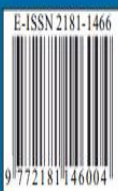




# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

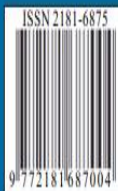
Научный вестник Бухарского государственного университета  
Scientific reports of Bukhara State University

9/2023



E-ISSN 2181-1466

9 772181 46004 1



ISSN 2181-6875

9 772181 687004



@buxdu\_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz



9/2023

<https://buxdu.uz>

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI**  
**SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY**  
**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Ilmiy-nazariy jurnal**  
**2023, № 9, oktabr**

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.  
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

**Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
**Elektron manzil:** nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

**TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Bosh muharrir o'rinbosari:** Rasulov To'liq Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

**Mas'ul kotib:** Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

**Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich**, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

**Danova M.**, filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

**Margianti S.E.**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

**Minin V.V.**, kimyo fanlari doktori (Rossiya)

**Tashqarayev R.A.**, texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

**Mo'minov M.E.**, fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

**Mengliyev Baxtiyor Rajabovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**Adizov Baxtiyor Rahmonovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Abuzalova Mexriniso Kadirovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonov Muxtor Raxmatovich**, texnika fanlari doktori, professor

**Barotov Sharif Ramazonovich**, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

**Baqoyeva Muhabbat Qayumovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich**, biologiya fanlari doktori, professor

**Jumayev Rustam G'aniyevich**, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

**Djurayev Davron Raxmonovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Olimov Shirinboy Sharofovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Qahhorov Siddiq Qahhorovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Umarov Baqo Bafoyevich**, kimyo fanlari doktori, professor

**Murodov G'ayrat Nekovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**O'rayeva Darmonoy Saidjonovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Hayitov Shodmon Ahmadovich**, tarix fanlari doktori, professor

**To'rayev Halim Hojiyevich**, tarix fanlari doktori, professor

**Rasulov Baxtiyor Mamajonovich**, tarix fanlari doktori, professor

**Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Quvvatova Dilrabo Habibovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Axmedova Shoira Nematovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bekova Nazora Jo'rayevna**, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

**Amonova Zilola Qodirovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Hamroyeva Shahlo Mirjonovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Nigmatova Lola Xamidovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Boboyev Feruz Sayfullayevich**, tarix fanlari doktori

**Jo'rayev Narzulla Qosimovich**, siyosiy fanlar doktori, professor

**Rasulov Zubaydullo Izomovich**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Qurbonova Gulnoz Negmatovna**, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

