# Matematika Instituti Byulleteni

# Bulletin of the Institute of Mathematics

# Бюллетень Института Математики

2023
6(4)

ISSN 2181-9483

http://matinstbul.uz

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi
V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti

O‘zbekiston Matematika
Jamiyati

# Matematika Instituti Byulleteni

# Bulletin of the Institute of Mathematics

# Бюллетень Института Математики

2023
6(4)

ISSN 2181-9483

http://matinstbul.uz

# “Matematika instituti byulleteni” elektron jurnali tahririyat a’zolari haqida ma’lumot

## Mundarija

## Contents

**Содержание**

# Description of 4-dimensional Leibniz dialgebras which are constructed by null-filiform Leibniz algebra

**Azizov Majidkhon**
Department of Algebra and its applications
Institute of Mathematics
Tashkent, Uzbekistan
azizovmajidkhan@gmail.com

## Abstract

The present paper is devoted to the description of small dimensional Leibniz dialgebras. More precisely, small dimensional Leibniz dialgebras, constructed by null-filiform Leibniz algebras are classified.

**Keywords:** Leibniz algebra; solvable Leibniz algebra; derivation; inner derivation; almost inner derivation.

**MSC 2020:** 17A30, 17A32, 17A60

## 1. Introduction

The non-commutative counterparts of Lie algebras are called Leibniz algebras and were first described by J.-L. Loday [7]. The requirement that each right (left) multiplication operator is a derivation, i.e., is the defining identity of the variety of right (left) Leibniz algebras:

$$(xy)z = (xz)y + x(yz) \text{ or } x(yz) = (xy)z + y(xz),$$

respectively.

Many classical theorems from Lie algebras theory have been extended to Leibniz algebras case and several classes of nilpotent, solvable, simple, semi-simple Leibniz algebras are classified, derivations, deformations and degenerations of these algebras are investigated [2]-[6],[10]-[12]

The notion of dialgebras, more precisely associative dialgebras(diassociative algebras) were introduced by Loday [9] and their connection with other variety of algebras. For example, Leibniz algebras can be embedded into associative dialgebras in the same way as Lie algebras can. Initiative properties of diassociative and classification of some classes was investigated by I.Rikhsiboev in [14], [15].

In 2008, P.Kolesnikov [13] gave the technique of how to define the notion of Var-dialgebra for a given variety of algebra Var.

Firstly, we give the concept of *"0-dialgebra"* for introducing dialgebras.

**Definition 1.1.** A vector space $A$ with a two multiplication operators $\dashv$ and $\vdash$ is called a *0-dialgebra* if

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z), \tag{1}$$

$$(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z, \tag{2}$$

for all $x, y, z \in A$.

**Definition 1.2.** A 0-dialgebra $(A, \dashv, \vdash)$ is called a *diassociative* if

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \tag{4}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{5}$$

for all $x, y, z \in A$.

It should be noted that for diassociative algebra $(A \dashv, \vdash)$ considering new operation $[a,b] = a \vdash b - b \dashv a$ converts a Leibniz algebra $(A, [-,-])$.

The idea of a determining method for finding dialgebras identity is also presented in [13]. This structure is motivated by the connection between dialgebras and conformal algebras. A conformal algebra [16] is a linear space $C$ over a field with zero characteristics, with one linear operation $T : C \to C$ and a countable family of bilinear products.

$(\cdot_{(n)} \cdot) : C \times C \to C$, where $n$ ranges over the set $\mathbb{Z}_+$ of non-negative integers, such that

- for every $a, b \in C$ only a finite number of $a_{(n)}b$ is nonzero;
- $Ta_{(n)}b = -na_{(n-1)}b, a_{(n)}Tb = T(a_{(n)}b + na_{(n-1)}b.$

Every conformal algebra can be constructed as a subspace of the formal power series space $A[[z, z^{-1}]]$ over an appropriate ordinary algebra A, with respect to

$$(Ta)(z) = \frac{d}{dz}a(z), (a_{(n)}b)(z) = \underset{w=0}{Res}\, a(w)b(z)(w-z)^n.$$

Here $\underset{w=0}{Res} f(w,z)$ stands for the coefficient of $w^{-1}$ in $f(z,w) \in A[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$.

**Definition 1.3** [13] A dialgebra $A : Dialg_S \to A \in Vec_k$ is said to be a member of the variety *Var* of *dialgebras* (or *Var-dialgebra*) if there exists a symmetric functor $\overline{A} : VarAlg \bigotimes E \to A \in Vec_k$, such that $\Psi \circ (Var \otimes id) \circ \overline{A} = A$, i.e., the diagram of functors

$$\begin{tikzcd} Dialg_S \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Psi"'] & A \in Vec_k \\ Alg_S \otimes E \arrow[r, "Var \bigotimes id"] & VarAlg \bigotimes E. \arrow[u, "\overline{A}"'] \end{tikzcd}$$

**Proposition 1.1** [13] A dialgebra $A$ belongs to the variety Var if and only if $A$ is a 0-dialgebra that satisfies the identities $\Psi_n^{-1}\left(t \otimes e_i^{(n)}\right)$, where $t \in \Sigma, \quad n = deg\ t, \quad i = 1, \dots, n.$

The following construction can be used to deduce defining identities in a dialgebra's signature. Take a look at the functor $\alpha : Dialg \otimes Sym$ is defined as $\alpha_2(x_1 \vdash x_2) = x_1x_2 \otimes id_2$ and $\alpha_2(x_1 \dashv x_2) = x_1x_2 \otimes (12)$, where $(12) \in S_2$. We denote by $E$ the following functor from $Sym$ to $\varepsilon : E_n(\sigma) = e^{(n)}_{n\sigma^{-1}}$.

**Lemma 1.1** [13] If $u \otimes \sigma \in Dialg_S(n)$ and $\alpha_n(u) = v \otimes \tau$ , then

$$\Psi_n(u \otimes \sigma) = (v \otimes \sigma) \otimes E_n(\tau)^{\sigma}.$$

In order to get $\Psi_n^{-1}\left(v \otimes \sigma \otimes e_i^{(n)}\right)$ for some word $v \in Alg(n)$, some $\sigma \in S_n, i \in 1, \dots, n$, it is enough to put the signs $\dashv, \vdash$ of dialgebra operations on the word $v$ with the same bracketing in such a way that for the dialgebraic word $v_i^d \in Dialg(n)$ obtained one has $\alpha_n(v_i^d) = v \otimes \tau$, where $i\sigma^{-1} = n\tau^{-1}$. Then $v_i^d \otimes \sigma \in Dialg_s(n)$ would be a preimage of $v \otimes \sigma \otimes e_i^{(n)}$ with respect to $\Psi_n$.

The procedure of finding dialgebra's identity is straightforward. Suppose $v \otimes \sigma = (x_{1\sigma} \dots x_{n\sigma}) \in Alg_s(n)$. Then $v_i^d \otimes \sigma = (x_{1\sigma} \vdash \dots \vdash x_i \dashv \dots \dashv x_{n\sigma})$, i.e., "$\vdash, \dashv$" are always directed to the variable $x_i$.

Let us consider some examples of varieties.

*Lie dialgebras.* If $\Sigma = \{x_1(x_2x_3) + x_2(x_3x_1) + x_3(x_1x_2), x_1x_2 + x_2x_1\}$ then the corresponding dialgebra identities include $x_1 \dashv x_2 + x_2 \vdash x_1$. A Lie dialgebra $A$ considered as an ordinary algebra with respect to $[a,b] = a \vdash b,$ for any $a, b \in A$, is just a right Leibniz algebra. Conversely, every right Leibniz algebra $L$ is a Lie dialgebra with respect to $a \dashv b = [a,b]$, $a \vdash b = -[b,a]$. Therefore, a Lie dialgebra is just the same as a Leibniz algebra.

*(right)Leibniz dialgebras.* Suppose, $\Sigma = \{(x_1x_2)x_3 - (x_1x_3)x_2 - x_1(x_2x_3)\}$. We should find Lemma 1.1. implies that

$$\Psi^{-1}\left((x_1, x_2, x_3) \otimes e_1^{(3)}\right) = (x_1 \dashv x_2) \dashv x_3 - (x_1 \dashv x_3) \dashv x_2 - x_1 \dashv (x_2 \dashv x_3);$$
$$\Psi^{-1}\left((x_1, x_2, x_3) \otimes e_2^{(3)}\right) = (x_1 \vdash x_2) \dashv x_3 - (x_1 \vdash x_3) \vdash x_2 - x_1 \vdash (x_2 \dashv x_3);$$
$$\Psi^{-1}\left((x_1, x_2, x_3) \otimes e_3^{(3)}\right) = (x_1 \vdash x_2) \vdash x_3 - (x_1 \vdash x_3) \dashv x_2 - x_1 \vdash (x_2 \vdash x_3).$$

## 2. 4-dimensional Leibniz dialgebras which are constructed by null-filiform Leibniz algebras

**Definition 2.1** A 0-dialgebra $(A, \vdash, \dashv)$ is called *(right) Leibniz dialgebra* if for any elements $x, y, z$ of $A$

$$(x \vdash y) \dashv z - (x \dashv z) \vdash y - x \vdash (y \dashv z) = 0, \tag{6}$$

$$(x \dashv y) \vdash z - (x \vdash z) \dashv y - x \vdash (y \vdash z) = 0, \tag{7}$$

$$(x \dashv y) \dashv z - (x \dashv z) \dashv y - x \dashv (y \dashv z) = 0. \tag{8}$$

From Definition 2.1 we can easily derive that if $(A, \vdash, \dashv)$ is a (right) Leibniz dialgebra then $(A, \dashv)$ is a ordinary right Leibniz algebra.

In this work, we investigate such Leibniz dialgebras that $(A, \dashv)$ is finite-dimensional null-filiform Leibniz algebra. Note that $n$-dimensional Leibniz algebra $(A, [-,-])$ is called a null-filiform if $A^{n+1} = 0$ and $A^n \neq 0$, where

$$A^2 = [A, A], \ A^{k+1} = \left[A^k, A\right], \quad k \geq 2.$$

It is known by [4] that, for any $n$-dimensional null-filiform Leibniz algebra $(A, [-,-])$ there exist a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ such that

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{9}$$

(omitted products are zero).

Therefore, there exist such basis of $(A, \dashv, \vdash)$ that in this basis the multiplication table has the following form:

$$e_i \dashv e_1 = e_{i+1}, \ \ 1 \leq i \leq n-1,$$
$$e_i \dashv e_j = 0, \ \ 2 \leq i \leq n.$$

The basis, with the previous condition we call an adapted basis.

**Lemma 2.1.** *Let $(A, \dashv, \vdash)$ be a Leibniz dialgebra such that $(A, \dashv)$ is null-filiform Leibniz algebra. Then for the adapted basis $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, the following is hold:*

$$e_i \vdash e_j \in span\{e_2, \ldots, e_n\}, 1 \leq i, j \leq n.$$

*Proof.* Considering the identity (1) for any triple of $(e_i, e_j, e_k)$, we have

$$e_i \dashv (e_j \dashv e_k) = e_i \dashv (e_j \vdash e_k).$$

Left-hand side of this equation is always equal to zero. Thus, $e_i \dashv (e_j \vdash e_k) = 0$ which implies, $e_j \vdash e_k \in \operatorname{span}\{e_2, \ldots, e_n\}$. □

**Lemma 2.2.** *Let $(A, \dashv, \vdash)$ is Leibniz dialgebra such that $(A, \dashv)$ is null-filiform Leibniz algebra. Then,*

$$e_i \vdash e_{j+1} = (e_i \vdash e_j) \dashv e_1 - e_{i+1} \vdash e_j. \tag{10}$$

*Proof.* We prove the lemma by induction on $j$.

- For $j = 1$:

$$e_i \vdash e_2 = e_i \vdash (e_1 \dashv e_1) = [\text{ by using (6)}] = (e_i \vdash e_1) \dashv e_1 - (e_i \dashv e_1) \vdash e_1 = (e_i \vdash e_1) \dashv e_1 - e_{i+1} \vdash e_1$$

- Let's assume that this condition also holds for $j = k$, and show it for $j = k + 1$ :

$$e_i \vdash e_{k+1} = e_i \vdash (e_k \dashv e_1) = [\ \textit{by using } (6)] = (e_i \vdash e_k) \dashv e_1 - (e_i \dashv e_1) \vdash e_k = (e_i \vdash e_k) \dashv e_1 - e_{i+1} \vdash e_k.$$

$\square$

Now we investigate 4-dimensional Leibniz dialgebras which are constructed by filiform Leibniz algebras. Let us put:

$$\begin{aligned} e_1 \vdash e_1 &= \alpha_{112}e_2 + \alpha_{113}e_3 + \alpha_{114}e_4, \\ e_2 \vdash e_1 &= \alpha_{212}e_2 + \alpha_{213}e_3 + \alpha_{214}e_4, \\ e_3 \vdash e_1 &= \alpha_{312}e_2 + \alpha_{313}e_3 + \alpha_{314}e_4, \\ e_4 \vdash e_1 &= \alpha_{412}e_2 + \alpha_{413}e_3 + \alpha_{414}e_4, \end{aligned}$$

where, $\forall \alpha_{ijk} \in \mathbb{C}$.

Since (10), we can derive a whole multiplication table, by using these above products.

**Theorem 2.1.** *There are three(up to isomorphism) 4-dimensional Leibniz dialgebras which are constructed by 4-dimensional null-filiform Leibniz algebras:*

$$\begin{array}{lll} (L_1, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3); & \\ (L_2, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3), & e_1 \vdash e_1 = e_4; \\ (L_3, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3), & e_1 \vdash e_1 = -e_2, \ e_1 \vdash e_2 = -e_3, \ e_1 \vdash e_3 = -e_4; \\ (L_4, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3), & e_1 \vdash e_1 = -e_2 + e_4, \ e_1 \vdash e_2 = -e_3, \ e_1 \vdash e_3 = -e_4; \\ (L_5, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3), & e_1 \vdash e_1 = e_2, \ e_2 \vdash e_1 = e_3, \ e_3 \vdash e_1 = e_4; \\ (L_6, \dashv, \vdash): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1} \ \ (1 \le i \le 3), & e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_4, \ e_2 \vdash e_1 = e_3, \ e_3 \vdash e_1 = e_4, \end{array}$$

*where, omitted products are zero.*

Proof.

In general, for triple $(e_i, e_j, e_1)$ using Lemma 2.2, we have

$$e_i \vdash e_{j+1} = (e_i \vdash e_j) \dashv e_1 - e_{i+1} \vdash e_j.$$

So, we can find other products by the given multiplication table above.

$$\begin{aligned} e_1 \vdash e_2 &= (e_1 \vdash e_1) \dashv e_1 - e_2 \vdash e_1 = (\alpha_{112}e_2 + \alpha_{113}e_3 + \alpha_{114}e_4) \dashv e_1 - (\alpha_{212}e_2 + \alpha_{213}e_3 + \alpha_{214}e_4) \\ &= \alpha_{112}e_3 + \alpha_{113}e_4 - \alpha_{212}e_2 - \alpha_{213}e_3 - \alpha_{214}e_4 = -\alpha_{212}e_2 + (\alpha_{112} - \alpha_{213})e_3 + (\alpha_{113} - \alpha_{214})e_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 \vdash e_2 &= (e_2 \vdash e_1) \dashv e_1 - e_3 \vdash e_1 = (\alpha_{212}e_2 + \alpha_{213}e_3 + \alpha_{214}e_4) \dashv e_1 - (\alpha_{312}e_2 + \alpha_{313}e_3 + \alpha_{314}e_4) \\ &= \alpha_{212}e_3 + \alpha_{213}e_4 - \alpha_{312}e_2 - \alpha_{313}e_3 - \alpha_{314}e_4 = -\alpha_{312}e_2 + (\alpha_{212} - \alpha_{313})e_3 + (\alpha_{213} - \alpha_{314})e_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 \vdash e_2 &= (e_3 \vdash e_1) \dashv e_1 - e_4 \vdash e_1 = (\alpha_{312}e_2 + \alpha_{313}e_3 + \alpha_{314}e_4) \dashv e_1 - (\alpha_{412}e_2 + \alpha_{413}e_3 + \alpha_{414}e_4) \\ &= \alpha_{312}e_3 + \alpha_{313}e_4 - \alpha_{412}e_2 - \alpha_{413}e_3 - \alpha_{414}e_4 = -\alpha_{412}e_2 + (\alpha_{312} - \alpha_{413})e_3 + (\alpha_{313} - \alpha_{414})e_4; \end{aligned}$$

$$e_4 \vdash e_2 = (e_4 \vdash e_1) \dashv e_1 = (\alpha_{412}e_2 + \alpha_{413}e_3 + \alpha_{414}e_4) \dashv e_1 = \alpha_{412}e_3 + \alpha_{413}e_4.$$

Similarly, we can also find other multiplications.

