



Общероссийский математический портал

Д. К. Дурдиев, Т. Р. Суяров, Х. Х. Турдиев, Обратная коэффициентная задача для дробного телеграфного уравнения с соответствующей дробной производной по времени,

Изв. вузов. Матем., 2025, номер 2, 39–52

<https://www.mathnet.ru/ivm10061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.230.96.51

4 июня 2025 г., 09:12:19



Д.К. ДУРДИЕВ, Т.Р. СУЯРОВ, Х.Х. ТУРДИЕВ

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Аннотация. Исследуются начально-краевая и обратная коэффициентная задача определения коэффициента, зависящего от времени в дробном телеграфном уравнении с соответствующей (conformable) дробной производной. В начале рассматривается начально-краевая задача (прямая задача). Методом Фурье эта задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям. Затем, используя технику оценивания решений и обобщенное неравенство Гронуолла, выводятся априорные оценки решения через неизвестный коэффициент, которые будут использоваться для исследования обратной задачи. Обратная задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению типа Вольтерра. Чтобы показать существование и единственность решения, применяется принцип Банаха. Доказаны теоремы о локальном существовании и единственности решения.

Ключевые слова: обратная задача, дробная производная, интегральное уравнение, ряд Фурье, теорема о неподвижной точке.

УДК: 517.923: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-39-52

ВВЕДЕНИЕ

Дробное исчисление используется во многих областях науки и техники: обработка сигналов, финансы и физика плазмы, аэродинамика и системы управления, вязкоупругость, биоинженерия и биомедицина [1], [2]. Начало дробной производной относится к 1695 году, и до сегодняшнего дня было предложено множество концепций дробных производных, таких как дробная производная Римана–Лиувилля, дробная производная Капудоб, дробная производная Хилфера и др. В 2014 году Р. Халил и др. [3] ввели соответствующую (conformable) дробную производную. Затем многие исследователи выявили важные и фундаментальные свойства этой производной [4]. В 2017 году Ф. Джарад и др. [5] показали, что эта производная необходима и полезна для генерации новых типов дробных операторов. В последние годы были проведены многочисленные исследования [6]–[8] по обратным задачам, связанным с различными соответствующими дробными операторами, включая оператор диффузии.

Обратные задачи для дробно-дифференциальных волновых и диффузионных уравнений еще глубоко не исследованы. В литературе чаще всего встречаются известные задачи определения порядка дробной производной по времени [9]–[11], линейные задачи определения источника [12]–[15] и некоторые коэффициентные нелинейные обратные задачи [16]–[23]

в начально-краевой задаче для дробных диффузионно-волновых уравнений с различными типами условий переопределения (см. также ссылки во всех перечисленных работах). В работе [24] изучаются обратные задачи поиска пространственно и временно зависимых источников в уравнении дробной по времени диффузии с использованием разложения по собственным функциям несамосопряженной спектральной задачи. Основными результатами этих исследований являются теоремы существования и единственности, а также оценка устойчивости решения задачи определения коэффициента в дробном диффузионно-волновом уравнении.

Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн изучены достаточно широко. В работах [25]–[28] (см. также ссылки в них) исследован новый класс обратных задач определения сверточного ядра интегрального члена в этих уравнениях. Краевые задачи и обратные коэффициентные задачи для параболических уравнений с периодическими граничными условиями изучались в [29]. В работе [30] отмечается, что если ядро в интегралах интегро-дифференциальных уравнений распространения тепла и волн выбрано в виде $t^{k-1-\alpha} E_{k-\alpha, k-\alpha}(t^{k-\alpha})$, где $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ — функция Миттаг-Лиффлера, $k = 1, 2$, то эти уравнения эквивалентны уравнению дробной диффузии для $k = 1$ и волновому уравнению для $k = 2$ с производной Капуто по времени.

В данной работе исследуются локальное существование и глобальная единственность нелинейной обратной задачи определения нестационарного коэффициента в телеграфном уравнении, включающее соответствующую дробную производную с начально-краевыми условиями и условиями переопределения.

В области $\Omega := \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим телеграфное уравнение с дробными производными

$$T_t^{(2\alpha)} u(x, t) + 2cT_t^{(\alpha)} u(x, t) + q(t)u(x, t) = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad T_t^{(\alpha)} u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad (3)$$

где $T_t^{(\alpha)}$ представляет собой соответствующую дробную производную порядка α ($0 < \alpha \leq 1$) (см. определение 2) по t ; здесь $T_t^{(2\alpha)} := T_t^{(\alpha)} (T_t^{(\alpha)})$, $f(x, t)$ — заданные функции и c, k — константы такие, что $k > 0, c > 0$.

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,2\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющую равенствам (1)–(3) для заданных достаточно гладких функций $q(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Соотношения (1)–(3) являются прямой задачей, т. е. если известны функции $q(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и постоянные α , то решение $u(x, t)$ может быть найдено из уравнений (1)–(3).