**Zaripov Gulmurot Toxirovich**, texnika fanlari nomzodi, dotsent

<b>Jumayeva Ch.I.</b>	Ba'zi to'rt o'lchamli Li algebralarining lokal ichki differensiallashlari	106
<b>Зарипов Г.Т.</b>	Технология производства напитков на основе составляющих природного характера	110
<b>Меражова Ш.Б.</b>	Эквивалентность обратной задачи поставленной уравнению смешанного типа интегральному уравнению Фредгольма 1-рода	114
<b>Bazarova S.J.</b>	Elementary thermodynamics	120
<b>Суяров Т.Р.</b>	Прямая задача для соответствующего уравнения дробной диффузии	127
<b>TILSHUNOSLIK *** LINGUISTICS *** ЯЗЫКОЗНАНИЕ</b>		
<b>Navruzova M.G.</b>	Tibbiy birliklarning folklor asarlaridagi genderologik tavsifi	133
<b>Rahmanov B.A.</b>	Surxondaryo etnodialektal xarakterdagi maqol va matallarning turlari hamda lingvomadaniy xususiyatlari	137
<b>Nazarova S.A.</b>	Turkiy tillarda shaxs tavsifining sintaktik ifodasi xususida	142
<b>Akramov I.I.</b>	An aphorism as an entire passage: mechanisms of structural-semantic organization	148
<b>Nabiyeva Sh.I.</b>	Formation and orthological genesis of the English literary language norms	154
<b>Saidova M.U.</b>	Ingliz adabiyotshunoslik lug'atlari xususida mulohazalar	158
<b>Umurova Kh. Kh.</b>	Linguoculturological analysis of axiological concepts of wedding rite in different cultures	164
<b>Жўраева Ю.Ғ</b>	Ўзбек хотин-қизлар исмларида ой лексемасининг ўрни ва қўлланиши	168
<b>Vaxidova F.S</b>	Ziyorat turizmi terminlarining struktural qoliplari	173
<b>Kilichev B.E.</b>	Regionim – Buxoro toponimlarining bir guruhi	178
<b>Мейлиева М.О.</b>	Использование современных подходов в преподавании русского языка в условиях билингвизма: актуальные проблемы и рекомендации	182
<b>Каримова Г.Х.</b>	Лингвокультурологические особенности экклезионимов джизакской области	186
<b>Қаҳҳорова Г.Ш.</b>	Юкламаларнинг ёрдамчи сўзлар билан вазифадошлиги	192
<b>ADABIYOTSHUNOSLIK *** LITERARY CRITICISM *** ЛИТЕРАТУРОВЕДЕНИЕ</b>		
<b>Latipova S.T.</b>	Tarixiy asarlarda Buxoroning hukmdor ayoli tavsifi	203
<b>Meliyev X.N.</b>	Gulbadan Begimning "Humoyunnoma" asari va tarjimalarida keltirilgan ruboiyning adabiy tahlili	209
<b>Tўхсанов Қ.Р.</b>	Румий "Маснавийи маънавий" манзумасининг аслият ва ўзбекча таржимасининг рақамларда берилиши	213
<b>Болтаева Г.Ш.</b>	O'zbek adabiyotida ilk Muxammas	221
<b>Abdullayeva X.N.</b>	Ingliz hamda o'zbek ertaklarida g'aroyib safar motivi	225
<b>Habibova M.N.</b>	Description of the Orient in Lawrence's "Seven pillars of wisdom"	229
<b>Karamova Sh.L.</b>	Aruz – metaforik tafakkurning keng maydoni sifatida	234
<b>Karimova Sh.K.</b>	Zamonaviy ingliz va o'zbek she'riyatida tovush takrorlarining o'ziga xos jihatlari	238
<b>Muxtorova U.T.</b>	Mumtoz adabiyot namunalari ilohiy motivlar va rivoyatlarning qo'llanilish tamoyillari	246
<b>Urazaliyeva M.G'.</b>	Maya Anjelu asarlarining adabiy tanqidchilar tomonidan tahlil qilinishi	251
<b>Xolova M.B.</b>	Badiiy matnda xushmuomalalik strategiyalarining voqelanishi	257

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ  
ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Суяров Турсунбек Ражаббой угли,

<sup>1</sup>Бухарский филиал математического института им.

В.И. Романовского в Академии наук Республики Узбекистан,

<sup>2</sup>Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,[tsuyarov007@gmail.com](mailto:tsuyarov007@gmail.com)

**Аннотация.** В этой статье мы представляем аналитический метод решения дробной телеграфной задачи, соответствующий по времени. Многие физические процессы представляются системой уравнений гиперболического типа первого и второго порядка. Например, телеграфное уравнение электромагнитных колебаний, динамические уравнения теории упругости и другие. Хорошо известно, что уравнения второго порядка выводятся из них с помощью ряда дополнительных ограничений.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения типа Вольтерра, Метод Фурье, соответствующее дробное уравнение.

## DIRECT PROBLEM CONFORMABLE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

**Abstract.** In this paper, we present a time-consistent analytical method for solving the fractional telegraph problem. Many physical processes are represented by a system of hyperbolic equations of the first and second order. For example, the telegraph equation of electromagnetic oscillations, dynamic equations of the theory of elasticity and others. It is well known that second-order equations are derived from them using a number of additional restrictions.