$e_1 \vdash e_3 = \alpha_{312}e_2 + (\alpha_{313} - 2\alpha_{212})e_3 + (\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213})e_4;$

$e_2 \vdash e_3 = \alpha_{412}e_2 + (\alpha_{413} - 2\alpha_{312})e_3 + (\alpha_{212} + \alpha_{414} - 2\alpha_{313})e_4;$

$e_3 \vdash e_3 = -2\alpha_{412}e_3 + (\alpha_{312} - 2\alpha_{413})e_4;$

$e_4 \vdash e_3 = \alpha_{412}e_4;$

$e_1 \vdash e_4 = -\alpha_{412}e_2 + (3\alpha_{312} - \alpha_{413})e_3 + (3\alpha_{313} - 3\alpha_{212} - \alpha_{414})e_4;$

$e_2 \vdash e_4 = 3\alpha_{412}e_3 + (3\alpha_{413} - 3\alpha_{312})e_4;$

$e_3 \vdash e_4 = -3\alpha_{412}e_4;$

$e_4 \vdash e_4 = 0.$

Now for the triple $(e_i, e_1, e_j)$ using (2), we have

$$(e_i \vdash e_1) \vdash e_j - (e_i \dashv e_1) \vdash e_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4.$$

We preferred to write the obtained results in the form of a table so that the calculations are understandable. This helps us to shorten the complex entries. Therefore, we present the results in tabular form in all subsequent cases.

| | | |
|---|---|---|
| for $i = 4, j = 4$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{412} = 0$ |
| for $i = 4, j = 3$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{413}(\alpha_{312} - 2\alpha_{413}) = 0$ (a) |
| for $i = 4, j = 2$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{413}(\alpha_{312} - \alpha_{413}) = 0$ (b)<br>$\alpha_{413}\alpha_{313} = 0$ |

Then from (a) and (b) we can get $\alpha_{\mathbf{413}} = \mathbf{0}$. Now consider

| | | |
|---|---|---|
| for $i = 4, j = 1$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{414} = 0$ |
| for $i = 3, j = 4$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{312} = 0$ |
| for $i = 3, j = 2$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{313} = 0$ |
| for $i = 2, j = 3$ | $\Rightarrow$ | $\alpha_{313} = 0$ |

Thus we get that, $\alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} = 0$. Therefore, we have the following multiplications:

$$\begin{array}{ll} e_1 \vdash e_1 = \alpha_{112}e_2 + \alpha_{113}e_3 + \alpha_{114}e_4; & e_1 \vdash e_2 = (\alpha_{112} - \alpha_{213})e_3 + (\alpha_{113} - \alpha_{214})e_4; \\ e_2 \vdash e_1 = \alpha_{213}e_3 + \alpha_{214}e_4; & e_2 \vdash e_2 = (\alpha_{213} - \alpha_{314})e_4; \\ e_3 \vdash e_1 = \alpha_{314}e_4; & e_1 \vdash e_3 = (\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213})e_4; \end{array}$$

(omitted products are zero).

Additionally, there are the following three cases in which we obtain additional restrictions for the structural constants:

| | | |
|---|---|---|
| for $i = 2, j = 1$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{213} - 1)\alpha_{314} = 0$ |
| for $i = 1, j = 2$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{112} - 1)(\alpha_{213} - \alpha_{314}) = 0$ |
| for $i = 1, j = 1$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} = 0$<br>$(\alpha_{112} - 1)\alpha_{214} + \alpha_{113}\alpha_{314} = 0$ |

To sum up all,

$$\begin{cases} (\alpha_{213} - 1)\alpha_{314} & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)(\alpha_{213} - \alpha_{314}) & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{214} + \alpha_{113}\alpha_{314} & = 0 \\ \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} & = 0. \end{cases}$$

By using (7) we find other conditions for structure constants:

$$(e_i \dashv e_1) \vdash e_j - (e_i \vdash e_j) \dashv e_1 - e_i \vdash (e_1 \vdash e_j) = 0.$$

It can be seen that in formula (7) all triplets involving $e_3$ and $e_4$ are valid. So it is enough to observe the formula only for combinations of $e_1$ and $e_2$:

| | | |
|---|---|---|
| for $i = 1, j = 1$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{112} + 1)(\alpha_{213} - \alpha_{112}) = 0$<br>$(1 + \alpha_{112})(\alpha_{214} - \alpha_{113}) - \alpha_{113}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) = 0$ |
| for $i = 1, j = 2$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{112} - \alpha_{213} + 1)(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) = 0$ |
| for $i = 2, j = 1$ | $\Rightarrow$ | $(\alpha_{314} - \alpha_{213})(1 + \alpha_{112}) = 0$ |

Hence, we get these conditions:

$$\begin{cases} (1 + \alpha_{112})(\alpha_{213} - \alpha_{112}) & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{214} - \alpha_{113}) - \alpha_{113}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} - \alpha_{213} + 1)(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} + 1)(\alpha_{314} - \alpha_{213}) & = 0. \end{cases}$$

As an exception, if we apply formulas (7), (2) to triple of vectors $(e_1, e_2, e_1)$, the following cases occurs, respectively:

$$(e_1 \dashv e_2) \vdash e_1 - (e_1 \vdash e_1) \dashv e_2 - e_1 \vdash (e_2 \vdash e_1) = 0 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\alpha_{213}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) = 0}$$

$$(e_1 \vdash e_2) \vdash e_1 = (e_1 \dashv e_2) \vdash e_1 \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\alpha_{314}(\alpha_{112} - \alpha_{213}) = 0}$$

Summarizing all obtained conditions, we have the next system of equations:

$$\begin{cases} (\alpha_{213} - 1)\alpha_{314} & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)(\alpha_{213} - \alpha_{314}) & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{214} + \alpha_{113}\alpha_{314} & = 0 \\ \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{213} - \alpha_{112}) & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{214} - \alpha_{113}) - \alpha_{113}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} - \alpha_{213} + 1)(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} + 1)(\alpha_{314} - \alpha_{213}) & = 0 \\ \alpha_{213}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ \alpha_{314}(\alpha_{112} - \alpha_{213}) & = 0. \end{cases} \tag{11}$$

We will solve the possible cases of solving this system using first equation of the system, which is easier. Firstly, let us observe $(\alpha_{213} - 1)\alpha_{314} = 0$. The following two situations can occur when solving this equation:

If $\alpha_{213} = 1$, then we have

$$\begin{cases} (\alpha_{112} - 1)(1 - \alpha_{314}) & = 0 \\ \alpha_{112} - 1 & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{214} + \alpha_{113}\alpha_{314} & = 0 \\ \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(1 - \alpha_{112}) & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{214} - \alpha_{113}) - \alpha_{113}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2) & = 0 \\ \alpha_{112}(\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2) & = 0 \\ (\alpha_{112} + 1)(\alpha_{314} - 1) & = 0 \\ (\alpha_{112} + \alpha_{314} - 2) & = 0 \\ \alpha_{314}(\alpha_{112} - 1) & = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

From this system we derive

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} = \alpha_{214} = \alpha_{113} & = 0 \\ \alpha_{112} = \alpha_{314} = 1. \end{cases}$$

If $\alpha_{213} \neq 1$, then $\alpha_{314} = 0$ and

We have already seen when $\alpha_{213}$ was equal to one, so in this case $\alpha_{213} \neq 1$, then:

$$\begin{cases} (\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} & = 0 \\ (\alpha_{112} - 1)\alpha_{214} & = 0 \\ \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{213} - \alpha_{112}) & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})(\alpha_{214} - \alpha_{113}) - \alpha_{113}(\alpha_{112} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} - \alpha_{213} + 1)(\alpha_{112} - 2\alpha_{213}) & = 0 \\ (\alpha_{112} + 1)\alpha_{213} & = 0 \\ \alpha_{213}(\alpha_{112} - 2\alpha_{213}) & = 0. \end{cases}$$

By subtracting equations $(\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} = 0$ and $(\alpha_{112} - 1)\alpha_{213} = 0$, we get $\alpha_{213} = 0$, and obtain

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{212} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{412} = \alpha_{413} = \alpha_{414} = \alpha_{113} = \alpha_{214} & = 0 \\ (1 + \alpha_{112})\alpha_{112} & = 0. \end{cases}$$

There are two possible value for the parameter $\alpha_{112} = 0$ and $\alpha_{112} = -1$.

a)$\alpha_{112} = 0 \Rightarrow \alpha_{214} = 0, \alpha_{113} = 0$;

b)$\alpha_{112} = -1 \Rightarrow \alpha_{214} = 0, \alpha_{113} = 0$.

Hence, there are three fundamental solutions for the system (11).

$(\alpha_{112}, \alpha_{113}, \alpha_{114}, \alpha_{213}, \alpha_{214}, \alpha_{314}) \in \{(0,0,\alpha,0,0,0),\ (-1,0,\beta,0,0,0),\ (1,0,\gamma,1,0,1)\}$,

where $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Then we put these structural constants in their proper places. Therefore. we obtain three class of Leibniz dialgebras, associated with 4-dimensional null-filiform Leibniz algebra $(A, \dashv)$ :

$$\begin{array}{ll} L_1(\alpha): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1}, (1 \le i, j \le n), \quad e_1 \vdash e_1 = \alpha e_4; \\ L_2(\beta): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1}, (1 \le i, j \le n), \quad e_1 \vdash e_1 = -e_2 + \beta e_4, e_1 \vdash e_2 = -e_3, e_1 \vdash e_3 = -e_4; \\ L_3(\gamma): & e_i \dashv e_1 = e_{i+1}, (1 \le i, j \le n), \quad e_1 \vdash e_1 = e_2 + \gamma e_4, e_2 \vdash e_1 = e_3, e_3 \vdash e_1 = e_4. \end{array}$$

In the first class of dialgebra $L_1(\alpha)$, if $\alpha = 0$ we have trivial multiplication of $\vdash$ and obtain the algebra $L_1$.

If $\alpha \neq 0$, then we can suppose $\alpha = 1$ and obtain the algebra $L_2$

In the second class of dialgebra $L_2(\beta)$, if $\beta = 0$ we have the following multiplications:

$$e_1 \vdash e_1 = -e_2,\ e_1 \vdash e_2 = -e_3,\ e_1 \vdash e_3 = -e_4$$

and obtain the algebra $L_3$.

If $\beta \neq 0$, then we can suppose $\beta = 1$ and obtain the algebra $L_4$.

In the third class of dialgebra $L_3(\gamma)$, if $\gamma = 0$ we have the following multiplications:

$$e_1 \vdash e_1 = e_2,\ e_2 \vdash e_1 = e_3,\ e_3 \vdash e_1 = e_4$$

and obtain the algebra $L_5$.

If $\gamma \neq 0$, then we can suppose $\gamma = 1$ and obtain the algebra $L_6$.

The proof of Theorem 2.1 is complete. □


1. Ayupov Sh., Omirov B., Rakhimov I. Leibniz Algebras, Structure and Classification. 2019. Taylor Francis Group, 323 p.
2. Ayupov Sh., Kudaybergenov, K., Omirov, B., Zhao, K. Semisimple Leibniz algebras, their derivations and automorphisms. Linear and Multilinear Algebra. 2017. 68(2), 1–15.
3. Ayupov Sh.A., Camacho L.M., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Leibniz algebras associated with representations of filiform Lie algebras. Journal of Geometry and Physics. 2015. 98, 181–195.
4. Ayupov Sh, Omirov B. On some classes of nilpotent Leibniz algebras. Sibirsk. Mat. Zh.(in Russian) 2001. 42(1), 18-29.
5. Cañete, E. M., Khudoyberdiyev, A. K. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. Linear Algebra and Its Applications. 2013. 439(1), 273–288.
6. Gómez-Vidal S., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Some remarks on semisimple Leibniz algebras, Journal of Algebra. 2014. 410, 526-540.
7. Loday J.-L. Une version non commutative des alg‘ebres de Lie: les alg‘ebres de Leibniz. Enseign. Math.1993. 39, 269-293.
8. Loday J.-L. Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and homology, Math. Ann. 1993. 296, 139-158.
9. Loday J.-L. Dialgebras, in: Dialgebras and Related Operads. Springer Verl. 2001. Lecture Notes in Mathematics. 1763, 7-66.
10. Khudoyberdiyev A.Kh., Ladra M., Omirov B.A. On solvable Leibniz algebras whose nilradical is a direct sum of null-filiiliform algebras. Linear and Multilinear Algebra. 2013. 62(9), 1220-1239.
11. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras. Journal of Geometry and Physics. 2014. 86, 149-163.

12. Khudoyberdiyev A., Rakhimov I., Said Husain Sh. K. On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras. Linear Algebra and its Applications. 2014. 457, 428-454.
13. Kolesnikov, P. S. Varieties of dialgebras and conformal algebras. Siberian Mathematical Journal. 2008. 49(2), 257-272.
14. Rikhsiboev I.M. Classification of low dimensional complex nilpotent diassociative algebras. Uzbek.Math.Zh.(in Russian). 2007. 2, 112-118.
15. Rikhsiboev I.M. Four-dimensional nilpotent diassociative algebras. Journal of Generalized Lie Theory and Applications. 2015. 9(1), 1-7.
16. Kac V.G., Vertex Algebras for Beginners. American Mathematical Soc. 1998. 11. 201 p.

Описание маломерных диалгебр Лейбница, построенных нуль-филиформными алгебрами Лейбница

**Азизов Мажидхон**

В этой статье представлена классификация малоразмерных диалгебр Лейбница. Точнее, классифицируются малоразмерные диалгебры Лейбница, которые построены на нуль- филиформ алгебрах Лейбница.

**Ключевые слова:** диалгебра; диалгебра Лейбница; алгебра Лейбница; нуль-филиформные алгебры Лейбница.

Nul-filiform Leybnits algebralari orqali qurilgan kichik o'lchamli Leybnits dialgebralari tavsifi

**Azizov Majidxon**

Ushbu maqolada kichik o'lchamli Leybnits dialgebralarini tavsifi keltirilgan. Yanada aniqroq aytganda, nul-filiform Leybnits algebralaridan qurilgan, kichik o'lchamli Leybnits dialgebralarining tasnifi keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** dialgebra; Leybnits dialgebrasi; Leybnits algebra; nul-filiform Leybnits algebrasi.

**Received: 02/08/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Azizov M. Description of 4-dimensional Leibniz dialgebras which are constructed by null-filiform Leibniz algebra. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 1-8

# Convergent expansion for eigenvalue of the generalized Friedrichs model under rank one perturbation

**Dustov Said**
Navoi State Pedagogical Institute
Navoi, Uzbekistan
SaidDustov@mail.ru

## Abstract

A family $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, $p \in \mathbb{T}^3$ of the generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one is considered. We obtain an absolutely convergent expansion for eigenvalue at $\mu(p)$, the coupling constant threshold. The expansion is dependent to a large extent on whether the upper bound of the essential spectrum is a threshold resonance or a threshold eigenvalue.

**Keywords:** Generalized Friedrichs models; coupling constant threshold; Hamiltonian; dispersion relation; threshold resonance; threshold eigenvalue.

**MSC 2020:** 47A10, 47A15, 47B02, 47D08, 81Q05

## 1. Introduction

In the present paper, we consider the generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, depending on the parameter $p \in \mathbb{T}^3$, with the rank-one perturbation associated to a system of two arbitrary or identical quantum mechanical particles moving on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$, and interacting via zero-range repulsive potential. This operators generalizes the two-particle Schrödinger operator $H_\mu(k) := H_0(k) + \mu V$ with the fixed quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ of the pair of particles on $\mathbb{Z}^3$, (see, e.g., [1, 2] and references therein). The Friedrichs model [3], being mathematically solvable, is one of the best tools to describe quantum decay in physics (see [4, 5, 6] for detailed reviews of applications of the Friedrichs model in various physical and mathematical problems). Another important aspect of studying the generalized Friedrichs models is that they describe the Hamiltonians for systems of both bosons and fermions (see, i.e., [1, 7]).

For a wide class of the two-particle discrete Schrödinger operators $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ on the $d$-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, for all nonzero values of the quasi-momentum $k$ the existence of eigenvalues of $H(k)$ below the threshold, under the assumption that $H_\mu(0)$ has either a threshold energy resonance or a threshold eigenvalue at the threshold (bottom) of the essential spectrum was proved in [1]. A similar result for the Friedrichs model was obtained in [8].

The existence and locations, and the exact number of eigenvalues below and above the essential spectrum for the two–particle discrete Schrödinger operators on $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$ studied in detail in [7, 9, 10, 11, 12].

The appearance and number of eigenvalues below and above the essential spectrum for the two–particle discrete Schrödinger operators on $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ i.e., the presence of threshold resonances and threshold eigenvalues was studied in [7].

The authors of [13] studied for the Schrödinger operator $H_\mu = -\Delta + \mu V$ for a situation, where as $\mu$ approaches to $\mu_0 \geq 0$, an eigenvalue $E(\mu)$ accumulates to 0, the bottom of the essential spectrum of $H_\mu$, i.e., as $\mu$ approaches to $\mu_0$ an eigenvalue is absorbed at the threshold of continuum, and conversely, as $\mu$ seeks to $\mu_0 + \epsilon, \epsilon > 0$, the continuum *gives birth* to a new eigenvalue. This phenomenon in [13] is called *coupling constant threshold*. Moreover, in [13] an absolutely convergent expansion for the eigenvalue $E(\mu)$ at $\mu_0 \geq 0$, the coupling constant threshold of $H_\mu$, was found.