Определение 1. Под решением прямой задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x, t)$ из класса

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{0,\alpha}(\Omega) \cap C_{x,t}^{2,2\alpha}(\overline{\Omega}),$$

где $C_{x,t}^{m,2\alpha}(\Omega) := \{u(x, t) | u_{xx}(\cdot, t) \in C(0, \ell), t \in (0, T); T_t^\alpha u(x, \cdot) \in C(0, T), x \in (0, \ell)\}$, являющуюся решением уравнения (1) в области Ω и удовлетворяющую условиям (1)–(3).

Обратная задача состоит в нахождении функции $q(t) \in C[0, T]$, если относительно решения (1)–(3) прямой задачи известно условие переопределения

$$\int_0^\ell \omega(x)u(x, t)dx = H(t), \quad (4)$$

где $H(t)$, $\omega(x)$ — заданные функции. Для исследования прямой и обратной задач воспользуемся следующими условиями.

Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют следующим предположениям:

- A1) $\varphi \in C^3[0, \ell]$, $\psi \in C^3[0, \ell]$, $\{\varphi^{(4)}, \psi^{(4)}\} \in L_2[0, \ell]$, $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(\ell) = 0$;
 A2) $f(x, \cdot) \in C[0, T]$ и для $t \in [0, T]$, $f(\cdot, t) \in C^3[0, \ell]$, $f^{(4)}(\cdot, t) \in L_2[0, \ell]$, $f(0, t) = f(\ell, t) = 0$, $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(\ell, t) = 0$;
 A3) $\omega(x) \in C^2[0, \ell]$; $\omega(0) = \omega(\ell) = 0$,
 A4) $(T_t^{(2\alpha)}H)(t) \in C[0, T]$, $|H(t)| \geq H_0 > 0$, H_0 — заданное число,

$$\int_0^\ell \omega(x)\varphi(x)dx = H(t)_{t=0+}, \quad \int_0^\ell \omega(x)\psi(x)dx = (T_t^{(\alpha)}H)(t)_{t=0+}.$$

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним известные некоторые понятия соответствующего дробного исчисления (более подробно см. [31]).

Определение 2. Пусть $\varphi : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — заданная функция и $\alpha \in]0, 1]$. Тогда соответствующая левая дробная производная порядка α определяется по формуле

$${}_aT_t^{(\alpha)}(\varphi)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - \varphi(t)}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Если $T_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$ существует на $[a, +\infty[$, то $T_t^{(\alpha)}(\varphi)(a) = \lim_{t \rightarrow a+} T_t^{(\alpha)}(\varphi)(t)$. При $a = 0$ определение (5) введено Р. Халилом и др. в [3]. Далее $a = 0$ и ${}_0T_t^{(\alpha)} =: T_t^{(\alpha)}$. В этом случае мы говорим, что φ α -дифференцируема.

Определение 3 ([3]). Пусть $\alpha \in]0, 1]$ и $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция. Левый соответствующий дробный интеграл от φ порядка α от нуля до t определяется формулой

$$I_\alpha \varphi(t) := \int_0^t s^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Определение 4 ([31]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция. Тогда дробное преобразование Лапласа порядка α функции φ с началом в нуле определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}_\alpha [\varphi(t)](s) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \varphi(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt.$$

Теорема 1 ([31]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая вещественная функция. Имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{L}_\alpha [T_t^{(\alpha)} \varphi(t)](s) = s \mathcal{L}_\alpha [\varphi(t)](s) - \varphi(0).$$

Для исследования задач будет полезной

Теорема 2 ([32]). Пусть $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\eta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\eta < \gamma$. Рассмотрим следующую задачу при $0 < \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} T_t^{(2\alpha)} y(t) + 2\eta T_t^{(\alpha)} y(t) + \gamma^2 y(t) &= g(t); \\ y(0) = y_0, T_t^{(\alpha)} y(0) &= y_\alpha. \end{aligned}$$

Она имеет единственное решение

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{y_0 \eta + y_\alpha}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} \int_0^t g \left((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha} \right) e^{-\eta \frac{\tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 ([33], с. 189). Пусть r — непрерывная неотрицательная функция на интервале $[a, b]$, а δ, p — неотрицательные константы такие, что

$$r(t) \leq \delta + p \int_a^t r(s)(s-a)^{\alpha-1} ds,$$

тогда для всех $t \in [a, b]$

$$r(t) \leq \delta e^{p \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}.$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Используем метод Фурье для изучения прямой задачи (1)–(3). Частное решение задачи (1)–(3) при $q(t) = 0$, $f(x, t) = 0$, будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1), (3), получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) = X(\ell) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача (7) имеет собственные значения

