анал., 11(1):9–28, 1998.

5. Дурдиев Д.К. «О единственности определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа». Ж. Самарский гостех. ун-та, сер. Физ. Математика. Sci., 19 (4) 658-666 (2015).

6. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А., Двумерная задача определения ядра в вязкоупругой пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью. Математические методы в прикладном наук 43, 8776-8796.

7. Саад Абделькебира, Брахим Нуириб. Аналитический метод решения дробного телеграфного уравнения с соответствующем по времени. Филомат 37:9 (2023), 2773–2785.

8. Т. Абдельджавад. О соответствующем дробном исчислении. Дж. Компьютер. Прил. Матем., 279:57–66, 2015.

9. Халил Р., Аль-Хорани М., Юсеф А. и Сабабхе М.. Новое определение дробной производной. Дж. Компьютер. Прил. Матем., 264:65-70, 2014.

10. Юнус А., Абдельджвад Т. и Тазин Г. О критериях устойчивости фрактальных дифференциальных систем соответствующего типа. Фракталы, 28(8):1-9, 2020.