**Keywords:** integral equations of Volterra type, Fourier method, conformable fractional equation.

## MOS KELUVCHI FRAKSIONAL DIFFUZIYA TENGLAMA UCHUN TOG'RI MASALA

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada biz kasrli telegraf muammosini hal qilish uchun vaqtga mos keladigan analitik usulni taqdim etamiz. Ko'pgina fizik jarayonlar birinchi va ikkinchi darajali giperbolik tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi. Masalan, elektromagnit tebranishlarning telegraf tenglamasi, elastiklik nazariyasining dinamik tenglamalari va boshqalar. Ma'lumki, ikkinchi tartibli tenglamalar ulardan bir qancha qo'shimcha cheklovlar yordamida olinadi.

**Kalit so'zlar:** Volterra tipidagi integral tenglamalar, Furiye usuli, mos keladigan kasr tenglama.

**Введение.** Решение прямых задач непосредственно приводит к решению этих систем. При  $\alpha=1$  уравнение в этой работе представляет собой классическое телеграфное уравнение, введенное Оливером Хевисайдом [1]. Это уравнение представляет собой линейное гиперболическое уравнение второго порядка и моделирует несколько явлений во многих различных областях, таких как анализ сигналов [2], распространение волн [3], теория случайных блужданий [4]. Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн широко изучаются. Нелинейные задачи обратных коэффициентов с различными типами достаточной условия часто встречаются в литературе [например, [5-7] и ссылки в них].

**Методы.** Этот метод основан на Метод Фурье и свойства соответствующего дробного исчисления.

**Полученные результаты.** В статье рассматривается прямая задача – это начально-краевая задача для этой системы на конечном отрезке  $[0, T]$ . При полном выполнении некоторых условий данных прямая задача сводится к решению интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных. Кроме того, доказана теорема о локальной существует единственное решение прямой задачи.

## 1. Постановка задачи

$$D_t^{(2\alpha)} u(x, t) + 2cD_t^{(\alpha)} u(x, t) + q(t)u(x, t) = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t),$$

$$(x, t) \in \Omega_T, 0 < \alpha \leq 1, \quad (1.1)$$

начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1.2)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad (1.3)$$

где  $\Omega_T := \{(x, t): 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$  с  $\ell, T > 0$  задано,  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$  представляет собой лево соответствующему дробную производную порядка  $0 < \alpha \leq 1$  относительно  $t$  и  $\mathcal{D}_t^{(2\alpha)} = \mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\mathcal{D}_t^{(\alpha)})$ .  $f(x, t)$  является исходным термином и  $\alpha, k$  являются константами такими, что  $k > 0, c > 0$ .

Функции  $\varphi(x), \psi(x)$ , и  $f(x, t)$  удовлетворяют следующим предположениям

**A1)**  $\{\varphi, \psi\} \in C^3[0, \ell], \{\varphi^{(4)}, \psi^{(3)}\} \in L_2[0, \ell], \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \psi(0) = \psi(\ell) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0, \psi''(0) = \psi''(\ell) = 0$ ;

**A2)**  $f(x, \cdot) \in C[0, T]$  and for  $t \in [0, T], f(\cdot, t) \in C^3[0, \ell], f^{(3)}(\cdot, t) \in L_2[0, \ell], f(0, t) = f(\ell, t) = 0, f_{xx}(0, t) = f_{xx}(\ell, t) = 0$

Статья организована следующим образом: В разделе 2 мы даем некоторые основные определения и результаты, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 получены существование и единственность решения прямой задачи (1.1)-(1.3).

## 2. Предварительные сведения о соответствующем дробном исчислении

В этом разделе мы начнем с напомним некоторых понятий о соответствующем дробном исчислении.