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и собственные функции

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Теперь ищем решение неоднородной задачи (1)–(3) в виде

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (9)$$

Коэффициенты $u_n(t)$ для $n \in \mathbb{N}$ находятся согласно ортогональности собственных функций $X_n(x)$. Скалярное произведение в $L_2[0, \ell]$ определяется $(f, g) = \int_0^\ell f(x)g(x)dx$. Отметим, что коэффициенты разложения $\varphi(x), \psi(x)$ и $f(x, t)$ по собственным функциям (8) для $n \in \mathbb{N}$ определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} (f(x, t), X_n(x)) &= f_n(t), \quad (\varphi(x), X_n(x)) = \varphi_n, \\ (\psi(x), X_n(x)) &= \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, из (1) с учетом и $(u(x, t), X_n(x)) = \int_0^\ell u(x, t) X_n(x) dx = u_n(t)$ получим

$$\begin{aligned} T_t^{(2a)} u_n(t) + 2cT_t^{(\alpha)} u_n(t) + q(t)u_n(t) &= -\lambda_n k^2 u_n(t) + f_n(t), \\ u_n(0) &= \varphi_n, T_t^{(\alpha)} u_n(0) = \psi_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Мы предполагаем выполнение условия

$$0 \leq \frac{c^2}{k^2} < \lambda_1, \quad (12)$$

где $\lambda_1 = \pi^2/\ell^2$ — наименьшее собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (7). Далее всюду будем считать условие (12) выполненным.

Используя условие (12) и теорему 2, заключаем, что задача (11) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \varphi_n e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\gamma_n}} e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t f_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t q(\tau) u_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\sqrt{\lambda_n k^2 - c^2} = \sqrt{\gamma_n}$.

Лемма 2. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \times \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} = \Psi_n(T), \\ |T_t^{(2a)} u_n(t)| &\leq 2c\Upsilon_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n + \|f_n\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Решение интегрального уравнения (13) оценивается следующим образом:

$$|u_n(t)| \leq C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t u_n(\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau,$$

Согласно лемме 1 получаем

$$|u_n(t)| \leq \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\}.$$

□

В силу уравнения (13)

$$\begin{aligned} T_t^{(\alpha)} u_n(t) &= t^{1-\alpha} u'_n(t) = \varphi_n \left[-c e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) - \sqrt{\gamma_n} e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \right] + \\ &+ \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\gamma_n}} \left[-c e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \sqrt{\gamma_n} e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t f_n(\tau) \left[-c e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\gamma_n} e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \right] d\tau - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t q(\tau) u_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\gamma_n} e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) \Big] \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} - \\
& - \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t q(\tau) u_n(\tau) \left[-c e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\gamma_n} e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) \right] \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Для получения второй оценки леммы 2 из уравнения (13) и первой оценки леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
\left| T_t^{(\alpha)} u_n(t) \right| & \leq (c + \sqrt{\gamma_n}) \left(C_1 \varphi_n + C_2 \frac{2c\varphi_n + \psi_n}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + \right. \\
& \left. + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} \Psi_n(T) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) = \Upsilon_n(T).
\end{aligned}$$

Далее, с помощью уравнения (11) оценим функцию $T_t^{(2\alpha)} u_n(t)$:

$$\left| T_t^{(2\alpha)} u_n(t) \right| \leq 2c \Upsilon_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n(T) + \|f_n\|_{C[0,T]}.$$

□

Ясно, что мы построили решение задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье (9), где $u_n(t)$ — решение интегрального уравнения (13). Формально дифференцируя ряд (9) почленно, получаем следующие ряды:

$$T_t^{(\alpha)} u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} T_t^{(\alpha)} u_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (15)$$

$$T_t^{(2\alpha)} u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} T_t^{(2\alpha)} u_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (16)$$

$$u_{xx}(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (17)$$

При выполнении условий A1), A2) покажем равномерную сходимость рядов (8), (15)–(17) в области Ω . Они для любого $(x, t) \in \Omega$ мажорируются, соответственно, числовыми рядами

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\}, \quad (18)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} (c + \sqrt{\gamma_n}) \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} \Psi_n(T) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right), \quad (19)$$

$$2c \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\Upsilon_n(T) + (\|q\|_{C[0,T]} + \lambda_n k^2) \Psi_n(T) + \|f_n\|_{C[0,T]} \right), \quad (20)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\}, \quad (21)$$

где $\bar{\Omega} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T\}$. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. Если условия A1), A2) выполнены, то коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$, имеют следующие представления:

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \psi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} f_n^{(3)}(t),$$

Тогда ряды из (18)–(21) сходятся.