In [14] the existence of positive coupling constant threshold $\mu = \mu(k) > 0$ for the Schrödinger operator $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$ associated to a system of two identical quantum mechanical particles (bosons) moving on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ and interacting via zero-range repulsive potential is proved: the operator has no eigenvalues for any $0 < \mu < \mu(k)$, nevertheless for each $\mu > \mu(k)$, it has a unique eigenvalue $E(\mu, k)$ lying above the essential spectrum. Moreover, an absolutely convergent expansions for the eigenvalue $E(\mu, k)$ at $\mu = \mu_0$ depending on $d \geq 3$ was found. However, in [15] the absence of positive coupling constant thresholds, i.e., for each $\mu > 0$ and $k \in \mathbb{T}^d$ the existence of a unique eigenvalue $E(\mu, k)$ of the discrete Schrödinger operator $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, associated to a system of two identical quantum-mechanical particles (bosons) on $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$ wear proved and an absolutely convergent expansion for $E(\mu, k)$ at $\mu = 0$ was found.

A family $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, $p \in \mathbb{T}^d$ of the generalized Friedrichs models with the local perturbation of rank one, associated to a system of two particles, moving on the $d$- dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, was considered in [16, 17, 18, 19]. A criterion to existence of a coupling constant threshold $\mu = \mu_0(p) \geq 0$ depending on the parameters of the model was proved in [16, 19]. An absolutely convergent expansion for the unique eigenvalue $E(\mu, p)$ of $H_\mu(p)$ at $\mu(p) = 0$ was found in [18].

In [20] it is studied the existence of eigenvalues of the generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, with a rank-one perturbation, depending on parameters $\mu > 0$ and $p \in \mathbb{T}^2$, and found an absolutely convergent expansions for eigenvalues at $\mu(p)$, the coupling constant threshold. The expansions are highly dependent on that, whether the threshold $m(p)$ of the essential spectrum is: $(i)$ neither a threshold eigenvalue nor a threshold resonance; $(ii)$ a threshold resonance; $(iii)$ a threshold eigenvalue.

In [19], the Generalized Friedrichs model under rank one perturbation is considered. The analytic dependence on the parameters of the eigenvalue and associated eigenfunction is proven. The existance of the coupling constant threshold $\mu(p)$ is also found for the operator $H_\mu(p), p \in U_\delta(p_0)$.

In this work absolutely convergent expansions (asymptotics) of the eigenvalues are found explicitly for each of the following cases: the threshold $M(p)$ is a threshold resonance or a threshold eigenvalue (see Theorem 2).

## 2. Notations and main results

Troughout the paper we use the following notations: Let $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ be the three-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T}^3)$ is the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$.

Let $w(\cdot,\cdot)$ be a real-valued analytic function on $(\mathbb{T}^3)^2$ and $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^3)$.

We consider the Generalized Friedrichs model $H_\mu(p), p \in \mathbb{T}^3$ acting in $L^2(\mathbb{T}^3)$ defined as

$$H_\mu(p) = H_0(p) + \mu V, \quad \mu > 0,$$

where $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

and $V : L^2(\mathbb{T}^3) \to L^2(\mathbb{T}^3)$ is the perturbation operator of the form

$$(Vf)(q) = \varphi(q)(f, \varphi),$$

where $(\cdot, \cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T}^3)$.

The perturbation $V$ of $H_0(p)$ is the positive operator of rank one. Consequently, by the well-known Weyl theorem [21] on compact perturbations, the essential spectrum of $H_\mu(p)$ satisfies the equalities

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p))$$

and fills the segment $[m(p), M(p)]$ on the real axis, where

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

Let us introduce the hypothesis that we assume throughout the paper.

**Hypothesis 2.1.** *The following conditions are satisfied:*

*(i) the function $\varphi(\cdot)$ is nontrivial and real-analytic and has no singularities on the torus $\mathbb{T}^3$;*

*(ii) the function $w(\cdot, \cdot)$ is real-analytic function on $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ and has a unique non degenerated maximum at $(p_0, q_0) \in (\mathbb{T}^3)^2$.*

By Hypothesis 2.1, there exist $\delta$-neighborhood $U_\delta(p_0) \subset \mathbb{T}^3$ of the point $p = p_0 \in \mathbb{T}^3$ and an analytic vector function $\mathbf{q}_0 : U_\delta(p_0) \to \mathbb{T}^3$ such that for each $p \in U_\delta(p_0)$, the point $\mathbf{q}_0(p) = \left(q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)}\right) \in \mathbb{T}^3$ is a unique non-degenerated maximum of the function $w_p(\cdot)$.

For any $\mu > 0$ and $p \in \mathbb{T}^3$, we define an analytic function $\Delta(\mu, p; \cdot)$ (the Fredholm determinant, associated to the operator $H_\mu(p)$) in $\mathbb{C}\backslash[m(p),\, M(p)]$ as

$$\Delta(\mu, p; \cdot) = 1 - \mu\Omega(p; \cdot),$$

where

$$\Omega(p; z) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(q)dq}{z - w_p(q)}, \quad p \in \mathbb{T}^3, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[m(p),\, M(p)].$$

**Remark 2.1.** We note that by the parametrical Morse lemma for any $p \in U_\delta(p_0)$ there exists a map $s = \psi(y, p)$ of the sphere $W_\gamma(0) \subset \mathbb{R}^3$ with radius $\gamma > 0$ and center at $y = 0$ to a neighborhood $U(\mathbf{q}_0(p))$ of the point $\mathbf{q}_0(p)$ that in $U(\mathbf{q}_0(p))$ the function $w_p(\psi(y, p))$ can be represented as

$$w_p(\psi(y, p)) = M(p) - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = M(p) - y^2.$$

Here, the function $\psi(y, \cdot)$ (resp. $\psi(\cdot, p)$) is analytic in $U_\delta(p_0)$ (resp. $W_\gamma(0)$) and $\psi(0, p) = \mathbf{q}_0(p)$. Moreover, the Jacobian $J(\psi(y, p))$ of the mapping $s = \psi(y, p)$ is analytic in $W_\gamma(0)$ and positive, i.e., $J(\psi(y, p)) > 0$ for all $y \in W_\gamma(0)$ and $p \in U_\delta(p_0)$.

**Definition 2.1.** The threshold $z = M(p)$ is called a regular point of the essential spectrum of the operator $H_\mu(p)$, if the equation $H_\mu(p)f = M(p)f$ has only trivial solution $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$.

Let $L^1(\mathbb{T}^3)$ be the Banach space of integrable functions on $\mathbb{T}^3$.

**Definition 2.2.** The threshold $z = M(p)$ is called a $M(p)$ energy resonance (virtual level) of the essential spectrum of the operator $H_\mu(p)$, if the equation $H_\mu(p)f = M(p)f$ has a non-trivial solution $f \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$. The solution $f$ is called *resonance state* of the operator $H_\mu(p)$.

We apply the results of Lemmas 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 and that is why, for readers' convenience, we recall these results as a lemma [19].

**Lemma 2.1.** *Assume Hypothesis 2.1.*

(i) *For any $\mu > 0$ and $p \in \mathbb{T}^3$, a number $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(H_\mu(p))$ is an eigenvalue of the operator $H_\mu(p)$ if and only if*

$$\Delta(\mu, p; z) = 0.$$

*The corresponding eigenfunction $f$ is of the form*

$$f_{\mu,p}(q) = \frac{C\mu\varphi(q)}{z - w_p(q)},$$

*and is analytic on $\mathbb{T}^3$, where $C = C(p) > 0$ is the normalizing constant.*

(ii) *The integral*

$$\Omega(p) = \Omega(p, M(p)) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(s)ds}{M(p) - w_p(s)}$$

*exists and is analytic function in $U_\delta(p_0)$.*

(iii) *Let $\mathbf{q}_0(p)$, $p \in U_\delta(p_0)$ be a unique non-degenerate maximum point of the function $w_p$ and let $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$ (resp. $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$). Then*

$$\Delta(\mu, p; M(p)) = 0$$

*if and only if $z = M(p)$ is a threshold resonance (resp. an eigenvalue) for the operator $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, i.e., the equation*

$$H_\mu(p)f = M(p)f$$

*has a nonzero solution*

$$f_{\mu,p}(\cdot) = \frac{C\mu\varphi(\cdot)}{M(p) - w_p(\cdot)},$$

*which belongs to $L^1(\mathbb{T}^3)\backslash L^2(\mathbb{T}^3)$ (resp. $L^2(\mathbb{T}^3)$), where $C = C(p) > 0$.*

(iv) *For any $\mu > 0$, $p \in U_\delta(p_0)$ and sufficiently small $z - M(p) > 0$ the function $\Delta(\mu, p; \cdot)$ can be represented as the following convergent Laurent-Puiseux series*

$$\Delta(\mu, p, z) = 1 - \mu\Omega(p) - \mu c_1(p)(z - M(p))^{1/2} - \mu F(p, z),$$

*where*

$$F(\mu, z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n(p)(z - M(p))^{n/2}, \tag{1}$$

*with*

$$c_1(p) = -\frac{1}{2}\pi\varphi^2(\mathbf{q}_0(p))J(\mathbf{q}_0(p)).$$

Moreover, the coefficients

$$c_1(p), c_2(p), \dots$$

*are real-analytic functions in $p \in U_\delta(0)$.*

**Definition 2.3.** For $p \in U_\delta(p_0)$, we define the number $\mu(p) > 0$ as

$$\mu(p) = \left( \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(q)dq}{M(p) - w_p(q)} \right)^{-1} > 0. \tag{2}$$

In the next theorem we recall, the existence criterion of a unique eigenvalue of $H_\mu(p)$ upper $M(p)$, $p \in U_\delta(p_0)$ ([19, Theorem 2.1]).

**Theorem 2.1.** *Assume Hypothesis 2.1. Then for any fixed $p \in U_\delta(p_0)$, the operator $H_\mu(p)$ has a unique eigenvalue $E(\mu, p)$ lying above the threshold $M(p)$ if and only if $\mu > \mu(p)$. Moreover, if $\mu = \mu(p)$, $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$ (resp. $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$), then the threshold $M(p)$ is a virtual level (resp. an eigenvalue) of the operator $H_\mu(p)$.*

**Remark 2.2.** We remark that under Hypothesis 2.1 for any $p \in U_\delta(p_0)$, the operator $H_\mu(p)$ has no eigenvalues lying above the essential spectrum, if and only if $0 < \mu \le \mu(p)$.

**Remark 2.3.** The positivity of the perturbation operator $V$ yields the absence of eigenvalues of the operator $H_\mu(p)$ lying below bound of the essential spectrum.

**Remark 2.4.** The set $\mathbb{G}$ of $\mu > 0$, for which the threshold is a regular point of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_\mu(p))$ of $H_\mu(p)$, is an open set in $(0, +\infty)$. More precisely, $\mathbb{G} = (0, +\infty)\backslash\{\mu(p)\}$.

Next, we present the main result of the current paper, where an absolutely convergent expansion for the eigenvalue $E(\mu, p)$ at the coupling constant threshold $\mu(p)$ defined in (2) is obtained in the cases when the threshold $M(p)$ is a threshold resonance or a threshold eigenvalue.

**Theorem 2.2.** *Assume Hypothesis 2.1. Then for any fixed $p \in U_\delta(p_0)$, $\mu$ tends to $\mu(p)$ iff $E(\mu, p)$ approaches to the threshold $M(p)$. Moreover, for sufficiently small and positive $\mu - \mu(p)$, the eigenvalue $E(\mu, p)$ has the following absolutely convergent expansions:*

(i) *If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$, then $E(\mu, p)$ represents as the following convergent Taylor series expansion*

$$E(\mu, p) = M(p) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^n \right)^2, \tag{3}$$

*where $a_n(p)$, $n = 1, 2, \dots$ is real numbers with*

$$a_1(p) = \left[ \frac{\pi\varphi^2(\mathbf{q}_0(p))J(\mathbf{q}_0(p))\mu^2(p)}{2} \right]^{-1} > 0.$$

(ii) If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$ *then $E(\mu, p)$ represents as the following Puiseux series at $\mu = \mu(p)$*

$$E(\mu, p) = M(p) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^{n/2} \right)^2, \tag{4}$$

*where $a_n(p)$, $n = 1, 2, \dots$ real numbers with*

$$a_1(p) = \left[ -\mu^2(p)c(p) \right]^{-1/2}, \; c(p) < 0$$

*and $[\mu - \mu(p)]^{1/2} > 0$ for $\mu - \mu(p) > 0$.*

The theorem gives the following corollary.

**Corollary 2.1.** *Assume Hypothesis 2.1. Then for any fixed $p \in U_\delta(p_0)$ for $E(\mu,p)$ the following asymptotic relations hold:*

(i) *If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$, then*

$$E(\mu,p) = M(p) + \left[\frac{\pi\varphi^2(\mathbf{q}_0(p))J(\mathbf{q}_0(p))\mu^2(p)}{2}\right]^{-2}[\mu-\mu(p)]^2 + O([\mu-\mu(p)]^3),\ \mu\to\mu(p).$$

(ii) *If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$, then*

$$E(\mu,p) = M(p) + \left[-\mu^2(p)c(p)\right]^{-1}[\mu-\mu(p)] + O([\mu-\mu(p)]^{3/2}),\ \mu\to\mu(p)$$

*with $c(p) < 0$.*

## 3. Proof of the results

**Lemma 3.1.** *Assume Hypothesis 2.1, $p \in U_\delta(p_0)$ and $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$. Then the coefficient $c_2(p)$ of expansion (1) is nonzero.*

Proof. Assume the converse, that is $c_2(p) = 0$. Then the parts (i) and (iv) of the Lemma 2.1 imply

$$-\frac{\mu-\mu(p)}{\mu(p)} - \mu\sum_{n=3}^{\infty} c_n(p)(E(\mu,p)-M(p))^{n/2} = 0. \tag{5}$$

For each $p \in \mathbb{T}^3$, the eigenvalue $E(\mu,p)$ is a concave function of $\mu \geq 0$ (see [22, Theorem 1]). As every concave function on $\mathbb{R}$ has a finite right derivatives, the limit

$$\lim_{\mu\to\mu(p)^+}\frac{E(\mu,p)-M(p)}{\mu-\mu(p)}$$

exists and is finite. Therefore,

$$E(\mu,p)-M(p) = C(\mu-\mu(p)) + o(\mu-\mu(p)),\quad \mu\to\mu(p),\quad 0\leq C<\infty.$$

Consequently, using (5), we have

$$-\mu\sum_{n=3}^{\infty} c_n(p)(\mu-\mu(p))^{n/2-1}\left[C+o(1)\right]^{n/2} = \frac{1}{\mu(p)}\quad\text{as}\quad \mu\to\mu(p).$$

When $\mu\to\mu(p)$, left hand side of the equation turns to zero and we obtain $1/\mu(p) = 0$. This contradiction shows that $c_2(p) \neq 0$. □

We are now able to prove the main results.

Proof of Theorem 2.2. For conviniense we introduce $\mu(p,z) = (\Omega(p,z))^{-1}$, $z \in (M(p),+\infty)$. The function $\mu(p,\cdot) : (M(p),+\infty) \to (\mu(p),+\infty)$ is continuous monotone function in $(M(p),+\infty)$.

Then

$$\lim_{z\to M(p)+0}\mu(p,z) = \mu(p)$$

and

$$\mu(p,z) = \left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi^2(s)ds}{z-w_p(s)}\right)^{-1} > \left(\int_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi^2(s)ds}{M(p)-w_p(s)}\right)^{-1} = \mu(p).$$

Therefore it has a continuous inverse $z = E(\cdot,p) : (\mu(p),+\infty) \to (M(p),\infty)$. Clearly, $\Delta(\mu,p;E(\mu,p)) \equiv 0$. The above arguments will lead to a logical conclusion proving that $E(\cdot,p)\to M(p)-0$, if and only if, $\mu\to\mu(p)+0$.

(i) Let $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$. We represent the expansion of function $\Delta(\mu,p;z)$, $p \in U_\delta(p_0)$ at $z = M(p)$ (see Lemma 2.1) as follows

$$\Delta(\mu,p;M(p)+\alpha^2) = 1-\mu\left(\Omega(p)+c_1(p)\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}c_n(p)\alpha^n\right),$$

where

$$\alpha = (z - M(p))^{1/2}, \quad c_1(p) = -\frac{1}{2}\pi\varphi^2(\mathbf{q}_0(p))J(\mathbf{q}_0(p)).$$

For any fixed $p \in U_\delta(p_0)$, each eigenvalue $z = E(\mu, p)$ of $H_\mu(p)$ is a solution of the equation

$$\Delta(\mu, p, z) = 1 - \mu\Omega(p, z) = 0. \tag{6}$$

We rewrite this equation as

$$-\frac{\lambda}{\lambda\mu(p) + \mu^2(p)} = c_1(p)\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(p)\alpha^n, \quad \lambda = \mu - \mu(p). \tag{7}$$

Introducing the varuables

$$\alpha = \lambda\,(a + u), \quad a = [-c_1(p)\,\mu^2(p)]^{-1} \tag{8}$$

implies that in the region where $|\alpha|$ sufficiently small the equation (7) is equivalent to

$$F(\lambda, u) = \frac{1}{(a+u)} + (\lambda\mu(p) + \mu^2(p))\sum_{n\geq 1} c_n(p)\lambda^{n-1}(a+u)^{n-1} = 0. \tag{9}$$

One can show that $F(0,0) = 0$ and $\partial F/\partial u(0,0) = -[-c_1(p)\mu^2(p)]^{-2} \neq 0$. Hence the implicit function theorem yields that for sufficiently small $\lambda > 0$, the equation (9) has a unique analytic solution $u(\lambda)$ which is given by the following absolutely convergent series

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(p)\lambda^m.$$

The condition $\lambda = 0$ is equavalent to $a_0(p) = 0$. Thus from (8), we obtain the expansion

$$\alpha = \lambda\left(a + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(p)\lambda^m\right)$$

which yields (3).