**Определение 2.1** ([8]). Пусть  $\varphi: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  заданная функция и  $\alpha \in ]0, 1]$ . Тогда лево соответствующий дробная производная порядка  $\alpha$  определяется формулой:

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - \varphi(t)}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Если  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$  существует на  $]a, +\infty[$  то  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$ . Если  $\alpha = 0$ , определение (2.1) введено Халилом и др. [9]. В этом случае мы говорим, что  $\varphi, \alpha$ -дифференцируема.

**Определение 2.2** ([9]). Пусть  $\alpha \in ]0, 1]$  и  $\varphi: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ - вещественная функция. Лево соответствующий дробный интеграл от  $\varphi$  порядка  $\alpha$  от 0 до  $t$  определяется следующим образом:

$$I_\alpha \varphi(t) := \int_0^t s^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

**Лемма 2.1** ([12]). Пусть  $\varphi: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная функция и  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда для всех  $t > 0$  имеем:

1. Если  $\varphi$  непрерывна, то  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}[J_\alpha \varphi(t)] = \varphi(t)$ .
2. Если  $\varphi, \alpha$ -дифференцируема, то  $J_\alpha[\mathcal{D}_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)] = \varphi(t) - \varphi(0)$ .

**Определение 2.3** ([8]). Пусть  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\varphi: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  - вещественная функция. Тогда дробное преобразование Лапласа порядка  $\alpha$ , начиная с нуля  $\varphi$ , определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}_\alpha[\varphi(t)](s) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \varphi(t) e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt. \quad (2.3)$$

**Предложение 2.1** ([8]). 1. Соответствующее дробное преобразование Лапласа представляет собой линейный оператор:

$$\mathcal{L}_\alpha\{\mu f(t) + \lambda g(t)\}(s) = \mu \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\} + \lambda \mathcal{L}_\alpha\{g(t)\}, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  и  $\lambda$  — действительные константы.

2. У нас есть,

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{f(t)e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}_{s=s+\alpha}, \quad s > -\alpha. \quad (2.5)$$

3. Пусть,  $\alpha \in [0, 1]$  и  $f(t), g(t)$  являются функциями. Соответствующее дробное преобразование Лапласа продукта свертки  $f$  и  $g$  определяется формулой:

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f * g)(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(s), \quad (2.6)$$

где,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f\left((t - \tau)^\alpha\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.$$

**Теорема 2.1** ([8]). Пусть  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\varphi: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая вещественная функция. Тогда у нас есть:

$$\mathcal{L}_\alpha \left[ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \varphi(t) \right] (s) = s \mathcal{L}_\alpha [\varphi(t)](s) - \varphi(0).$$

Введем следующую теорему, которая будет использоваться далее в данной статье.

**Теорема 2.2** ([7]). Пусть  $g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция и  $\eta, \gamma \in \mathbb{R}_+$  такая, что  $\eta < \gamma$ . Для всех  $0 < \alpha \leq 1$ , задача начального значения:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} y(t) + 2\eta \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(t) + \gamma^2 y(t) = g(t), \\ y(0) = y_0, \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(0) = y_\alpha. \end{cases}$$

допускает единственное решение, заданное формулой

$$y(t) = y_0 e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos \left( \sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{y_0 \eta + y_\alpha}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin \left( \sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} \int_0^t g((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha}) e^{-\eta \frac{\tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left( \sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.$$

**Теорема 2.3.** Пусть  $a > 0$  и  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная функция, удовлетворяющая условиям

- $\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau, \forall t \in [0, T]$ , существует для некоторых  $\alpha \in (0, 1]$ .
- $m \leq f(t) \leq M, \forall t \in [0, T]$ , для некоторых действительных чисел  $m$  и  $M$ .

Тогда существует  $\mu \in [m, M]$  такой, что such that

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau = \mu \frac{t^\alpha}{\alpha}. \quad (2.7)$$

**Доказательство.** По свойству монотонности обычных определенных интегралов [10] имеем

$$m \frac{T^\alpha}{\alpha} = \int_0^T \frac{m}{\tau^{1-\alpha}} \cdot dt \leq \int_0^T \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau \leq \int_0^T \frac{M}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau \leq M \frac{T^\alpha}{\alpha}.$$

Умножая  $\frac{\alpha}{T^\alpha}$  тогда  $m \leq \mu \leq M$ , где  $\mu = \frac{\alpha}{T^\alpha} \int_0^T \frac{f(\tau)}{\tau^{1-\alpha}} \cdot d\tau$ . Тем самым, (2.7) получено и доказательство завершено.