Доказательство. Из формулы (10) вытекает, что коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ имеют вид

$$\varphi_n(t) = \int_0^\ell \varphi(x) X_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx,$$

Интегрируя по частям функцию $\varphi(x)$ четыре раза по x и функции $\psi(x)$, $f(x, t)$ три раза по x , учитывая условия A1), A2), получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \psi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} f_n^{(3)}(t), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(3)} &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \varphi_{xxx}(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \psi_{xxx}(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx, \\ f_n^{(3)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell f_{xxx}(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx; \end{aligned}$$

здесь $\varphi_n^{(3)}$, $\psi_n^{(3)}$, $f_n^{(3)}(t)$ — коэффициенты разложения функций $\varphi_{xxx}(x)$, $\psi_{xxx}(x)$, $f_{xxx}(x, t)$ в ряд Фурье относительно системы функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) \right\}$, $n \geq 0$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(3)}|^2 \leq \|\varphi^{(3)}\|_{L_2[0, \ell]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}\|_{L_2[0, \ell]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}(t)|^2 \leq \|f^{(3)}(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})}^2. \quad (23)$$

Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то в силу представлений (22) и (23) ряды (8), (15)–(17) сходятся равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$. Таким образом, функция $u(x, t)$ удовлетворяет соотношениям (1)–(3). $\square$

Используя приведенные выше результаты, получается

Теорема 3. Если $q(t) \in C[0, T]$, A1), A2) и условие (12) выполнены, то существует единственное решение (1)–(3) прямой задачи $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,2\alpha}(\Omega)$.

Получим оценку нормы разности решения исходного интегрального уравнения (13) и решения этого уравнения с входящими данными $\tilde{q}$, $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ и $\tilde{f}_n$.

Пусть $\tilde{u}_n(t)$ — решение интегрального уравнения (13), соответствующее функциям $\tilde{q}$, $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$, $\tilde{f}_n$, т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) &= \tilde{\varphi}_n e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{2c\tilde{\varphi}_n + \tilde{\psi}_n}{\sqrt{\gamma_n}} e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \tilde{q}(\tau) \tilde{u}_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Составим разность $u_n(t) - \tilde{u}_n(t)$ с помощью уравнений (13) и получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(t) = & \hat{\varphi}_n e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{2c\hat{\varphi}_n + \hat{\psi}_n}{\sqrt{\gamma_n}} e^{-c \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \hat{f}_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \hat{q}(\tau) u_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \hat{q}(\tau) \hat{u}_n(\tau) e^{-c \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha}} \sin \left(\sqrt{\gamma_n} \frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Введем следующие обозначения: $\hat{u}_n(t) = u_n(t) - \tilde{u}_n(t)$, $\hat{q}(t) = q(t) - \tilde{q}(t)$, $\hat{\varphi}_n(t) = \varphi_n(t) - \tilde{\varphi}_n(t)$, $\hat{\psi}_n(t) = \psi_n(t) - \tilde{\psi}_n(t)$, $\hat{f}_n(t) = f_n(t) - \tilde{f}_n(t)$. Из (24) получим линейное интегральное неравенство

$$\begin{aligned} |\hat{u}_n(t)| \leq & C_1 |\hat{\varphi}_n| + C_2 \frac{2c|\hat{\varphi}_n| + |\hat{\psi}_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|\hat{f}_n\|_{C[0,T]} t^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + \\ & + C_3 \frac{\|\hat{q}\|_{C[0,T]} t^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \Psi_n(t) + C_3 \frac{\|\hat{q}\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\gamma_n}} \int_0^t \hat{u}_n(\tau) \tau^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Из леммы 1 и последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} |\hat{u}_n(t)| \leq & \left(C_1 |\hat{\varphi}_n| + C_2 \frac{2c|\hat{\varphi}_n| + |\hat{\psi}_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|\hat{f}_n\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} + \right. \\ & \left. + C_3 \frac{\|\hat{q}\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \Psi_n(T) \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0,T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Оценка (25) будет полезной при исследовании прямой задачи.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (1)–(4)

Умножая обе части уравнения (1) на $\omega(x)$, интегрируем от 0 до ℓ по переменной x :

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \omega(x) \left\{ T_t^{(2\alpha)} u(x, t) + 2c T_t^{(\alpha)} u(x, t) + q(t) u(x, t) \right\} dx = \\ = \int_0^\ell \omega(x) \left\{ k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \right\} dx, \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в первом интеграле в правой части дважды по x , получаем

$$\left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) + 2c \left(T_t^{(\alpha)} H \right) (t) + q(t) H(t) = k^2 \int_0^\ell \omega''(x) u(x, t) dx + \int_0^\ell \omega(x) f(x, t) dx.$$