(ii) Let $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) = 0$. We represent the expansion of the function $\Delta(\mu, p; z)$, $p \in U_\delta(p_0)$ at the point $z = M(p)$ as follows

$$\Delta(\mu, p; M(p) + \alpha^2) = 1 - \mu\left(\Omega(p) + \sum_{n\geq 2} c_n(p)\alpha^n\right),$$

$$\alpha = (z - M(p))^{1/2}.$$

Lemma 3.1 implies that $c_2(p) \neq 0$. Part (iv) of the Lemma 2.1 and the identity (6) imply the equation

$$-\frac{\lambda}{\lambda\mu(p) + \mu^2(p)} = \sum_{n\geq 2} c_n(p)\alpha^n = f(\alpha, p) \tag{10}$$

where the function $f(\alpha, p)$ is analytic at $\alpha = 0$. Clear that

$$f(0,p) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,p) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \alpha}(0,p) = 2c_2(p) < 0$$

The substitutions

$$\alpha = \sigma\,(a + u), \quad \sigma = \lambda^{1/2}, \quad a = [-c_2(p)\,\mu^2(p)]^{-1/2}$$

yield that in the region where $|\alpha|$ sufficiently small the equation (10) is equivalent to

$$F(u, \sigma) = \frac{1}{(a+u)^2} + (\sigma^2\mu(p) + \mu^2(p))\sum_{n\geq 2} c_n(p)\sigma^{n-2}(a+u)^{n-2} = 0. \tag{11}$$

The function $F$ satisfies the following conditions:

(i) $u = 0$, $\sigma = 0$ is a solution;

(ii) $F$ is analytic for small $|\sigma|$, $|u|$;

(iii) $\partial F/\partial u(0,0) = -2[-c_2(p)\mu^2(p)]^{-3} \neq 0$.

Thus, by the implicit function theorem, (11) has a unique analytic solution $u$, for sufficiently small $\sigma$, given by a convergent expansion

$$u = \sum_{n\geq 0} \hat{a}_n(p)\sigma^n.$$

Setting $\sigma = 0$, we get $\hat{a}_0(p) = 0$. Consequently,

$$\alpha = \sigma(a+u) = a\sigma + \sum_{n\geq 1} \hat{a}_n(p)\sigma^{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_n(p)\sigma^n,$$

where $a_1(p) = a = [-\mu^2(p)c_2(p)]^{-1/2}$. Hence we get (4).

Theorem is proved. □

## References


1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A. and Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices. Comm.Math.Phys. 2006. Vol.262, pp. 91-115.
2. Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I. Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincaré. 2004. Vol.5 , pp. 743-772.
3. Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra. Commun. Pur. Appl. Math. 1948. Vol.1, Issue 4, pp. 361-406.
4. Gadella M. and Pronko G. The Friedrichs model and its use in resonance phenomena. Fortschr. Phys. 2011. Vol.59, Issue 9, pp. 795-859.
5. Brown B.M., Marletta M. and Naboko S. et al. The detectable subspace for the Friedrichs model. Integr. Equ. Oper. Theory. 2019. Vol.91, Issue 49.
6. Civitarese O. and Gadella M. The Friedrichs-model with fermion-boson couplings II, International Journal of Modern Physics E. 2007. Vol.16, Issue 1, pp. 169-178.
7. Lakaev S. N. and Abdukhakimov S. Kh. Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice. Theor. Math. Phys. 2020. Vol.203, Issue 3, pp. 251-268.
8. Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol.330, Issue 2, pp. 1152-1168.
9. Kholmatov Sh., Lakaev S. and Almuratov F. Bound states of Schrödinger-type operators on one and two dimensional lattices J. Math. Anal. Appl. 2021. 125280, Vol.503, Issue 1, pp. 1–33.
10. Bozorov I.N. and Khurramov A.M. On the number of eigenvalues of the lattice model operator in one-dimensional case. Lobachevskii J. Math. 2022. Vol.43, Issue 2, pp. 353-365.
11. Lakaev S.N. and Boltaev A.T. Threshold phenomena in the spectrum of the two–particle Schrödinger operators on a lattice. Theoret.and Math. Phys. 2019. Vol. 198, Issue 3, pp. 363-375.
12. Lakaev S. N., Kholmatov Sh. Yu. and Khamidov Sh. I. Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case. J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol.54, Issue 24, 245201-1–22 (2021).
13. Klaus M. and Simon B. Coupling constant thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Physics. 1980. Vol.130, Issue 2, pp. 251-281.
14. Lakaev S.N. and Holmatov Sh.Yu. Asymptotics of Eigenvalues of a two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. 2011. 135304, Vol.44, Issue 13.
15. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. and Lakaev Sh.S. Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theor. and Math. Phys. 2012. Vol.171, Issue 3, pp. 800-811.
16. Lakaev S., Ibrahim A. and Kurbanov Sh. Threshold effects for the Generalized Friedrichs model with the perturbation of rank one. Abstract and Applied Analysis. 2012. 180953, Vol.14, Issue 4.
17. Lakaev S.N. and Dustov S.T. The eigenvalues of the generalized Friedrichs model. Uzbek mathematical journal. 2012. Vol.4.

18. Lakaev S., Darus M. and Kurbanov Sh. Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one. J. Phys. A: Math. Theor. 2013. 205304, Vol.46, Issue 20.
19. Lakaev S.N.,Darus M. and Dustov S.T. Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. Ufa Mathematical Journal. 2019. Vol.11, Issue 4, pp. 1-11.
20. Lakaev S.N., Kurbanov Sh.Kh. and Alladustov Sh.U. Convergent expansions of eigenvalues of the generalized Friedrichs model with a rank-one perturbation. Complex Analysis and Operator Theory. 2021. Vol.15, Issue 121.
21. Reed M. and Simon B. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. 1978. Academic Press, N.Y.
22. Bareket M. On the convexity of the sum of the first eigenvalues of operators depending on a real parameter. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1981. Vol.32, pp. 464-469.

## Qo‘zg‘alishining rangi birga teng bo‘lgan umumlashgan Fridrixs modeli xos qiymati uchun yoyilma

**Do‘stov Said**

Ushbu maqolada qo‘zg‘alishining rangi birga teng bo‘lgan $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, $p \in \mathbb{T}^3$ umumlashgan Fridrixs modeli qaraladi. Muhim spektrning yuqori chegarasi virtual sath yoki xos qiymat bo‘lgan hollarda xos qiymat uchun $\mu(p)$ o‘zaro ta’sir doimiysi atrofida absolyut yaqinlashuvchi yoyilmalar olingan.

**Kalit so‘zlar:** Umumlashgan Fridrixs modellari; o‘zaro ta’sir doimiysi; Hamiltonian; dispersion munosabat; bo‘sag‘a rezonansi; bo‘sag‘a xos qiymati.

## Сходящееся разложение для собственного значения обобщенной модели Фридрихса с возмущением ранга один

**Дустов Саид**

Рассматривается семейство $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, $p \in \mathbb{T}^3$ обобщенной модели Фридрихса с возмущением ранга один. Получено абсолютно сходящееся разложения для собственного значения при $\mu(p)$ порог константы связи. Разложение зависит от того, что верхняя грань существенного спектра является пороговым резонансом или пороговым собственным значением.

**Ключевые слова:** Обобщенные модели Фридрихса; пороговое константы связи; Гамильтониан; дисперсионное соотношение; пороговый резонанс; пороговое собственное значение.

**Received: 14/06/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Dustov S. Convergent Expansion For Eigenvalue of the Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 9-16

# On 1D subalgebras of genetic algebras

**Ibragimov Mahammadjon**
Department of Mathematics
Andijan State University
Andijan, Uzbekistan
muhammadibragimov1972@gmail.com

## Abstract

In the present paper we consider genetic algebras corresponding to quadratic automorphisms defined on the two-dimensional simplex. Main goal is to describe the set of all idempotent elements and one-dimensional subalgebras of such genetic algebras. It is showed correspondence between the one-dimensional subalgebras and the set which contains all idempotent elements and absolute nilpotent elements.

**Keywords:** Non-associative algebra; genetic algebra; quadratic stochastic operator; quadratic automorphism.

**MSC 2020:** 37N25, 92D10

## 1. Introduction

Consider a population consisting of $m$ species (or traits) which are denoted by $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Assume that $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)$ is a probability distribution of species at an initial state and $p_{ij,k}$ a probability that individuals in the $i^{th}$ and $j^{th}$ species interbreed to produce an individual from $k^{th}$ species. Then a probability distribution $\mathbf{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}\right)$ of the spices in the first generation can be found as a total probability, i.e.,

$$x_k^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i^{(0)} x_j^{(0)}, \quad k \in \{1, \ldots, m\}.$$

It defines a correspondence $\mathbf{x}^{(0)} \to \mathbf{x}^{(1)}$ which is called *the evolution operator* or *quadratic stochastic operator* (QSO). In other words, a QSO describes a distribution of the next generation if the distribution of the current generation was given. The fascinating applications of QSO to population genetics were given in [2, 17, 18, 26]. In [14], it was given the recent achievements and open problems in the theory of QSOs.

On the other hand, each QSO defines an algebraic structure on the vector space $\mathbb{R}^m$ containing the simplex (see next section for definitions). This algebraic structure is called *genetic algebra*. They are generally commutative but non-associative, yet they are not necessarily Lie, Jordan, or alternative algebras. In addition, many of the algebraic properties of these structures have genetic significance. For example, a more modern use of the genetic algebra theory to self fertilization can be found in [19, 20]. Therefore, it is the interplay between the purely mathematical structure and the corresponding genetic properties that makes this subject so fascinating. We refer to [37] for the comprehensive reference.

Recall that a QSO is called a *Lotka-Volterra* if

$$p_{ij,k} = 0 \;\text{ for any }\; k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

The asymptotic behaviours of trajectories such operators a QSOs were analysed in [9, 10, 11, 28, 36] using the theory of Lyapunov functions and tournaments. We notice that such kind of operators have important applications in population genetics [32]. Genetic algebras associated with Lotka-Volterra operators have been initiated in [21], and they were called *Lotka-Volterra algebras*. Furthermore, in [3, 38, 39] idempotent elements of these algebras were described. There appeared several works on derivations of genetic algebras [1, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 22, 27, 29, 30, 33, 34, 35].

If one looks at the Lotka-Volterra QSO on the simplex, then it turns out that it is a bijection of the simplex. In [12] it was described all quadratic automorphisms of the simplex, which are represented as permutations of Lotka-Volterra operators. Therefore, it is natural to investigated genetic algebras associated by quadratic automorphisms of the simplex. In the present paper, we are investigating genetic algebras associated by Lotka-Volterra and non-Lotka-Volterra QSOs which are defined by composition of a permutation and Lotka-Volterra operators.

The paper is organized as follows. In Section 2.1 we recall necessary definitions from the theory of genetic algebras. In Section 2.2 we study three dimensional genetic algebras associated with quadratic automorphisms. Furthermore, in Section 2.3 and Section 2.4 idempotents and absolute nilpotent elements of the considered algebras are described. Finally, in Section 2.5 we study one-dimensional subalgebras of the considered algebras.

## 2. Main part

### 2.1. Preliminaries

Let us recall the definition of an evolution algebra of a free population [25].

Let $E = \{1, \ldots, m\}$. By $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in E}$ we denote the standard basis in $\mathbb{R}^m$, i.e., $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, ..., \delta_{im})$, where $\delta_{ij}$ is the Kronecker's Delta. Throughout this paper, we consider the simplex:

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^m \ : \ x_i \geq 0, \ \forall i \in E, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

A *quadratic stochastic operator (QSO)* is a mapping of the simplex $S^{m-1}$ into itself of the form

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

where $p_{ij,k}$ are inheritance coefficients, which satisfy the following conditions:

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{2}$$

Let $V$ be a QSO and suppose that $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ are arbitrary vectors, we introduce a multiplication rule (see [18]) on $\mathbb{R}^m$ by

$$(\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y})_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i y_j \tag{3}$$

where $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Using (2) it is easy to see that $\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ_V \mathbf{x}$, i.e. the multiplication is commutative. Certain algebraic properties of such kind of algebras were investigated in [18, 26, 37]. In general, the genetic algebra is not necessarily to be associative.

The multiplication (3) in the canonical basis can be represented as follows

$$\mathbf{e}_i \circ_V \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} \mathbf{e}_k.$$

Thus, we identify the coefficients of inheritance as the structure of an algebra, i.e., a bilinear mapping of $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^m$.

It turns out that the multiplication can be given terms of QSO (1)

$$\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y} = \sum_{i,j,k=1}^{m} (p_{ij,k} x_i y_j) \mathbf{e}_k = \frac{1}{4}(V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - V(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \tag{4}$$

One can check that

$$\mathbf{x} \circ_V \mathbf{x} = \mathbf{x}^2 = V(\mathbf{x}) \ \text{ for any } \ \mathbf{x} \in S^{m-1}.$$

This algebraic interpretation is useful, e.g., a state $\mathbf{x}$ is an equilibrium precisely when $\mathbf{x}$ is an idempotent element of the unite simplex $S^{m-1}$.

We write $\mathbf{x}^{[n]}$ for the power $(\cdots(\mathbf{x}^2)^2\cdots)$ ($n$ times) with $\mathbf{x}^{[0]} \equiv \mathbf{x}$, then the trajectory with initial state $\mathbf{x}$ is $V^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{[n]}$.

The algebra $\mathcal{A}_V$ (i.e., the pair $(\mathbb{R}^m, \circ_V)$) generated by the evolution operator (1) is called the *genetic algebra*. Notice that algebras $\mathcal{A}_V$ generated by Lotka-Volterra operators are called the *Lotka-Volterra algebras* and their properties have been considered in [6, 7, 13].

A *character* for an algebra $\mathcal{A}$ is a nonzero multiplicative linear form on $\mathcal{A}$, that is, a nonzero algebra homomorphism from $\mathcal{A}$ to $\mathbb{R}$. A pair $(\mathcal{A}, \sigma)$ consisting of an algebra $\mathcal{A}$ and a character $\sigma$ on $\mathcal{A}$ is called a *baric algebra*.

In [25], it was proved that the linear form $\sigma(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k$ is a character for the evolution algebra of a free population. Hence the algebra $\mathcal{A}_V$ is a baric algebra.

### 2.2. Three dimensional genetic algebras of associated with permutations

Let us consider the following Volterra QSO defined on the $S^2$

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \\ x_2' = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \end{cases} \tag{5}$$

where $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

The set $E = \{1, 2, 3\}$ has the following permutations:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In [12] showed that the corresponding quadratic automorphisms of $S^2$ are defined by

$$V_i = T_{\pi_i} V, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

It is easy to see that for the permutation $\pi_1$ one has $T_{\pi_1} = Id$, and for $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$, we have $T_{\pi_i^2} = Id$, $i = 2, 3, 4$ and for the rest permutations $\pi_5$, $\pi_6$ one has $T_{\pi_i^3} = Id$, $i = 5, 6$ where $Id$ is the identity map.

**Definition 2.1.** Two quadratic stochastic operators $V$ and $W$ are called *conjugate* if there exists a permutation $\pi$ such that $T_\pi^{-1} V T_\pi = W$, the last one is denoted by $V \sim W$.

Let $V$ and $W$ be QSO on $S^2$, and $\mathcal{A}_V$, $\mathcal{A}_W$ be the corresponding genetic algebras. These algebras are called *stochastically isomorphic* if there is a stochastic linear bijection $\psi : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A}_W$ such that $\psi(\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}) \circ_W \psi(\mathbf{y})$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_V$.

The next theorem about connection of between the conjugacy of QSOs and corresponding genetic algebras.

**Theorem 2.1.** *Let $V$ and $W$ be QSOs. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *$V$ and $W$ are conjugate;*

(ii) *the genetic algebras $\mathcal{A}_V$ and $\mathcal{A}_W$ are stochastically isomorphic.*

Proof. The proof of the theorem.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Then, there is a permutation $\pi$ such that $T_\pi^{-1} V T_\pi(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. From (4) we have

$$\mathbf{x} \circ_W \mathbf{y} = \frac{1}{4}\left(W(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - W(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)$$

Therefore, using the conjugacy argument, one has

$$\begin{aligned}
T_\pi\left(\mathbf{x}\circ_W\mathbf{y}\right) &= T_\pi\left(\frac{1}{4}\left(W(\mathbf{x}+\mathbf{y})-W(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\right)=\frac{1}{4}\left(T_\pi W(\mathbf{x}+\mathbf{y})-T_\pi W(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(VT_\pi(\mathbf{x}+\mathbf{y})-VT_\pi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)=\frac{1}{4}\left(V(T_\pi(\mathbf{x})+T_\pi(\mathbf{y}))-V(T_\pi(\mathbf{x})-T_\pi(\mathbf{y}))\right)\\
&=T_\pi(\mathbf{x})\circ_V T_\pi(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Thus, we arrive at $\mathcal{A}_V\simeq\mathcal{A}_W$.

$(ii)\Rightarrow(i)$. Let the genetic algebras $\mathcal{A}_V$ and $\mathcal{A}_W$ be stochastically isomorphic. Then, there is a stochastic mapping $T_\pi$ such that $T_\pi\left(\mathbf{x}\circ_W\mathbf{y}\right)=T_\pi(\mathbf{x})\circ_V T_\pi(\mathbf{y})$. Using the relations $\mathbf{x}^2=\mathbf{x}\circ_W\mathbf{x}=W(\mathbf{x})$, we obtain

$$T_\pi\left(W(\mathbf{x})\right)=T_\pi\left(\mathbf{x}^2\right)=\left(T_\pi(\mathbf{x})\right)^2=T_\pi(\mathbf{x})\circ_V T_\pi(\mathbf{x})=V\left(T_\pi(\mathbf{x})\right)$$

which proves the assertion.