**Лемма 2.2.** Пусть  $r$  — непрерывная неотрицательная функция на интервале  $[a, b]$  и  $\delta, p$  — неотрицательные константы такие, что

$$r(t) \leq \delta + \int_a^t pr(s)(s-a)^{\alpha-1} ds, (t \in [a, b]).$$

Тогда для всех  $t \in [a, b]$

$$r(t) \leq \delta e^{p \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}.$$

### 3. Исследование прямой задачи

Сначала предположим, что решение однородного уравнения в (1.1)-(1.3). Будем искать частные решения задачи (1.1)-(1.3) в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.1)$$

Подставив в (1.1)-(1.3), получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Эта задача имеет собственные значения

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

и собственные функции

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), n \in \mathbb{N}^*.$$

Теперь ищем решение неоднородной задачи (1.1)-(1.3) вида

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (3.3)$$

Чтобы определить  $u_n(t)$ , разложим  $f(x, t)$  в ряд Фурье по собственным функциям  $X_n(x)$ :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ где } f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (1.1)-(1.3), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u_n(t) + 2c\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_n(t) + q(t)u_n(t) &= -\lambda_n k^2 u_n(t) + f_n(t), \\ u_n(0) = \varphi_n \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_n(0) &= \psi_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Мы предполагаем, что

$$0 \leq \frac{c^2}{k^2} < \lambda_1, \quad (3.6)$$

где  $\lambda_1 = \pi^2/\ell^2$  – наименьшее собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (3.2).

Используя условие (3.6), теорему 2.2, имеем решения задачи (3.5) эквивалентна в пространстве  $C[0, T]$  интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \varphi_n e^{-\frac{c^2 t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\lambda_n k^2 - c^2}} e^{-\frac{c^2 t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\frac{c^2(\tau^\alpha - t^\alpha)}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{\tau^\alpha - t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t q(\tau) u_n(\tau) e^{-\frac{c^2(\tau^\alpha - t^\alpha)}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{\tau^\alpha - t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\sqrt{\lambda_n k^2 - c^2} = \sqrt{\gamma_n}$ .

Сначала докажем следующую лемму для функции  $u_n(t)$ .

**Лемма 3.1.** Имеем следующие оценки

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \left( C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp\left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\}, \\ \left| \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u_n(t) \right| &\leq 2c\gamma_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n + \|f_n\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Доказательство.** Решение (3.7) ограничено в  $C^\alpha[0, T]$  и удовлетворяет условиям A1), A2) и используем лемма 2.2

$$|u_n(t)| \leq C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t u_n(\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau,$$

Используя лемму 2.2, получаем следующее неравенство

$$|u_n(t)| \leq \left( C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp\left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} = \Psi_n,$$

Вторую часть леммы 3.1 мы получаем из уравнения задачи (3.5) и первая оценка леммы 3.1 и сначала мы находим функции для оценки  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_n(t)$ ;

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_n(t) \right| &\leq (c + \sqrt{\gamma_n}) \left( C_1 \varphi_n + C_2 \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + \right. \\ &\left. + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} \Psi_n(T) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) = \gamma_n(T), \end{aligned}$$

и получим оценки для функции  $\mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u_n(t)$ ;

$$\left| \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u_n(t) \right| \leq 2c\gamma_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n(T) + \|f_n\|_{C[0,T]}.$$

Лемма доказана.