Отсюда после несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned} q(t) = & \frac{1}{H(t)} \int_0^\ell \omega(x) f(x, t) dx - \\ & - \frac{1}{H(t)} \left(\left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) - 2c \left(T_t^{(\alpha)} H \right) (t) \right) + \frac{k^2}{H(t)} \int_0^\ell \omega''(x) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) X_n(x) dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Функция $u_n(t)$ зависит от $q(t)$, т. е. $u_n(t; q)$. Перепишем (26) в более компактном виде:

$$q(t) = q_0(t) + \frac{k^2}{H(t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n u_n(t; q), \quad (27)$$

где

$$\omega_n = \int_0^\ell \omega''(x) X_n(x) dx, \\ q_0(t) = \frac{1}{H(t)} \left(\int_0^\ell w(x) f(x, t) dx - \left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) - 2c \left(T_t^{(\alpha)} H \right) (t) \right).$$

Введем оператор $\mathcal{A}$, определив его правой частью (27):

$$\mathcal{A}[q](t) = q_0(t) + \frac{k^2}{H(t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n u_n(t; q). \quad (28)$$

Из уравнения (28) мы переходим к следующему операторному уравнению:

$$\mathcal{A}[q](t) = q(t), \quad (29)$$

пусть

$$\|q_0\| = \max_{t \in [0; T]} |q_0(t)| = \left| \frac{1}{H(t)} \left(\int_0^\ell \omega(x) f(x, t) dx - \left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) - 2c \left(T_t^{(\alpha)} H \right) (t) \right) \right|_{C[0, T]}.$$

Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$B(q_0, \rho) := \{q(t) : q(t) \in C[0, T], \|q - q_0\| \leq \rho\}.$$

Теорема 4. Пусть условия A1)–A4) и (12) выполнены. Тогда существует число $T^* \in (0, T)$ такое, что существует единственное решение обратной задачи (1)–(4) из класса $q(t) \in C[0, T^*]$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что для достаточно малых $T > 0$ оператор $\mathcal{A}$ отображает шар $B(q_0, \rho)$ в себя, т. е. $\mathcal{A}[q](t) \in B(q_0, \rho)$. Действительно, для любой непрерывной функции $q(t)$ функция $\mathcal{A}[q](t)$, вычисляемая по формуле (29), будет непрерывной. В то же время, оценивая норму разности, находим, что

$$\|\mathcal{A}[q](t) - q_0(t)\| \leq \frac{k^2 \omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\},$$

где $\omega_0 = \max_{x \in [0, \ell]} |\omega(x)|$, $H_0 = \max_{t \in [0, T]} |H(t)|$. $\square$

Здесь мы использовали оценку (14). Ввиду лемм 2 и 3 последний ряд является сходящимся. Отметим, что функция, стоящая в правой части этого неравенства, монотонно возрастает с ростом T , а также принадлежность функции $q(t)$ шару $B(q_0, \rho)$ влечет за собой неравенство $\|q\| \leq \|q_0\| + \rho$. Поэтому мы лишь усилим неравенство, если заменим в этом неравенстве $\|q\|$ выражением $\|q_0\| + \rho$. Выполняя эти замены, получаем

$$\frac{k^2 \omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \times \exp \left\{ C_3 \frac{(\|q_0\| + \rho) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} =: z(T).$$

Пусть T_1 — положительный корень уравнения

$$z(T) = \rho.$$

Следовательно, если обозначить через T_1 положительный корень уравнения (при T), то $\|\mathcal{A}[q](t) - q_0(t)\| \leq \rho$ для $T < T_1$; т. е. $\mathcal{A}[q](t) \in B(q_0, \rho)$.

Теперь возьмем любые функции $q(t), \tilde{q}(t) \in B(q_0, \rho)$ и оценим расстояние между их образами $\mathcal{A}[q](t)$ и $\mathcal{A}[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C[0, T]$. Функция $\tilde{u}_n(t)$, соответствующая $\tilde{q}(t)$, удовлетворяет интегральным уравнениям (13) для $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n, \psi_n = \tilde{\psi}_n$ и $f_n = \tilde{f}_n$. Составив разность $\mathcal{A}[q](t) - \mathcal{A}[\tilde{q}](t)$ с помощью уравнений (13), (24), а затем оценив его норму, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}[q](t) - \mathcal{A}[\tilde{q}](t)\| &\leq \frac{\omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n(t; q) - \tilde{u}_n(t; \tilde{q})\| \leq \frac{\omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} C_3 \frac{T^\alpha}{\alpha \sqrt{\gamma_n}} \times \\ &\times \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} \|\hat{q}\|_{C[0, T]} + \\ &+ \frac{\omega_0}{H_0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_3^2 \frac{\|\tilde{q}\|_{C[0, T]} T^{2\alpha}}{\alpha^2 \gamma_n} \Psi_n(T) \right) \exp \left\{ C_3 \frac{\|q\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} \|\hat{q}\|_{C[0, T]}. \end{aligned} \quad (30)$$

Функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$ принадлежат шару $B(q_0, \rho)$, поэтому для каждой из этих функций имеем неравенство $\|q\| \leq \|q_0\| + \rho$. Заметим, что функция в правой части неравенства (30) с множителем $\|q\| - \|\tilde{q}\|$ монотонно возрастает с увеличением $\|q\|, \|\tilde{q}\|$ и T . Следовательно, замена $\|q\|$ и $\|\tilde{q}\|$ в неравенстве (30) на $\|q_0\| + \rho$ только усилит неравенство. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}[q](t) - \mathcal{A}[\tilde{q}](t)\| &\leq \frac{\omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n(t; q) - \tilde{u}_n(t; \tilde{q})\| \leq \\ &\leq \frac{\omega_0}{H_0} \sum_{n=1}^{+\infty} C_3 \frac{T^\alpha}{\alpha \sqrt{\gamma_n}} \left(C_1 |\varphi_n| + C_2 \frac{2c|\varphi_n| + |\psi_n|}{\sqrt{\gamma_n}} + C_3 \frac{\|f_n\|_{C[0, T]} T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right) \exp \left\{ C_3 \frac{(\|q\| + \rho) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} \|\hat{q}\|_{C[0, T]} + \\ &+ \frac{\omega_0}{H_0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_3^2 \frac{(\|q\| + \rho) T^{2\alpha}}{\alpha^2 \gamma_n} \Psi_n(T) \right) \exp \left\{ C_3 \frac{(\|q\| + \rho) T^\alpha}{\sqrt{\gamma_n} \alpha} \right\} \|\hat{q}\|_{C[0, T]} = \xi(T) \|\hat{q}\|_{C[0, T]}. \end{aligned}$$

Следовательно, если T_2 — положительный корень уравнения для T , $\xi(T) = 1$, то для $T \in (0, T_2)$ оператор $\mathcal{A}$ сжимает расстояние между элементами $q(t), \tilde{q}(t) \in B(q_0, \rho)$. Значит, если мы выберем $T^* < \min(T_1, T_2)$, то оператор $\mathcal{A}$ будет сжимающим в шаре $B(q_0, \rho)$. Тогда в соответствии с теоремой Банаха ([34], с. 87–97), оператор $\mathcal{A}$ имеет единственную неподвижную точку в шаре $B(q_0, \rho)$, т. е. существует единственное решение уравнения (29). $\square$

Пусть T — положительное фиксированное число. Рассмотрим множество D_{μ_0} заданных функций (φ, ψ, H, f) , для которых выполнены все условия A1)–A4) и

$$\max \left\{ \|\varphi\|_{C^3[0, \ell]}, \|\psi\|_{C^3[0, \ell]}, \|H\|_{C[0, T]}, \|f\|_{C^3(\bar{\Omega})} \right\} \leq \mu_0.$$

Обозначим через G_{μ_1} множество функций $q(t)$, которые для некоторого $T > 0$ удовлетворяют условию $\|q\|_{C[0, T]} \leq \mu_1, \mu_1 > 0$.

Теорема 5. Пусть $(\varphi, \psi, h, f) \in D_{\mu_0}, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{h}, \tilde{f}) \in D_{\mu_0}$ и $q, \tilde{q} \in G_{\mu_1}$. Тогда для решения обратной задачи (1)–(4) справедлива следующая оценка:

$$\|q - \tilde{q}\|_{C[0, T]} \leq \rho \left[\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^3[0, \ell]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^3[0, \ell]} + \|H - \tilde{H}\|_{C[0, T]} + \|f - \tilde{f}\|_{C^3(\bar{\Omega})} \right],$$

где константа ρ зависит только от μ_0, μ_1 .

Доказательство. С помощью (27) выпишем уравнения для $\tilde{q}(t)$ и составим разность $q(t) - \tilde{q}(t)$. Тогда, оценив это выражение и воспользовавшись оценками для $u_n(t), \hat{u}_n(t)$, получим