The proof of Theorem 2.1 is complete. □

**Theorem 2.2.**[31] *The quadratic automorphisms $\{V_i\}$ defined on the $S^2$ can be divided into three non-conjugate classes:*

$$K_1=\{V_1\};\quad K_2=\{V_2,V_3,V_4\};\quad K_3=\{V_5,V_6\}.$$

From Theorem 2.1 and Theorem 2.2, we infer the next corollary.

**Corollary 2.1.** *Let $\mathcal{A}_V$ be a three dimensional genetic algebra associated with quadratic automorphisms of $S^2$. Then it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras: $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$.*

The operator $V_1$ is a Lotka-Volterra operator, and its associated genetic algebra has been already investigated in [13]. Therefore, in what follows, we restrict ourselves to the operators $V_1$, $V_2$ and $V_5$.

By (5) $V_1$ has the form:

$$V_1:\begin{cases}x_1'=x_1^2+(1-a)x_1x_2+(1+c)x_1x_3,\\ x_2'=x_2^2+(1+a)x_1x_2+(1-b)x_2x_3,\\ x_3'=x_3^2+(1-c)x_1x_3+(1+b)x_2x_3,\end{cases},$$

where $-1\le a,b,c\le 1$.

Now, by (5) $V_2$ is defined as follows:

$$V_2:\begin{cases}x_1'=x_2^2+(1+a)x_1x_2+(1-b)x_2x_3,\\ x_2'=x_1^2+(1-a)x_1x_2+(1+c)x_1x_3,\\ x_3'=x_3^2+(1-c)x_1x_3+(1+b)x_2x_3,\end{cases}$$

where $-1\le a,b,c\le 1$.

By the same argument, $V_5$ is given by

$$V_5:\begin{cases}x_1'=x_2^2+(1+a)x_1x_2+(1-b)x_2x_3,\\ x_2'=x_3^2+(1-c)x_1x_3+(1+b)x_2x_3,\\ x_3'=x_1^2+(1-a)x_1x_2+(1+c)x_1x_3,\end{cases}$$

here, as before, $-1\le a,b,c\le 1$.

### 2.3. Idempotents of $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$

An element $\mathbf{x}\in\mathcal{A}_V$ is called *idempotent* if $\mathbf{x}^2=\mathbf{x}$. The idempotents of an evolution algebra are especially important, because they are the fixed points of the evolution operator $V$, that is, $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. Denote by $\mathcal{I}d(\mathcal{A}_V)$ the set of idempotent elements of the algebra $\mathcal{A}_V$.

In this section, we are going to describe idempotent elements of the algebras $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$, respectively.

First, let us consider the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_1}$. One can show that an idempotent element of the corresponding genetic algebra is a solution of the following system

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \\ x_2 = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ x_3 = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \end{cases} \tag{6}$$

where $-1 \le a, b, c \le 1$.

It is clear that for the idempotent elements we have $x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$ and we obtain that either $\mathbf{x} \in H_0 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ or $\mathbf{x} \in H_1 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ is an idempotent element of algebra.

**Theorem 2.4.** *The set of idempotent elements $\mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$ is equal to*

$$\mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1}) = \{\mathbf{O}\} \cup \begin{cases} \{(\alpha,\beta,\gamma), \quad \alpha+\beta+\gamma=1\}, & \text{if} \quad a=b=c=0, \\ \{\mathbf{c}(c), \mathbf{f}(\beta), \mathbf{g}(\beta), \quad c\in[-1,1], \beta\in\mathbb{R}\ \}, & \text{if} \quad a=b=0 \quad c\neq 0, \\ \{\mathbf{b}(b), \mathbf{d}(\alpha), \mathbf{e}(\alpha), \quad b\in[-1,1], \alpha\in\mathbb{R}\ \}, & \text{if} \quad a=c=0 \quad b\neq 0, \\ \{\mathbf{a}(a), \mathbf{h}(\gamma), \mathbf{i}(\gamma), \quad a\in[-1,1], \gamma\in\mathbb{R}\ \}, & \text{if} \quad b=c=0 \quad a\neq 0, \\ \{\mathbf{e_2}, \mathbf{k}(ab), \mathbf{p}(a\gamma), \mathbf{e}(\alpha), \quad a,b\in[-1,1], \alpha,\gamma\in\mathbb{R}\}, & \text{if} \quad c=0 \quad ab\neq 0, \\ \{\mathbf{e_1}, \mathbf{l}(ac), \mathbf{q}(c\beta), \mathbf{i}(\gamma), \quad a,c\in[-1,1], \beta,\gamma\in\mathbb{R}\}, & \text{if} \quad b=0 \quad ac\neq 0, \\ \{\mathbf{e_3}, \mathbf{m}(bc), \mathbf{r}(b\alpha), \mathbf{g}(\beta), \quad b,c\in[-1,1], \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}, & \text{if} \quad a=0 \quad bc\neq 0, \\ \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{a}(a), \mathbf{b}(b), \mathbf{c}(c), \mathbf{s}(abc), \mathbf{t}(abc\gamma), & \\ \quad a,b,c\in[-1,1], a+b+c\neq 0, \gamma\in\mathbb{R}\}, & \text{if} \quad abc\neq 0. \end{cases}$$

*where* $\mathbf{O} = (0,0,0)$, $\mathbf{a}(a) = (1/a, -1/a, 0)$, $\mathbf{b}(b) = (0, 1/b, -1/b)$, $\mathbf{c}(c) = (-1/c, 0, 1/c)$,

$$\mathbf{d}(\alpha) = (\alpha, 1-\alpha, 0), \quad \mathbf{e}(\alpha) = (\alpha, 0, 1-\alpha) \quad \mathbf{f}(\beta) = (1-\beta, \beta, 0), \quad \mathbf{g}(\beta) = (0, \beta, 1-\beta),$$

$$\mathbf{h}(\gamma) = (1-\gamma, 0, \gamma), \quad \mathbf{i}(\gamma) = (0, 1-\gamma, \gamma),$$

$$\mathbf{p}(a\gamma) = \left(-\gamma + \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \gamma\right), \quad \mathbf{q}(c\beta) = \left(-\frac{1}{c}, -\beta, \beta + \frac{1}{c}\right), \quad \mathbf{r}(b\alpha) = \left(\alpha, \frac{1}{b} - \alpha, -\frac{1}{b}\right),$$

$$\mathbf{k}(ab) = \left(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right), \quad \mathbf{l}(ac) = \left(0, \frac{c}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right), \quad \mathbf{m}(bc) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{c}{a+b}, 0\right),$$

$$\mathbf{s}(abc) = \left(\frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c}\right),$$

$$\mathbf{t}(abc\gamma) = \left(\frac{b\gamma+1}{a}, \frac{c\gamma-1}{a}, \gamma\right).$$

Proof. The proof of the theorem.

For the convenience we rewrite the system (6) in form

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_1 + x_2 + x_3 - ax_2 + cx_3), \\ x_2 = x_2(x_1 + x_2 + x_3 + ax_1 - bx_3), \\ x_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3 - cx_1 + bx_2), \end{cases} \tag{7}$$

where $-1 \le a, b, c \le 1$. Consider all possible cases.

**I**. Let $a = b = c = 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3$$

and it follows that $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$ for $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

**II**. Let $a = b = 0$ and $c \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$. From the system

$$x_1 = cx_1x_3, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = -cx_3x_1$$

we have the solution $(-\frac{1}{c}, 0, \frac{1}{c})$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1 = x_1(1 + cx_3), \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3(1 - cx_1)$$

and it follows that $(1-\beta, \beta, 0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$ and $(0, \beta, 1-\beta) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

**III**. Let $a = c = 0$ and $b \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$. From the system

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = -bx_2x_3, \quad x_3 = bx_3x_2$$

we get the solution $(0, \frac{1}{b}, -\frac{1}{b})$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2(1 - bx_3), \quad x_3 = x_3(1 + bx_2)$$

and it follows that $(\alpha, 1-\alpha, 0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$ and $(\alpha, 0, 1-\alpha) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

**IV**. Let $b = c = 0$ and $a \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$. From the system

$$x_1 = -ax_1x_2, \quad x_2 = ax_2x_1, \quad x_3 = x_3$$

it follows the solution $(\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, 0)$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1 = x_1(1 - ax_2), \quad x_2 = x_2(1 + ax_1), \quad x_3 = x_3.$$

and it follows that $(0, 1-\gamma, \gamma) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$ and $(1-\gamma, 0, \gamma) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

**V**. Let $c = 0$ and $ab \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathrm{Id}(A)$, and $x_1 = -ax_1x_2, \quad x_2 = x_2(ax_1 - bx_3), \quad x_3 = bx_2x_3$ from the first and third equations $a = -b$, so one has the solution $\left(-\gamma + \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \gamma\right) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1 = x_1(1 - ax_2), \quad x_2 = x_2(1 + ax_1 - bx_3), \quad x_3 = x_3(1 + bx_2).$$

Using $x_2 = 1 - x_1 - x_3$ from the equations we have (fix $x_1$)

$$bx_3^2 + [(b-a)x_1 - b]x_3 + ax_1 - ax_1^2 = 0.$$

$$D = [(b-a)x_1 - b]^2 - 4b(ax_1 - ax_1^2) = [(a+b)x_1 - b]^2$$

and it holds $D \geq 0$. If $D = 0$, will be $(a+b)x_1 - b = 0$, $x_1 = \frac{b}{a+b}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{a}{a+b}$. Therefore we have the solution $(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b})$.

If $D > 0$, then

$$x_3^{(1)} = \frac{(a-b)x_1 + b - (a+b)x_1 + b}{2b} = 1 - x_1, \quad x_2 = 1 - x_1 - 1 + x_1 = 0.$$

So we obtain the solution $(x_1, 0, 1-x_1)$ and $x_1 \in \mathbb{R}$.
Since

$$x_3^{(2)} = \frac{(a-b)x_1 + b + (a+b)x_1 - b}{2b} = \frac{a}{b}x_1, \quad x_2 = 1 - \frac{a+b}{b}x_1$$

we have that if $x_1 = 0$ then it is easy to see that $(0,1,0)$ is a solution and if $x_1 \neq 0$ then it follows the solution $\left(x_1, 1 - \frac{a+b}{b}x_1, \frac{a}{b}x_1\right)$. From the first and third equations we get $x_1 = \frac{a}{a+b}$. And in this case one has that $(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b})$ is a solution.

**VI**. Let $b=0$ and $ac\neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x}\in H_0$ then from the system (7) we have $x_1=x_2=x_3=0$, that is $(0,0,0)\in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$, and $x_1=x_1(-ax_2+cx_3),\quad x_2=ax_1x_2,\quad x_3=-cx_1x_3$ from the second and third equations $a=-c$, so the solition $(-\frac{1}{c},-\beta,\beta+\frac{1}{c})\in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$.

b) Suppose that $\mathbf{x}\in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1=x_1(1-ax_2+cx_3),\quad x_2=x_2(1+ax_1),\quad x_3=x_3(1-cx_1).$$

Using $x_1=1-x_2-x_3$ from the equations we have(fix $x_3$)

$$ax_2^2+[(a-c)x_3-a]x_2+cx_3-cx_3^2=0.$$

$$D=[(a-c)x_3-a]^2-4a(cx_3-cx_3^2)=[(a+c)x_3-a]^2$$

an evidently that $D\geq 0$.

If $D=0$ then it follows that $(a+c)x_3-a=0,\quad x_3=\frac{a}{a+c},\quad x_2=\frac{c}{a+c},\quad x_1=0$. So $(0,\frac{c}{a+c},\frac{a}{a+c})$ is a solution of the last system.

If $D>0$ then one has that

$$x_2^{(1)}=\frac{(c-a)x_3+a-(a+c)x_3+a}{2a}=1-x_3,\quad x_1=1-1-x_3+x_3=0$$

and $x_3\in\mathbb{R}$, that is we have the solution $(0,1-x_3,x_3)$.

Since

$$x_2^{(2)}=\frac{(c-a)x_3+a+(a+c)x_3-a}{2a}=\frac{c}{a}x_3,\quad x_1=1-\frac{a+c}{a}x_3$$

we have that if $x_3=0$ then one gets the solution $(1,0,0)$ and if $x_3\neq 0$ then the solution $(1-\frac{a+c}{a}x_3,\frac{c}{a}x_3,x_3)$.

From the second and third equations we get $x_3=\frac{a}{a+c}$. And in this case one has the solution $(0,\frac{c}{a+c},\frac{a}{a+c})$.

**VII**. Let $a=0$ and $bc\neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x}\in H_0$ then from the system (7) we have $x_1=x_2=x_3=0$, that is $(0,0,0)\in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$, and $x_1=cx_1x_3,\quad x_2=-bx_2x_3,\quad x_3=x_3(-cx_1+bx_2)$ from the first and second equations $b=-c$, so the solition $(\alpha,\frac{1}{b}-\alpha,-\frac{1}{b})\in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_1})$. b) Suppose that $\mathbf{x}\in H_1$ then from the system (7) we have

$$x_1=x_1(1+cx_3),\quad x_2=x_2(1-bx_3),\quad x_3=x_3(1-cx_1+bx_2).$$

Using $x_3=1-x_1-x_2$ from the equations we have(fix $x_2$)

$$cx_1^2+[(c-b)x_2-c]x_1+bx_2-bx_2^2=0.$$

$$D=[(c-b)x_2-c]^2-4c(bx_2-bx_2^2)=[(b+c)x_2-c]^2.$$

Clearly that $D\geq 0$. If $D=0$ then will be $(b+c)x_2-c=0,\quad x_2=\frac{c}{b+c},\quad x_1=\frac{b}{b+c},\quad x_3=0$. From this system we have the solution $\left(\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c},0\right)$.

If $D>0$ then $x_1^{(1)}=\frac{(b-c)x_2+c-(b+c)x_2+c}{2c}=1-x_2,\quad x_3=1-1-x_2+x_2=0$ and it follows the solution $(1-x_2,x_2,0)$.

Since $x_1^{(2)}=\frac{(b-c)x_2+c+(b+c)x_2-c}{2c}=\frac{b}{c}x_2,\quad x_3=1-\frac{b+c}{c}x_2$ one has that if $x_2=0$ the solution $(0,0,1)$ and if $x_3\neq 0$ the solution $\left(\frac{b}{c}x_2,x_2,1-\frac{b+c}{c}x_2\right)$. From the first and second equations we get $x_2=\frac{c}{b+c}$ and in this case we have the solution $\left(\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c},0\right)$.

**VIII**. Let $abc \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (7) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_1}\right)$. In addition, in this case from system (7) we obtain the following system:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(-ax_2 + cx_3), \\ x_2 = x_2(ax_1 - bx_3), \\ x_3 = x_3(-cx_1 + bx_2), \end{cases}$$

If on this system two variables are equal to zero, then the third is also zero.
If $x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0$, so the solution $\left(0, \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}\right)$.
If $x_2 = 0, \quad x_1 \neq 0, \quad x_3 \neq 0$, so the solution $\left(-\frac{1}{c}, 0, \frac{1}{c}\right)$.
If $x_3 = 0, \quad x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0$, so the solution $\left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, 0\right)$.
If $x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0$ then we have a system:

$$\begin{cases} x_1(1 + ax_2 - cx_3) = 0, \\ x_2(1 - ax_1 + bx_3) = 0, \\ x_3(1 + cx_1 - bx_2) = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

From this system we get $x_1 = \dfrac{bx_3 + 1}{a}, \quad x_2 = \dfrac{cx_1 + 1}{b}, \quad x_2 = \dfrac{cx_3 - 1}{a}$. From here $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{bx_3 + 1}{a} + \dfrac{cx_3 - 1}{a} + x_3 = \dfrac{a + b + c}{a} x_3 = 0$. We have $x_3 \neq 0$ so it will $a + b + c = 0$. So the solution $\left(\dfrac{bx_3 + 1}{a}, \dfrac{cx_3 - 1}{a}, x_3\right)$.

Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (7) we have

$$\begin{cases} x_1 = x_1(1 - ax_2 + cx_3), \\ x_2 = x_2(1 + ax_1 - bx_3), \\ x_3 = x_3(1 - cx_1 + bx_2). \end{cases}$$

If on this system two variables are equal to zero, then the third is 1.
If $x_1 = 0$ then we get from the system $bx_2x_3 = 0$. Then the solution will be (0,0,1) or (0,1,0).
If $x_2 = 0$ then we get from the system $cx_1x_3 = 0$. Then the solution will be (0,0,1) or (1,0,0).
If $x_3 = 0$ then we get from the system $ax_1x_2 = 0$. Then the solution will be (1,0,0) or (0,1,0).
If $x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0$ then we have a system:

$$\begin{cases} x_1(-ax_2 + cx_3) = 0, \\ x_2(ax_1 - bx_3) = 0, \\ x_3(-cx_1 + bx_2) = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

From this system we get $x_1 = \dfrac{b}{a} x_3, \quad x_2 = \dfrac{c}{b} x_1, \quad x_2 = \dfrac{c}{a} x_3$. From this system it follows $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{b}{a} x_3 + \dfrac{c}{a} x_3 + x_3 = \dfrac{a + b + c}{a} x_3 = 1 \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{a}{a + b + c}$, that it we have the solution $\left(\dfrac{b}{a + b + c}, \dfrac{c}{a + b + c}, \dfrac{a}{a + b + c}\right)$.