Решения задачи (1.1)-(1.3) будем искать в виде (3.3) ряда Фурье. Формально продифференцировав ряд (3.3) почленно, получим следующие ряды

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (3.9)$$

$$\mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_t^{(2\alpha)} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (3.10)$$

$$u_{xx}(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.11)$$

Докажем равномерную сходимость рядов (3.3), (3.9) - (3.10) в области  $\Omega$ . Это ряд для любого  $(x, t) \in \bar{\Omega}_T$  мажорируется

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} (c + \sqrt{\gamma_n}) \left( C_1 \varphi_n + C_2 \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} \Psi_0 T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n}} \right), \\ & 2c \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} (\gamma_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n(T) + \|f_n\|_{C[0,T]}), \\ & \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left( C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n}} \right) \exp\left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n}} \right\}. \end{aligned}$$

где  $\bar{\Omega}_T := \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ .

Мы получаем следующей вспомогательной леммы.

**Лемма 3.2.** Если условия A1), A2) выполнены, то имеют место равенства

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{(4)}, \psi_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \psi_n^{(3)}, f_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} f_n^{(3)} \quad (3.12)$$

где

$$\varphi_n^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx, \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(3)}(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx,$$

$$f_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f^{(3)}(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx,$$

со следующими оценками:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(4)}|^2 & \leq \|\varphi^{(4)}\|_{L_2[0,l]}, \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}\|_{L_2[0,l]}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}|^2 & \leq \|f^{(3)}\|_{L_2[0,T]}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если функции  $\varphi(x), \psi(x)$  и  $f(x, t)$  удовлетворяют условиям леммы 3.2, то в силу представлений (3.12) и (3.13) ряды (3.3), (3.9) - (3.10) сходятся равномерно в прямоугольнике  $\bar{\Omega}_T$ , поэтому функция  $u(x, t)$  удовлетворяет соотношениям (1.1)–(1.3).

Используя приведенные выше результаты, получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** Если выполнены  $q(t) \in C[0, T]$ , A1), A2), то существует единственное решение прямой задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t) \in C[0, T]$ .

**Заключение.**

Методом Фурье получено аналитическое решение дробно-временного телеграфного уравнения с тремя граничными условиями. Дробная производная по времени рассматривается в созвучном смысле.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Хевисайд О. Электромагнитная теория, Том-2. Издательство «Челси», Нью-Йорк, 1899 г.
2. Джордан П. и Пури А. Распространение цифрового сигнала в дисперсионных средах. Дж. Прил. Phys., 85(3):1273-1282, 1999.
3. Уэстон В. и Хе С. Волновое расщепление телеграфного уравнения в  $r_3$  и его применение к обратному рассеянию. Обратная задача, 9:789-812, 1993.
4. Банасиак Дж. и Мика Дж. Сингулярно возмущенные телеграфные уравнения с приложениями в теории случайных блужданий. Дж. Прил. Математика. Стох. Анал., 11(1):9–28, 1998.



5. Дурдиев Д.К. «О единственности определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа». *Ж. Самарский гостех. ун-та, сер. Физ. Математика. Sci.*, 19 (4) 658-666 (2015).

6. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А., Двумерная задача определения ядра в вязкоупругой пористой среде со слабо горизонтальной неоднородностью. *Математические методы в прикладном наук* 43, 8776-8796.

7. Саад Абделькебира, Брахим Нуриб. Аналитический метод решения дробного телеграфного уравнения с соответствующем по времени. *Филомат* 37:9 (2023), 2773–2785.

8. Т. Абдельджавад. О соответствующем дробном исчислении. *Дж. Компьютер. Прил. Матем.*, 279:57–66, 2015.

9. Халил Р., Аль-Хорани М., Юсеф А. и Сабабхе М.. Новое определение дробной производной. *Дж. Компьютер. Прил. Матем.*, 264:65-70, 2014.

10. Юнус А., Абдельджавад Т. и Тазин Г. О критериях устойчивости фрактальных дифференциальных систем соответствующего типа. *Фракталы*, 28(8):1-9, 2020.