$$\begin{aligned}
\|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{H(t)} \left(\int_0^\ell \omega(x) f(x, t) dx - \left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) - 2c \left(T_t^{(\alpha)} H \right) (t) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2}{H(t)} \int_0^\ell \omega''(x) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) X_n(x) dx - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\tilde{H}(t)} \left(\int_0^\ell \omega(x) \tilde{f}(x, t) dx - \left(T_{0+,t}^{2\alpha} \tilde{H} \right) (t) - 2c \left(T_t^{(\alpha)} \tilde{H} \right) (t) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2}{\tilde{H}(t)} \int_0^\ell \omega''(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(t) X_n(x) dx \right| \leq \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{\omega_0}{H_0^2} \left| \int_0^\ell [H(t)(f(x, t) - \tilde{f}(x, t)) - \tilde{f}(x, t)(H(t) - \tilde{H}(t))] dx + \right. \right. \\
&\quad \left. + \tilde{H}(t) \left(\left(T_t^{(2\alpha)} H \right) (t) - \left(\tilde{T}_t^{(2\alpha)} H \right) (t) \right) + \left(T_t^{2\alpha} \tilde{H} \right) (t) (H(t) - \tilde{H}(t)) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{H}(t) \left(\left(T_t^\alpha H \right) (t) - \left(\tilde{T}_t^\alpha H \right) (t) \right) + \left(T_t^\alpha \tilde{H} \right) (t) (H(t) - \tilde{H}(t)) \right| \right\} + \\
&+ \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{\omega_0}{H_0^2} \left| \int_0^\ell \sqrt{\frac{2}{\ell}} [H(t)(u_n(t) - \tilde{u}_n(t)) - \tilde{u}_n(t)(H(t) - \tilde{H}(t))] dx \right| \right\} \leq \\
&\leq r_0 \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|f - \tilde{f}\| + \left\| \left(T_t^{2\alpha} H \right) - \left(T_t^{2\alpha} \tilde{H} \right) \right\| + \right. \\
&\quad \left. + \left\| \left(T_t^\alpha H \right) - \left(T_t^\alpha \tilde{H} \right) \right\| + \|H - \tilde{H}\| \right) + r_1 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \|q(\tau) - \tilde{q}(\tau)\|_{C[0,T]} d\tau, t \in [0, T], \quad (31)
\end{aligned}$$

где r_0, r_1 зависят только от μ_0, μ_1, T, α . Из (31) согласно лемме 1 имеем

$$\|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} \leq r_0 \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^3[0,\ell]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^2[0,\ell]} + \|f - \tilde{f}\|_{C^3(\Omega)} + \|H - \tilde{H}\|_{C[0,T]} \right) \exp \left\{ r_1 \frac{T^\alpha}{\alpha} \right\}. \quad (32)$$

Оценка (31) получается из (32), если $r = r_0 \exp \left\{ r_1 \frac{T^\alpha}{\alpha} \right\}$.

Из теоремы 5 также вытекает следующее утверждение о единственности решения обратной задачи в целом. $\square$

Теорема 6. Пусть функции φ, ψ, H, f и $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{H}, \tilde{f}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 3 и удовлетворяют условиям A1)–A4). Кроме того, если $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$, $H = \tilde{H}$, $f = \tilde{f}$, то $q(t) = \tilde{q}(t)$, $t \in [0, T]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована разрешимость нелинейной обратной задачи для дробного телеграфного уравнения с соответствующей дробной производной по времени с начально-краевыми условиями и условиями переопределения интегрального типа. Сначала мы исследовали разрешимость прямой задачи. Для этого задача (1)–(3) заменяется эквивалентной задачей интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Доказаны существование и единственность решения прямой задачи. Рассмотрена обратная задача определения коэффициента $q(t)$, входящего в уравнение (1), с дополнительным условием (4) с начальными и граничными условиями (2), (3). Обратная задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению типа Вольтерра. С помощью принципа Банаха получены теоремы локального существования, глобальной единственности решения обратной задачи. А также доказана оценка условной устойчивости решения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Magin R.L. *Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues*, Comput. Math. Appl. **59** (5), 1586–1593 (2010).
- [2] Meral F.C., Royston T.J., Magin R. *Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **15** (4), 939–945 (2010).
- [3] Khalil R., Horani M.A.I., Yousef A., Sababheh M. *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. **264**, 65–70 (2014).
- [4] Wang Y., Zhou J., Li Y. *Fractional Sobolev's Spaces on Time Scales via Conformable Fractional Calculus and Their Application to a Fractional Differential Equation on Time Scales*, Adv. Math. Phys. **2016**, 1–21, article 963649121 (2016).
- [5] Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. *On a new class of fractional operators*, Adv. Diff. Equat. **2017** (1), article 247 (2017).
- [6] Дурдиев У.Д. *Обратная задача об источнике для уравнения вынужденных колебаний балки*, Изв. вузов. Матем. (8), 10–22 (2023).
- [7] Дурдиев Д.К., Нуриддинов Ж.З. *Единственность задачи определения ядра в интегро-дифференциальном параболическом уравнении с переменными коэффициентами*, Изв. вузов. Матем. (11), 3–14 (2023).
- [8] Cakmak Y. *Inverse nodal problem for a conformable fractional diffusion operator*, Inverse Probl. Sci. Engineering **29** (9), 1308–1322 (2021).
- [9] Ashurov R., Umarov S. *Determination of the Order of Fractional Derivative for Subdiffusion Equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **23** (6), 1647–1662 (2020).
- [10] Alimov Sh., Ashurov R. *Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation*, J. Inverse and Ill-posed Probl. **28** (5), 651–658 (2020).
- [11] Акрамова Д.И. *Обратная коэффициентная задача для дробно-диффузионного уравнения с оператором Бесселя*, Изв. вузов. Матем. (9), 45–57 (2023).
- [12] Sakamoto K., Yamamoto M. *Inverse source problem with a final overdetermination for a fractional diffusion equation*, Math. Control Relat. Fields **1** (4), 509–518 (2011).
- [13] Kirane M., Malik S.A., Al-Gwaiz M.A. *An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions*, Math. Meth. Appl. Sci. **36** (9), 1056–1069 (2013).
- [14] Karimov E., Al-Salti N., Kerbal S. *An Inverse Source Non-local Problem for a Mixed Type Equation with a Caputo Fractional Differential Operator*, East Asian J. Appl. Math. **7** (2), 417–438 (2017).
- [15] Durdiev D.K. *Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **26** (2), 355–367 (2022).
- [16] Miller L., Yamamoto M. *Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation*, Inverse Probl. **29** (7), 075013 (2013).
- [17] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Обратная задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения дробной диффузии в ограниченной области*, Изв. вузов. Матем. (10), 22–35 (2023).
- [18] Durdiev D.K., Durdiev U.D. *An inverse problem of finding a time-dependent coefficient in a fractional diffusion equation*, Turkish J. Math. **47** (5), 1437–1452 (2023).