The proof of Theorem 2.4 is complete. □

Let us consider the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_2}$. One can show that an idempotent element of the corresponding genetic algebra is a solution of the following system

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + (1 + a)x_1x_2 + (1 - b)x_2x_3, \\ x_2 = x_1^2 + (1 - a)x_1x_2 + (1 + c)x_1x_3, \\ x_3 = x_3^2 + (1 - c)x_1x_3 + (1 + b)x_2x_3, \end{cases} \tag{8}$$

where $-1 \le a, b, c \le 1$.

The last system yields that $x_1+x_2+x_3 = (x_1+x_2+x_3)^2$. Hence, we have either $\mathbf{x} \in H_0 := \{\mathbf{x} : x_1+x_2+x_3 = 0\}$ or $\mathbf{x} \in H_1 := \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

**Theorem 2.5.** *The set of idempotent elements $\mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_2})$ is equal to*

$$\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_3\} \cup \begin{cases} \{(\alpha, \alpha, 1-2\alpha)\}, & \text{if} \quad a = b = c = 0, \\ \{\mathbf{n}\}, & \text{if} \quad a = b = 0, \quad c \neq 0, \\ \{\mathbf{n}\}, & \text{if} \quad a = c = 0, \quad b \neq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \mathbf{x}^*(a,\alpha), \mathbf{x}^{**}(a,\alpha)\}, & \text{if} \quad b = c = 0, \quad a \neq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \mathbf{c}(a,b), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a)\}, & \text{if} \quad c = 0, \quad ab \neq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \mathbf{b}(a,c), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a)\}, & \text{if} \quad b = 0, \quad ac \neq 0, \\ \{\mathbf{n}, \mathbf{x}(a), \mathbf{m}(\alpha), \mathbf{a}(b,c)\}, & \text{if} \quad a = 0,\ bc < 0,\ b = -c, \\ \{\mathbf{n}, \widehat{\mathbf{x}}(b,c), \widetilde{\mathbf{x}}(b,c), \mathbf{y}(b,c)\}, & \text{if} \quad a = 0,\ bc < 0,\ b \neq -c, \\ \{\mathbf{n}, \mathbf{y}(b,c)\}, & \text{if} \quad a = 0,\ bc > 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a), \mathbf{d}(a,b,c)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c = 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a), \mathbf{d}(a,b,c), \mathbf{f}(\alpha,b,c)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c = 0,\ b-c+bc = 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a), \mathbf{d}(a,b,c)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c = 0,\ b-c+bc \neq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a), \mathbf{l}(a,b,c)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c \neq 0,\ b-c+bc \neq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a,b,c), \widetilde{\mathbf{x}}(a,b,c)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c \neq 0,\ a^2-4bc \geq 0, \\ \{\mathbf{x}(a), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a)\}, & \text{if} \quad abc \neq 0,\ a+b+c \neq 0,\ a^2-4bc < 0. \end{cases}$$

*where $a, b, c \in [-1, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{O} = (0,0,0)$ and*

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathbf{x}(a) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 0\right), \quad \mathbf{m}(\alpha) = (\alpha, -\alpha, 1), \quad \mathbf{c}(a,b) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

$$\mathbf{b}(a,c) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right), \mathbf{a}(b,c) = \left(-\frac{1}{2c}, \frac{1}{2b}, \frac{b-c}{2bc}\right), \mathbf{y}(b,c) = \left(\frac{b-c+bc}{c(b+c)}, \frac{b-c+bc}{b(b+c)}, \frac{c-b}{bc}\right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(a) = \left(\frac{a-2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right), \widetilde{\mathbf{x}}(a) = \left(\frac{a-2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right),$$

$$\mathbf{x}^*(a,\alpha) = \left(\frac{a(1-\alpha)-2+\sqrt{4+a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a(1-\alpha)+2-\sqrt{4+a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right),$$

$$\mathbf{x}^{**}(a,\alpha) = \left(\frac{a(1-\alpha)-2-\sqrt{4+a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a(1-\alpha)+2+\sqrt{4+a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(b,c) = \left(\frac{-c+\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, \frac{b+\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, \frac{1}{\sqrt{-bc}}\right), \widetilde{\mathbf{x}}(b,c) = \left(\frac{-c-\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, \frac{b-\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, -\frac{1}{\sqrt{-bc}}\right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(a,b,c) = \left(\frac{-(a+2c)+\sqrt{a^2-4bc}}{2c(a+b+c)}, \frac{a+2b+\sqrt{a^2-4bc}}{2b(a+b+c)}, \frac{a(b-c)-(b+c)\sqrt{a^2-4bc}}{2bc(a+b+c)}\right),$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}(a,b,c) = \left(\frac{-(a+2c)-\sqrt{a^2-4bc}}{2c(a+b+c)}, \frac{a+2b-\sqrt{a^2-4bc}}{2b(a+b+c)}, \frac{a(b-c)+(b+c)\sqrt{a^2-4bc}}{2bc(a+b+c)}\right),$$

$$\mathbf{f}(\alpha,b,c) = \left(\alpha, \frac{c}{b}\alpha, 1 - \frac{b+c}{b}\alpha\right), \mathbf{d}(a,b,c) = \left(-\frac{1}{a+2c}, \frac{a+c}{b(a+2c)}, \frac{b-a-c}{b(a+2c)}\right),$$

$$\mathbf{l}(a,b,c) = \left(\frac{b-c+bc}{c(a+b+c)}, \frac{b-c+bc}{b(a+b+c)}, \frac{abc+c^2-b^2}{bc(a+b+c)}\right).$$

Proof. The proof of the theorem.

For the sake of convenience, we rewrite the system (8) as follows

$$\begin{cases} x_1 = x_2\left(x_1 + x_2 + x_3 + ax_1 - bx_3\right), \\ x_2 = x_1\left(x_1 + x_2 + x_3 + cx_3 - ax_2\right), \\ x_3 = x_3\left(x_1 + x_2 + x_3 + bx_2 - cx_1\right), \end{cases} \tag{9}$$

where $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Consider all possible cases with respect to values of $a, b, c$.

**I**. Let $a = b = c = 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from the system (9) we have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from (9) one finds

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_1, \quad x_3 = x_3$$

and it follows that $(\alpha, \alpha, 1 - 2\alpha) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$ for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**II**. Let $a = b = 0$ and $c \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from (9) one has $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then (9) implies

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_1(1 + cx_3), \quad x_3 = x_3(1 - cx_1)$$

which means $(0, 0, 1) \in \mathrm{Id}(\mathcal{A}_{V_2})$ and $(1/2, 1/2, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

**III**. Let $a = c = 0$ and $b \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$. Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then from the system (9) we have

$$x_1 = x_2(1 - bx_3), \quad x_2 = x_1, \quad x_3 = x_3(1 + bx_2)$$

and it follows that $(0, 0, 1) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$ and $(1/2, 1/2, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

**IV**. Let $b = c = 0$ and $a \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then either $(0, 0, 0) \in \mathrm{Id}(\mathcal{A}_{V_2})$ or $(-1/a, 1/a, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

So, assume that $\mathbf{x} \in H_1$, therefore, by (9) one gets

$$x_1 = x_2(1 + ax_1), \quad x_2 = x_1(1 - ax_2), \quad x_3 = x_3.$$

Now, using $x_2 = 1 - x_1 - x_3$ from $x_1 = x_2(1 + ax_1)$ we find $ax_1^2 + (2 - a(1 - x_3))x_1 - (1 - x_3) = 0$. Solving it for any $\alpha \in \mathbb{R}$ we obtain

$$\left(\frac{a(1-\alpha) - 2 + \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a(1-\alpha) + 2 - \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right),$$

$$\left(\frac{a(1-\alpha) - 2 - \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a(1-\alpha) + 2 + \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

**V**. Let $c = 0$ and $ab \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$, $(-1/a, 1/a, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$ and $(-1/a, 1/b, 1/a - 1/b) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then we have

$$x_1 = x_2(1 + ax_1 - bx_3), \quad x_2 = x_1(1 - ax_2), \quad x_3 = x_3(1 + bx_2).$$

It is easy to see that $(0, 0, 1) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$. If $x_3 = 0$ then by $x_1 + x_2 = 1$ from the equation $x_1 = x_2(1 + ax_1)$ one finds

$$ax_1^2 + (2 - a)x_1 - 1 = 0.$$

Its solution gives that

$$\left(\frac{a - 2 + \sqrt{4 + a^2}}{2a}, \frac{a + 2 - \sqrt{4 + a^2}}{2a}, 0\right) \in \mathrm{Id}(\mathcal{A}_{V_2}), \left(\frac{a - 2 - \sqrt{4 + a^2}}{2a}, \frac{a + 2 + \sqrt{4 + a^2}}{2a}, 0\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

**VI**. Let $b = 0$ and $ac \neq 0$. a) Suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then from (9) we have $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$, $(-1/a, 1/a, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$ and $(-1/c, 1/a, 1/c - 1/a) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.

b) Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then again by (9) we have

$$x_1 = x_2(1 + ax_1), \quad x_2 = x_1(1 + cx_3 - ax_2), \quad x_3 = x_3(1 - cx_1).$$

It is easy to see that $(0,0,1) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$. So, if $x_3 = 0$ then $x_1 + x_2 = 1$ together with $x_1 = x_2(1+ax_1)$ yields $ax_1^2 + (2-a)x_1 - 1 = 0$. Solving it, we obtain

$$\left(\frac{a-2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right), \left(\frac{a-2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

**VII**. Let $a = 0$ and $bc \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then (9) implies $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, that is $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$. Also if $bc < 0, b \neq -c$ then we have

$$\left(\frac{-c+\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, \frac{b+\sqrt{-bc}}{b(b+c)}, \frac{1}{\sqrt{-bc}}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right), \left(\frac{-c-\sqrt{-bc}}{c(b+c)}, \frac{b-\sqrt{-bc}}{b(b+c)}, -\frac{1}{\sqrt{-bc}}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$$

and we get

$$\left(-\frac{1}{2c}, \frac{1}{2b}, \frac{b-c}{2bc}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$$

when $bc < 0, b = -c$.

Assume that $\mathbf{x} \in H_1$, then by (9) one gets

$$x_1 = x_2(1 - bx_3), \quad x_2 = x_1(1 + cx_3), \quad x_3 = x_3(1 + bx_2 - cx_1).$$

If $b = -c$ then we have $(\alpha, -\alpha, 1) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$ and $(1/2, 1/2, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.
If $b \neq -c$ then by $x_1 + x_2 = 1 - x_3$ and $x_1 = x_2(1 + bx_3)$ one has

$$\left(\frac{b-c+bc}{c(b+c)}, \frac{b-c+bc}{b(b+c)}, \frac{c-b}{bc}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

**VIII**. Let $abc \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then we have

$$x_1 = x_2(ax_1 - bx_3), \quad x_2 = x_1(cx_3 - ax_2), \quad x_3 = x_3(bx_2 - cx_1).$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, i.e. $(0,0,0) \in \mathrm{Id}(\mathcal{A}_{V_2})$ and $(-1/a, 1/a, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$. Also one has

$$\left(\frac{-(a+2c)+\sqrt{a^2-4bc}}{2c(a+b+c)}, \frac{a+2b+\sqrt{a^2-4bc}}{2b(a+b+c)}, \frac{a(b-c)-(b+c)\sqrt{a^2-4bc}}{2bc(a+b+c)}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right),$$

$$\left(\frac{-(a+2c)-\sqrt{a^2-4bc}}{2c(a+b+c)}, \frac{a+2b-\sqrt{a^2-4bc}}{2b(a+b+c)}, \frac{a(b-c)+(b+c)\sqrt{a^2-4bc}}{2bc(a+b+c)}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then we get

$$x_1 = x_2(1 + ax_1 - bx_3), \quad x_2 = x_1(1 + cx_3 - ax_2), \quad x_3 = x_3(1 + bx_2 - cx_1).$$

If $x_3 = 0$ then we have

$$\left(\frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2a}, \frac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2a}, 0\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right), \left(\frac{a-2-\sqrt{a^2+4}}{2a}, \frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2a}, 0\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

If $a + b + c = b - c + bc = 0$ then one has that

$$\left(\alpha, \frac{c}{b}\alpha, 1 - \frac{b+c}{b}\alpha\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right), \quad \text{for any} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

If $a + b + c = 0$, $b - c + bc \neq 0$ then $(0,0,1) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right)$.
If $a + b + c \neq 0$, $b - c + bc \neq 0$ then by $x_1 + x_2 = 1 - x_3$ from $x_2 = x_1(1 + cx_3 - ax_2)$ one finds

$$\left(\frac{b-c+bc}{c(a+b+c)}, \frac{b-c+bc}{b(a+b+c)}, \frac{abc+c^2-b^2}{bc(a+b+c)}\right) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_2}\right).$$

The proof of Theorem 2.5 is complete. □

Now, let turn to the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_5}$. Then, its idempotent element is given by the solutions of the following system

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ x_2 = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \\ x_3 = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \end{cases} \tag{10}$$

where, as before, $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Let

$$f_{ab}(x) = abx^3 + (2a - ab - b)x^2 + (b - a - 2)x + 1$$

where $-1 \leq a, b \leq 1$, $ab \neq 0$. Then

$$f_{ab}(x) = x \quad \Rightarrow \qquad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \qquad \text{where} \tag{11}$$

$$A = ab, \qquad B = 2a - ab - b, \qquad C = b - a - 3, \qquad D = 1.$$

It is known that its discriminant is given by

$$\Delta = B^2C^2 - 4AC^3 - 4B^3D - 27A^2D^2 + 18ABCD.$$

Further we use the following lemma.

**Lemma 2.1.** ([24])

*i) if $\Delta < 0$, then the equation (11) has one real root and two complex conjugate roots;*

*ii) if $\Delta = 0$, then the equation (11) has three real roots, and at least two of them are equal;*

*iii) if $\Delta > 0$, then the equation (11) has three distinct real roots.*

From the last system, we infer that $x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2$ which yields either $\mathbf{x} \in H_0 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ or $\mathbf{x} \in H_1 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

Let us rewrite the system (10) as follows

$$\begin{cases} x_1 = x_2\left(x_1 + x_2 + x_3 + ax_1 - bx_3\right), \\ x_2 = x_3\left(x_1 + x_2 + x_3 - cx_1 + bx_2\right), \\ x_3 = x_1\left(x_1 + x_2 + x_3 - ax_2 + cx_3\right), \end{cases} \tag{12}$$

Let us consider all possible cases as we did for the algebra $\mathcal{A}_{V_5}$.

**I**. Let $a = b = c = 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then from (12) we obtain $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$. If $\mathbf{x} \in H_1$ then again from (12) we find $(1/3, 1/3, 1/3) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$.