- [19] Durdiev D.K. *Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation*, Eurasian J. Math. Comput. Appl. **9** (1), 44–54 (2022).
- [20] Турдиев Х.Х. *Обратные коэффициентные задачи для временно-дробного волнового уравнения с обобщенной производной Римана-Лиувилля по времени*, Изв. вузов. Матем. (10), 46–59 (2023).
- [21] Durdiev D.K., Turdiev H.H. *Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type overdetermination conditions*, Math. Meth. Appl. Sci. **47** (6), 5329–5340 (2024).
- [22] Durdiev D.K., Turdiev H.H. *Inverse Coefficient Problem for Fractional Wave Equation with the Generalized Riemann–Liouville Time Derivative*, Indian J. Pure Appl. Math. (2023), DOI: 10.1007/s13226-023-00517-9.
- [23] Durdiev U.D. *Problem of determining the reaction coefficient in a fractional diffusion equation*, Diff. Equat. **57** (9), 1195–1204 (2021).
- [24] Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition*, Electron. J. Diff. Equat. **2013** (270), 1–16 (2013).
- [25] Durdiev D.K., Totieva Z.D. *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation*, Math. Met. Appl. Sci. **41** (17), 8019–8032 (2018).
- [26] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Задача определения ядер в системе интегро-дифференциальных уравнений Максвелла*, Сиб. журн. индустр. матем. **24** (2), 38–61 (2021).
- [27] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью*, Дифференц. уравнения **56** (12), 1666–1675 (2020).
- [28] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Задача определения ядер в системе интегро-дифференциальных уравнений акустики*, Дальневост. матем. журн. **23** (2), 190–210 (2023).
- [29] Durdiev D.K. *Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation*, Eurasian J. Math. Comput. Appl. **9** (1), 44–54 (2021).
- [30] Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 2014).
- [31] Abdeljawad T. *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math. **279**, 57–66 (2015).
- [32] Saad A., Brahim N. *Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by Fourier method*, Proc. Int. Math. Sci. **2** (1), 1–6 (2020).
- [33] Henry D. *Geometric Theory of Semi linear Parabolic Equations* (Springer, Berlin, 1981).
- [34] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1976).

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,
e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Турсунбек Ражаббой ўғли Суяров

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,
e-mail: t.r.suyarov@buxdu.uz

Халим Хамроевич Турдиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,
e-mail: hturdiev@mail.ru

*D.K. Durdiev, T.R. Suyarov, and Kh.Kh. Turdiev***An inverse coefficient problem for the fractional telegraph equation with the corresponding fractional derivative in time**

Abstract. This work investigates an initial-boundary value and an inverse coefficient problem of determining a time dependent coefficient in the fractional wave equation with the conformable fractional derivative and an integral. In the beginning, the initial boundary value problem (direct problem) is considered. By the Fourier method this problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using the technique of estimating these functions and the generalized Gronwall inequality, we get apriori estimate for the solution via the unknown coefficient which will be used to study the inverse problem. The inverse problem is reduced to an equivalent integral equation of Volterra type. To show the existence and uniqueness of the solution to this equation, the Banach principle is applied. The local existence and uniqueness results are obtained.

Keywords: inverse problem, conformable fractional derivative, integral equation, Fourier series, Banach fixed point theorem.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbal str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,
e-mail: d.durdiev@mathinst.uz*

Tursunbek Rajabboy o'g'li Suyarov

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbal str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,
e-mail: t.r.suyarov@buxdu.uz*

Khalim Khamroyevich Turdiyev

*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbal str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,
e-mail: hturdiev@mail.ru*