**II**. Let $a = b = 0$ and $c \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then one has $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$. If $\mathbf{x} \in H_1$ then from (12) one gets

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_3(1 - cx_1), \quad x_3 = x_1(1 + cx_3),$$

hence its solutions are $\widetilde{\mathbf{c}}(c) = (\widetilde{x}_1(c), \widetilde{x}_2(c), \widetilde{x}_3(c)) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$, $\widehat{\mathbf{c}}(c) = (\widehat{x}_1(c), \widehat{x}_2(c), \widehat{x}_3(c)) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$, where

$$\widetilde{x}_1(c) = \widetilde{x}_2(c) = \frac{3 + c + \sqrt{(1-c)^2 + 8}}{4c}, \quad \widetilde{x}_3(c) = \frac{c - 3 - \sqrt{(1-c)^2 + 8}}{2c},$$

$$\widehat{x}_1(c) = \widehat{x}_2(c) = \frac{3 + c - \sqrt{(1-c)^2 + 8}}{4c}, \quad \widehat{x}_3(c) = \frac{c - 3 + \sqrt{(1-c)^2 + 8}}{2c}.$$

**III**. Let $a = c = 0$ and $b \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then $(0, 0, 0) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$. If $\mathbf{x} \in H_1$ then

$$x_1 = x_2(1 - bx_3), \quad x_2 = x_3(1 + bx_2), \quad x_3 = x_1,$$

which implies $\widetilde{\mathbf{b}}(b) = (\widetilde{x}_1(b), \widetilde{x}_2(b), \widetilde{x}_3(b)) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$, $\widehat{\mathbf{b}}(b) = (\widehat{x}_1(b), \widehat{x}_2(b), \widehat{x}_3(b)) \in \mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$, where

$$\widetilde{x}_1(b) = \widetilde{x}_3(b) = \frac{b + 3 + \sqrt{(1-b)^2 + 8}}{4b}, \quad \widetilde{x}_2(b) = \frac{b - 3 - \sqrt{(1-b)^2 + 8}}{2b},$$

$$\widehat{x}_1(b) = \widehat{x}_3(b) = \frac{b + 3 - \sqrt{(1-b)^2 + 8}}{4b}, \quad \widehat{x}_2(b) = \frac{b - 3 + \sqrt{(1-b)^2 + 8}}{2b}.$$

**IV**. Let $b = c = 0$ and $a \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ then $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$. Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then one has

$$x_1 = x_2(1 + ax_1), \quad x_2 = x_3, \quad x_3 = x_1(1 - ax_2)$$

which yields that $\widetilde{\mathbf{a}}(a) = (\widetilde{x}_1(a), \widetilde{x}_2(a), \widetilde{x}_3(a)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, $\widehat{\mathbf{a}}(a) = (\widehat{x}_1(a), \widehat{x}_2(a), \widehat{x}_3(a)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, here

$$\widetilde{x}_1(a) = \frac{a - 3 + \sqrt{(1-a)^2 + 8}}{2a}, \quad \widetilde{x}_2(a) = \widetilde{x}_3(a) = \frac{a + 3 - \sqrt{(1-a)^2 + 8}}{4a},$$

$$\widehat{x}_1(a) = \frac{a - 3 - \sqrt{(1-a)^2 + 8}}{2a}, \quad \widehat{x}_2(a) = \widehat{x}_3(a) = \frac{a + 3 + \sqrt{(1-a)^2 + 8}}{4a}.$$

**V**. Let $c = 0$ and $ab \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $a^2 + 4ab < 0$ then we have $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $a^2 + 4ab \geq 0$ then we get $\widetilde{\mathbf{d}}(abb) = (\widetilde{x}_1(abb), \widetilde{x}_2(abb), \widetilde{x}_3(abb)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, $\widehat{\mathbf{d}}(abb) = (\widehat{x}_1(abb), \widehat{x}_2(abb), \widehat{x}_3(abb)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, where

$$\widetilde{x}_1(abb) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2ab}, \quad \widetilde{x}_2(abb) = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2ab}, \quad \widetilde{x}_3(abb) = \frac{1}{b},$$

$$\widehat{x}_1(abb) = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2ab}, \quad \widehat{x}_2(abb) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2ab}, \quad \widehat{x}_3(abb) = \frac{1}{b}.$$

Assume that $\mathbf{x} \in H_1$ then we have

$$x_1 = x_2(1 + ax_1 - bx_3), \quad x_2 = x_3(1 + bx_2), \quad x_3 = x_1(1 - ax_2). \tag{13}$$

Let $x_1 = 0$. Then from $x_3 = x_1(1 - ax_2)$ one gets $x_3 = 0$. So, by $x_2 = x_3(1 + bx_2)$ it follows that $x_2 = 0$, which is impossible. Therefore, $x_1 \neq 0$. Similarly, one can show that $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $1 - ax_2 \neq 0$ and $1 + bx_2 \neq 0$. So, $x_1x_2x_3 \neq 0$ and $(1 - ax_2)(1 + bx_2) \neq 0$. Then, by (13) one finds

$$x_3 = \frac{x_2}{1 + bx_2}, \quad x_1 = \frac{x_2}{(1 - ax_2)(1 + bx_2)}$$

Substituting the last equations to $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ implies

$$abx_2^3 + (2a - ab - b)x_2^2 + (b - a - 3)x_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{ab}(x_2) = 0.$$

Due to Lemma 2.1 we infer that if $\Delta \geq 0$ then there are three real solutions $x_2^*(ab)$, $\widetilde{x}_2(ab)$, $\widehat{x}_2(ab)$ of the last equation, and it has a unique real solution $x_2^{**}(ab)$ when $\Delta < 0$. Consequently, we conclude that if $\Delta > 0$ then there are three different idempotents $\mathbf{c}(ab), \mathbf{d}(ab), \mathbf{k}(ab)$, and if $\Delta = 0$ then there are three idempotents $\mathbf{c}(ab), \mathbf{d}(ab), \mathbf{k}(ab)$, but two of them are equal, and there is a unique idempotent $\mathbf{n}(ab)$ of $\mathcal{A}_{V_5}$ if $\Delta < 0$, where

$$\mathbf{c}(ab) = (x_1^*(ab), x_2^*(ab), x_3^*(ab)), \quad \mathbf{n}(ab) = (x_1^{**}(ab), x_2^{**}(ab), x_3^{**}(ab)),$$

$$\mathbf{d}(ab) = (\widetilde{x}_1(ab), \widetilde{x}_2(ab), \widetilde{x}_3(ab)), \quad \mathbf{k}(ab) = (\widehat{x}_1(ab), \widehat{x}_2(ab), \widehat{x}_3(ab)),$$

$$x_1^*(ab) = \frac{x_2^*(ab)}{(1 - ax_2^*(ab))(1 + bx_2^*(ab))}, \quad x_3^*(ab) = \frac{x_2^*(ab)}{1 + bx_2^*(ab)},$$

$$x_1^{**}(ab) = \frac{x_2^{**}(ab)}{(1 - ax_2^{**}(ab))(1 + bx_2^{**}(ab))}, \quad x_3^{**}(ab) = \frac{x_2^{**}(ab)}{1 + bx_2^{**}(ab)},$$

$$\widetilde{x}_1(ab) = \frac{\widetilde{x}_2(ab)}{(1 - a\widetilde{x}_2(ab))(1 + b\widetilde{x}_2(ab))}, \quad \widetilde{x}_3(ab) = \frac{\widetilde{x}_2(ab)}{1 + b\widetilde{x}_2(ab)},$$

$$\widehat{x}_1(ab) = \frac{\widehat{x}_2(ab)}{(1 - a\widehat{x}_2(ab))(1 + b\widehat{x}_2(ab))}, \quad \widehat{x}_3(ab) = \frac{\widehat{x}_2(ab)}{1 + b\widehat{x}_2(ab)}.$$

**VI**. Let $b = 0$ and $ac \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $c^2 + 4ac < 0$ then we get $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $c^2 + 4ac \geq 0$ then one has $\widetilde{\mathbf{e}}(aac) = (\widetilde{x}_1(aac), \widetilde{x}_2(aac), \widetilde{x}_3(aac)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, $\widehat{\mathbf{e}}(aac) = (\widehat{x}_1(aac), \widehat{x}_2(aac), \widehat{x}_3(aac)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, where

$$\widetilde{x}_1(aac) = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ac}}{2ac}, \quad \widetilde{x}_2(aac) = \frac{1}{a}, \widetilde{x}_3(aac) = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4ac}}{2ac},$$

$$\widehat{x}_1(aac) = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4ac}}{2ac}, \quad \widehat{x}_2(aac) = \frac{1}{a}, \quad \widehat{x}_3(aac) = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ac}}{2ac}.$$

Suppose that $\mathbf{x} \in H_1$ then one gets

$$x_1 = x_2(1 + ax_1), \quad x_2 = x_3(1 - cx_1), \quad x_3 = x_1(1 - ax_2 + cx_3).$$

Now, using the same argument as in Case V, we conclude that if $\Delta > 0$ then there are three different idempotents $\mathbf{b}(ac), \mathbf{e}(ac), \mathbf{m}(ac)$, and if $\Delta = 0$ then there are three idempotents $\mathbf{b}(ac), \mathbf{e}(ac), \mathbf{m}(ac)$ but two of them are equal, and if $\Delta < 0$ there is unique idempotent $\mathbf{p}(ac)$ of the algebra $\mathcal{A}_{V_5}$, where

$$\mathbf{b}(ac) = (x_1^*(ac), x_2^*(ac), x_3^*(ac)), \quad \mathbf{p}(ac) = (x_1^{**}(ac), x_2^{**}(ac), x_3^{**}(ac)),$$

$$\mathbf{e}(ac) = (\widetilde{x}_1(ac), \widetilde{x}_2(ac), \widetilde{x}_3(ac)), \quad \mathbf{m}(ac) = (\widehat{x}_1(ac), \widehat{x}_2(ac), \widehat{x}_3(ac)),$$

$$x_2^*(ac) = \frac{x_1^*(ac)}{1 + ax_1^*(ac)}, \quad x_3^*(ac) = \frac{x_1^*(ac)}{(1 + ax_1^*(ac))(1 - cx_1^*(ac))},$$

$$x_2^{**}(ac) = \frac{x_1^{**}(ac)}{1 + ax_1^{**}(ac)}, \quad x_3^{**}(ac) = \frac{x_1^{**}(ac)}{(1 + ax_1^{**}(ac))(1 - cx_1^{**}(ac))},$$

$$\widetilde{x}_2(ac) = \frac{\widetilde{x}_1(ac)}{1 + a\widetilde{x}_1(ac)}, \quad \widetilde{x}_3(ac) = \frac{\widetilde{x}_1(ac)}{(1 + a\widetilde{x}_1(ac))(1 - c\widetilde{x}_1(ac))},$$

$$\widehat{x}_2(ac) = \frac{\widehat{x}_1(ac)}{1 + a\widehat{x}_1(ac)}, \quad \widehat{x}_3(ac) = \frac{\widehat{x}_1(ac)}{(1 + a\widehat{x}_1(ac))(1 - c\widehat{x}_1(ac))}.$$

**VII**. Let $a = 0$ and $bc \neq 0$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $b^2 + 4bc < 0$ then we have $(0,0,0) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$. If $\mathbf{x} \in H_0$ and $b^2 + 4bc \geq 0$ then we have $\widetilde{\mathbf{f}}(bcc) = (\widetilde{x}_1(bcc), \widetilde{x}_2(bcc), \widetilde{x}_3(bcc)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, $\widehat{\mathbf{f}}(bcc) = (\widehat{x}_1(bcc), \widehat{x}_2(bcc), \widehat{x}_3(bcc)) \in \mathcal{I}d\,(\mathcal{A}_{V_5})$, where

$$\widetilde{x}_1(bcc) = \frac{1}{c}, \quad \widetilde{x}_2(bcc) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4bc}}{2bc}, \quad \widetilde{x}_3(bcc) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4bc}}{2bc},$$

$$\widehat{x}_1(bcc) = \frac{1}{c}, \quad \widehat{x}_2(bcc) = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4bc}}{2bc}, \quad \widehat{x}_3(bcc) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4bc}}{2bc}.$$

Assume that $\mathbf{x} \in H_1$ then one gets

$$x_1 = x_2(1 - bx_3), \quad x_2 = x_3(1 - cx_1 + bx_2), \quad x_3 = x_1(1 + cx_3).$$

Again using the same argument as in Case V, we conclude that if $\Delta > 0$ then there are three different idempotents $\mathbf{a}(bc), \mathbf{f}(bc), \mathbf{l}(bc)$, and if $\Delta = 0$ then there are three idempotents $\mathbf{a}(bc), \mathbf{f}(bc), \mathbf{l}(bc)$ but two of them are equal, and if $\Delta < 0$ there is unique idempotent $\mathbf{q}(bc)$ of $\mathcal{A}_{V_5}$, where

$$\mathbf{a}(bc) = (x_1^*(bc), x_2^*(bc), x_3^*(bc)), \quad \mathbf{q}(bc) = (x_1^{**}(bc), x_2^{**}(bc), x_3^{**}(bc)),$$

$$\mathbf{f}(bc) = (\widetilde{x}_1(bc), \widetilde{x}_2(bc), \widetilde{x}_3(bc)), \quad \mathbf{l}(bc) = (\widehat{x}_1(bc), \widehat{x}_2(bc), \widehat{x}_3(bc)),$$

$$x_1^*(bc) = \frac{x_3^*(bc)}{1 + cx_3^*(bc)}, \quad x_2^*(bc) = \frac{x_3^*(bc)}{(1 + cx_3^*(bc))(1 - bx_3^*(bc))},$$

$$x_1^{**}(bc) = \frac{x_3^{**}(bc)}{1 + cx_3^{**}(bc)}, \quad x_2^{**}(bc) = \frac{x_3^{**}(bc)}{(1 + cx_3^{**}(bc))(1 - bx_3^{**}(bc))},$$

$$\widetilde{x}_1(bc) = \frac{\widetilde{x}_3(bc)}{1 + c\widetilde{x}_3(bc)}, \quad \widetilde{x}_2(bc) = \frac{\widetilde{x}_3(bc)}{(1 + c\widetilde{x}_3(bc))(1 - b\widetilde{x}_3(bc))},$$

$$\widehat{x}_1(bc) = \frac{\widehat{x}_3(bc)}{1 + c\widehat{x}_3(bc)}, \quad \widehat{x}_2(bc) = \frac{\widehat{x}_3(bc)}{(1 + c\widehat{x}_3(bc))(1 - b\widehat{x}_3(bc))}.$$

**VIII**. Let $abc \neq 0$. Now, suppose that $\mathbf{x} \in H_0$ then

$$\begin{cases} x_1 = x_2\,(ax_1 - bx_3)\,, \\ x_2 = x_3\,(bx_2 - cx_1)\,, \\ x_3 = x_1\,(cx_3 - ax_2)\,. \end{cases} \tag{14}$$

From the first equation of (14) we get

$$x_1 = x_2\left(ax_1 - bx_3\right) \quad \Rightarrow \quad x_1(ax_2-1) = bx_2x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{bx_2x_3}{ax_2-1}$$

where we have used $ax_2 - 1 \neq 0$. It is easy to check that the case $ax_2 - 1 = 0$ impossible. Therefore, (14) implies

$$x_1 = \frac{bx_2x_3}{ax_2-1}, \quad x_2 = bx_2x_3\left(1 - \frac{cx_3}{ax_2-1}\right), \quad x_3 = \frac{bx_2x_3}{ax_2-1}\left(cx_3 - ax_2\right). \tag{15}$$

Let be either $x_2 = 0$ or $x_3 = 0$, then the last two equations of (15) yield $x_2 = x_3 = 0$, so $x_1 = 0$, that is we get $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Let $x_2 \neq 0$ and $x_3 \neq 0$. Then

$$x_1 = \frac{bx_2x_3}{ax_2-1}, \quad 1 = bx_3\left(1 - \frac{cx_3}{ax_2-1}\right), \quad 1 = \frac{bx_2}{ax_2-1}\left(cx_3 - ax_2\right) \tag{16}$$

and from the second equation of (16) one finds

$$1 = bx_3\left(1 - \frac{cx_3}{ax_2-1}\right) \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{bcx_3^2 + bx_3 - 1}{a(bx_3-1)}, \tag{17}$$

where we have used $bx_3 - 1 \neq 0$. One can check that the case $bx_3 - 1 = 0$ is impossible.

Substituting (17) to the third equation of (16) we have

$$A_1x_3^3 + B_1x_3^2 + C_1x_3 + D_1 = 0,$$

where $A_1 = bc(a+b+c)$, $B_1 = b^2 - ac$, $C_1 = -(2b+c)$ and $D_1 = 1$. Its discriminant is given by

$$\Delta_1 = B_1^2C_1^2 - 4A_1C_1^3 - 4B_1^3D_1 - 27A_1^2D_1^2 + 18A_1B_1C_1D_1$$

and by Lemma 2.1 we infer that

i) if $\Delta_1 < 0$, then the equation has one real root and two complex conjugate roots;

ii) if $\Delta_1 = 0$, then the equation has three real roots, and at least two of them are equal;

iii) if $\Delta_1 > 0$, then the equation has three distinct real roots.

Therefore, if $\Delta_1 > 0$ there are three different idempotents $\mathbf{x}^*(abc), \widetilde{\mathbf{x}}(abc), \widehat{\mathbf{x}}(abc)$, and if $\Delta_1 = 0$ there are three idempotents $\mathbf{x}^*(abc), \widetilde{\mathbf{x}}(abc), \widehat{\mathbf{x}}(abc)$ but two of them are equal, and if $\Delta_1 < 0$ there is unique idempotent $\mathbf{x}^{**}(abc)$ of $\mathcal{A}_{V_5}$, where

$$\mathbf{x}^*(abc) = \left(x_1^*(abc), x_2^*(abc), x_3^*(abc)\right), \quad \mathbf{x}^{**}(abc) = \left(x_1^{**}(abc), x_2^{**}(abc), x_3^{**}(abc)\right),$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}(abc) = \left(\widetilde{x}_1(abc), \widetilde{x}_2(abc), \widetilde{x}_3(abc)\right), \quad \widehat{\mathbf{x}}(abc) = \left(\widehat{x}_1(abc), \widehat{x}_2(abc), \widehat{x}_3(abc)\right),$$

$$x_1^*(abc) = \frac{bx_2^*(abc)x_3^*(abc)}{(ax_2^*(abc)-1)}, \quad x_2^*(abc) = \frac{bc(x_3^*(abc))^2 + bx_3^*(abc) - 1}{a(bx_3^*(abc)-1)},$$

$$x_1^{**}(abc) = \frac{bx_2^{**}(abc)x_3^{**}(abc)}{(ax_2^{**}(abc)-1)}, \quad x_2^{**}(abc) = \frac{bc(x_3^{**}(abc))^2 + bx_3^{**}(abc) - 1}{a(bx_3^{**}(abc)-1)},$$

$$\widetilde{x}_1(abc) = \frac{b\widetilde{x}_2(abc)\widetilde{x}_3(abc)}{(a\widetilde{x}_2(abc)-1)}, \quad \widetilde{x}_2(abc) = \frac{bc(\widetilde{x}_3(abc))^2 + b\widetilde{x}_3(abc) - 1}{a(b\widetilde{x}_3(abc)-1)},$$

$$\widehat{x}_1(abc) = \frac{b\widehat{x}_2(abc)\widehat{x}_3(abc)}{(a\widehat{x}_2(abc)-1)}, \quad \widehat{x}_2(abc) = \frac{bc(\widehat{x}_3(abc))^2 + b\widehat{x}_3(abc) - 1}{a(b\widehat{x}_3(abc)-1)}.$$

Assume that $\mathbf{x} \in H_1$ then

$$\begin{cases} x_1 = x_2\left(1 + ax_1 - bx_3\right), \\ x_2 = x_3\left(1 + bx_2 - cx_1\right), \\ x_3 = x_1\left(1 + cx_3 - ax_2\right). \end{cases} \tag{18}$$

From (18) one gets

$$x_1\left(1 - ax_2\right) = x_2\left(1 - bx_3\right) = x_3\left(1 - cx_1\right)$$

Therefore,

$$\begin{cases} 1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ x_1 &= x_2 \left(1 + ax_1 - bx_3\right), \\ x_2 &= x_3 \left(1 + bx_2 - cx_1\right). \end{cases} \tag{19}$$

Substituting $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ into the second equation (19) we have

$$\left((a+b)x_2 - 1\right) x_3 = -ax_2^2 + (2+a)x_2 - 1.$$

Assume that $(a+b)x_2 = 1$ then the last equation yields

$$ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2 + a \pm \sqrt{a^2+4}}{2a} \neq \frac{1}{a+b}.$$

Hence, $(a+b)x_2 \neq 1$, and one finds

$$x_3 = \frac{ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1}{1 - (a+b)x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - x_2 - \frac{ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1}{1 - (a+b)x_2}.$$

Using the last equations together with the third equation of (19) we obtain

$$x_2 = \frac{ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1}{1 - (a+b)x_2} \left(1 + bx_2 - c\left(1 - x_2 - \frac{ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1}{1 - (a+b)x_2}\right)\right).$$

which yields

$$x_2 = \frac{ax_2^2 - (2+a)x_2 + 1}{1 - (a+b)x_2} \left(1 - c + (b+c)x_2 + \frac{acx_2^2 - (2+a)cx_2 + c}{1 - (a+b)x_2}\right).$$

it implies

$$A_2x_2^4 + B_2x_2^3 + C_2x_2^2 + D_2x_2 + E_2 = 0$$

where $A_2 = ab(a+b+c)$, $B_2 = (2-b)a^2 + (c - b^2 - 2bc)a - b(b+2c)$, $D_2 = 2a + c + 3 - bc$, $C_2 = -(a^2 - ((c+1)b + c + 5)a - b^2 + (2-3c)b + 2c)$, $E_2 = -1$.

It is known that the quartic equation has the following solutions

$$x_2^{(1)} = \frac{-B_2 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_2^{(2)} = \frac{-B_2 + \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4A_2},$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-B_2 - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_2^{(4)} = \frac{-B_2 - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4A_2},$$

where $y_1, y_2, y_3$ are solutions of the following cubic equation

$$A_3y^3 - B_3y^2 + C_3y + D_3 = 0$$

with the following coefficients $A_3 = 1$, $B_3 = -(3B_2^2 - 8A_2C_2)$, $D_3 = -(-B_2^3 + 4A_2B_2C_2 - 8A_2^2D_2)^2$, $C_3 = 3B_2^4 + 16A_2^2C_2^2 + 16A_2^2B_2D_2 - 16A_2B_2^2C_2 - 64A_2^3E_2$. The discriminant of the last cubic equation has a form

$$\Delta_2 = B_3^2C_3^2 - 4A_3C_3^3 - 4B_3^3D_3 - 27A_3^2D_3^2 + 18A_3B_3C_3D_3$$

and by Lemma 2.1 it follows that

i) if $\Delta_2 < 0$, then the equation has one real root and two complex conjugate roots;

ii) if $\Delta_2 = 0$, then the equation has three real roots, and at least two of them are equal;

iii) if $\Delta_2 > 0$, then the equation has three distinct real roots.

Therefore, if $\Delta_2 \geq 0$ and $B_3 > 0$ and $C_3 > 0$ (see [15])then $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{(4)}$ are four idempotent elements of $\mathcal{A}_{V_5}$, and if $\Delta_2 < 0$ there is a unique idempotent, where

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right), \mathbf{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right), \mathbf{x}^{(3)} = \left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}\right), \mathbf{x}^{(4)} = \left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}\right),$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-B_2 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_3^{(1)} = \frac{a\left(x_2^{(1)}\right)^2 - (2+a)x_2^{(1)} + 1}{1 - (a+b)x_2^{(1)}}, \quad x_1^{(1)} = 1 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)},$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-B_2 + \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_3^{(2)} = \frac{a\left(x_2^{(2)}\right)^2 - (2+a)x_2^{(2)} + 1}{1-(a+b)x_2^{(2)}}, \quad x_1^{(2)} = 1 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)},$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-B_2 - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_3^{(3)} = \frac{a\left(x_2^{(3)}\right)^2 - (2+a)x_2^{(3)} + 1}{1-(a+b)x_2^{(3)}}, \quad x_1^{(3)} = 1 - x_2^{(3)} - x_3^{(3)},$$

$$x_2^{(4)} = \frac{-B_2 - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4A_2}, \quad x_3^{(4)} = \frac{a\left(x_2^{(4)}\right)^2 - (2+a)x_2^{(4)} + 1}{1-(a+b)x_2^{(4)}}, \quad x_1^{(4)} = 1 - x_2^{(4)} - x_3^{(4)}.$$

Thus for the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_5}$ the following theorem is valid.

**Theorem 2.6.** *The set of idempotent elements $\mathcal{I}d\left(\mathcal{A}_{V_5}\right)$ is equal to*

$$\{\mathbf{O}\} \cup \begin{cases} \{(1/3, 1/3, 1/3)\}, & \textit{if} \quad a=b=c=0, \\ \{\widetilde{\mathbf{c}}(c), \widehat{\mathbf{c}}(c)\}, & \textit{if} \quad a=b=0, \quad c \neq 0, \\ \{\widetilde{\mathbf{b}}(b), \widehat{\mathbf{b}}(b)\}, & \textit{if} \quad a=c=0, \quad b \neq 0, \\ \{\widetilde{\mathbf{a}}(a), \widehat{\mathbf{a}}(a)\}, & \textit{if} \quad b=c=0, \quad a \neq 0, \\ \{\widetilde{\mathbf{d}}(abb), \widehat{\mathbf{d}}(abb), \mathbf{c}(ab), \mathbf{d}(ab), \mathbf{k}(ab), \mathbf{n}(ab)\}, & \textit{if} \quad c=0, \quad ab \neq 0, \\ \{\widetilde{\mathbf{e}}(aac), \widehat{\mathbf{e}}(aac), \mathbf{b}(ac), \mathbf{e}(ac), \mathbf{m}(ac), \mathbf{p}(ac)\}, & \textit{if} \quad b=0, \quad ac \neq 0, \\ \{\widetilde{\mathbf{f}}(bcc), \widehat{\mathbf{f}}(bcc), \mathbf{a}(bc), \mathbf{f}(bc), \mathbf{l}(bc), \mathbf{q}(bc)\}, & \textit{if} \quad a=0, \quad bc \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*(abc), \widetilde{\mathbf{x}}(abc), \widehat{\mathbf{x}}(abc), \mathbf{x}^{**}(abc)\}, & \textit{if} \quad abc \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*(abc), \widetilde{\mathbf{x}}(abc), \widehat{\mathbf{x}}(abc), \mathbf{x}^{**}(abc), \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{(4)}\}, & \textit{if} \quad abc \neq 0, \quad B_3 > 0, \quad C_3 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \end{cases}$$

### 2.4. Absolute Nilpotents of $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$

This section is devoted to the description of absolute nilpotent elements of the algebras $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$, $\mathcal{A}_{V_5}$.

Let first consider the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_1}$. Then one can check that element $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{V_1}$ is absolute nilpotent if one has

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \\ 0 = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ 0 = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \end{cases} \tag{20}$$

where $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Now we consider the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_2}$. Then it is easy to verify that element $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{V_2}$ is absolute nilpotent if one has

$$\begin{cases} 0 = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ 0 = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \\ 0 = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \end{cases} \tag{21}$$

here, as before, $-1 \leq a, b, c \leq 1$. Finally we consider the genetic algebra $\mathcal{A}_{V_5}$. An absolute nilpotent element of the is a solution of the system

$$\begin{cases} 0 = x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, \\ 0 = x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3, \\ 0 = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, \end{cases} \tag{22}$$

where $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

By $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_k})$, $k \in \{1, 2, 5\}$ we denote all absolute nilpotent elements of $\mathcal{A}_{V_k} k \in \{1, 2, 5\}$. From the system (20), we infer that $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$, i.e. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Therefore, $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1}) \subset H_0$. One has that the same fact is true for the genetic algebras $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$.

**Theorem 2.7.** *The set of absolute nilpotent elements of genetic algebras $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_2})$ and $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_5})$ is equal to*

$$\{\mathbf{O}\} \cup \begin{cases} H_0, & if \quad a=b=c=0, \\ \{(0,\alpha,-\alpha),(-\alpha,\alpha,0)\}, & if \quad a=b=0, \quad c \neq 0, \\ \{(\alpha,0,-\alpha),(\alpha,-\alpha,0)\}, & if \quad a=c=0, \quad b \neq 0, \\ \{(0,-\alpha,\alpha),(-\alpha,0,\alpha)\}, & if \quad b=c=0, \quad a \neq 0, \\ \{(\alpha,0,-\alpha)\}, & if \quad c=0, \quad ab \neq 0, \\ \{(0,\alpha,-\alpha)\}, & if \quad b=0, \quad ac \neq 0, \\ \{(\alpha,-\alpha,0)\}, & if \quad a=0, \quad bc \neq 0, \\ \emptyset, & if \quad abc \neq 0. \end{cases}$$

*where $a,b,c \in [-1,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{O}=(0,0,0)$.*

Proof. The proof of the theorem.

A) Rewrite the system (20) in the following form

$$\begin{cases} 0 = x_1(x_1+x_2+x_3+cx_3-ax_2), \\ 0 = x_2(x_1+x_2+x_3+ax_1-bx_3), \\ 0 = x_3(x_1+x_2+x_3+bx_2-cx_1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1(cx_3-ax_2), \\ 0 = x_2(ax_1-bx_3), \\ 0 = x_3(bx_2-cx_1), \end{cases} \tag{23}$$

Now, consider all possible cases.

**I**. Let $a=b=c=0$. Then it is easy to see that $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1}) = H_0$.

**II**. Let $a=b=0$ and $c \neq 0$. Then, from (23) one has

$$x_2 \cdot 0 = 0, \quad x_1x_3 = 0.$$

So, $(0,\alpha,-\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$ or $(-\alpha,\alpha,0) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**III**. Let $a=c=0$ and $b \neq 0$. Then by the same argument, one finds $(\alpha,0,-\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$ or $(\alpha,-\alpha,0) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**IV**. Let $a \neq 0$ and $b=c=0$. Then by the same argument, one finds $(0,-\alpha,\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$ or $(-\alpha,0,\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**V**. Let $c=0$ and $ab \neq 0$. Then $(\alpha,0,-\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**VI**. Let $b=0$ and $ac \neq 0$. Then $(0,\alpha,-\alpha) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**VII**. Let $a=0$ and $bc \neq 0$. Then $(\alpha,-\alpha,0) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$, for any $\alpha \in \mathbb{R}$.

**VIII**. Let $abc \neq 0$. Then $(0,0,0) \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_{V_1})$.

B) Rewrite the system (21) in the following form

$$\begin{cases} 0 = x_2(x_1+x_2+x_3+ax_1-bx_3), \\ 0 = x_1(x_1+x_2+x_3+cx_3-ax_2), \\ 0 = x_3(x_1+x_2+x_3+bx_2-cx_1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_2(ax_1-bx_3), \\ 0 = x_1(cx_3-ax_2), \\ 0 = x_3(bx_2-cx_1), \end{cases} \tag{24}$$

It is easy to check that the systems (23) and (24) are the same. Therefore, in this case, the proof is the same as above.

C) Rewrite the system (22) in the following form

$$\begin{cases} 0 = x_2(x_1+x_2+x_3+ax_1-bx_3), \\ 0 = x_3(x_1+x_2+x_3+bx_2-cx_1), \\ 0 = x_1(x_1+x_2+x_3+cx_3-ax_2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_2(ax_1-bx_3), \\ 0 = x_3(bx_2-cx_1), \\ 0 = x_1(cx_3-ax_2), \end{cases} \tag{25}$$

It is easy to see that the systems (23) and (25) are the same. Therefore, in this case, the proof also is the same as above.

The proof of Theorem 2.7 is complete. □

### 2.5. One-dimensional subalgebras of $\mathcal{A}_{V_1}$, $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$

Consider a linear form $\sigma(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ and the sets

$$H_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\mathbf{x}) = 0\right\} \quad \text{and} \quad H_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\mathbf{x}) = 1\right\}.$$

Recall that a subalgebra of an algebra is a vector subspace which is closed under the multiplication of vectors.

**Theorem 2.8.**

*i) The sets $H_0, H_1$ and the two-dimensional simplex $S^2$ are closed under the multiplication of the algebra $\mathcal{A}_{V_1}$ (resp. $\mathcal{A}_{V_2}$, $\mathcal{A}_{V_5}$);*

*ii) There is one-to-one correspondence between one-dimensional subalgebras of $\mathcal{A}_{V_1}$ (resp. $\mathcal{A}_{V_2}$, $\mathcal{A}_{V_5}$) and the sets of non-zero fixed points of operator $V_1$ (resp. $V_2$, $V_5$) together with absolute nilpotent elements.*

Proof. The proof of the theorem.

i) Let $\mathcal{A}_{V_1}$ be a genetic algebra. We give the proof for $H_0$ for other sets it is similar. Take any two different elements $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_0$ then we obtain $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ and $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \circ_V (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = x_1y_1\mathbf{e}_1 + x_1y_2\left(\frac{1-a}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1+a}{2}\mathbf{e}_2\right) \\
+ x_1y_3\left(\frac{1+c}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1-c}{2}\mathbf{e}_3\right) + x_2y_1\left(\frac{1-a}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1+a}{2}\mathbf{e}_2\right) + x_2y_2\mathbf{e}_2 \\
+ x_2y_3\left(\frac{1-b}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1+b}{2}\mathbf{e}_3\right) + x_3y_1\left(\frac{1+c}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1-c}{2}\mathbf{e}_3\right) + x_3y_2\left(\frac{1-b}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1+b}{2}\mathbf{e}_3\right) + x_3y_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x_1y_1 + \frac{1-a}{2}x_1y_2 + \frac{1+c}{2}x_1y_3 + \frac{1-a}{2}x_2y_1 + \frac{1+c}{2}x_3y_1\right)\mathbf{e}_1 \\
&+ \left(x_2y_2 + \frac{1+a}{2}x_1y_2 + \frac{1-b}{2}x_2y_3 + \frac{1+a}{2}x_2y_1 + \frac{1-b}{2}x_3y_2\right)\mathbf{e}_2 \\
&+ \left(x_3y_3 + \frac{1-a}{2}x_1y_3 + \frac{1+b}{2}x_2y_3 + x\frac{1-c}{2}{}_3y_1 + \frac{1+b}{2}x_3y_2\right)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Therefore it follows that

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y}) &= x_1y_1 + (1-a)x_1y_2 + x_1y_3(1+c) + x_2y_2 + (1+a)x_1y_2 + (1-b)x_2y_3 + x_3y_3 + (1+b)x_2y_3 \\
&+ (1-c)x_1y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 0,
\end{aligned}$$

that is $\mathbf{x} \circ_V \mathbf{y} \in H_0$.

The genetic algebras $\mathcal{A}_{V_2}$ and $\mathcal{A}_{V_5}$ can be considered in a similar manner.

ii) Let $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathbf{x}$ be an one-dimensional subalgebra of $\mathcal{A}_{V_1}$(resp.$\mathcal{A}_{V_2}, \mathcal{A}_{V_5}$) generated by $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathcal{A}_{V_1}$(resp.$\mathcal{A}_{V_2}, \mathcal{A}_{V_5}$).

Consider the equation $\mathbf{x}^2 = \lambda\mathbf{x}$.

If $\lambda \neq 0$, then the element $\mathbf{z} = \mathbf{x}/\lambda$ is a fixed point of the operator $V_1$(resp.$V_2, V_5$) (since $\mathbf{z}^2 = \mathbf{z}$).

If $\lambda = 0$, then $\mathbf{x}$ is an absolute nilpotent element of the algebra $\mathcal{A}_{V_1}$(resp.$\mathcal{A}_{V_2}, \mathcal{A}_{V_5}$).

Now assume that $\mathbf{x}$ is a fixed point of $V_1$(resp.$V_2, V_5$), that is, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}$. Consider the space $\mathcal{L} = \mathbb{R}\mathbf{x}$, then for any $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ we have

$$\mathbf{u} \circ_V \mathbf{v} = (\lambda_1 \mathbf{x}) \circ_V (\lambda_2 \mathbf{x}) = \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{x}^2 = \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{x} \in \mathcal{L}.$$

The same is true for an absolute nilpotent element.

The proof of Theorem 2.8 is complete. □

# References


1. Arenasa M. Labra A. Paniello I. Lotka-Volterra coalgebras. Linear Multilin. Alg. 2020. Vol.15, pp. 4483-4497.
2. Bernstein S. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, Ann. Math. Statistics 1942. Vol.13, Issue 1, pp. 53-61.
3. Boujemaa H., Rachidi M., Micali A. Sur les algabres de Lotka-Volterra, Algebras Groups Geom. 1993. Vol.10, pp. 169-180
4. Boujemaa H., Rachidi M., Micali A. Derivations dans les algebres de Lotka-Volterra, Algebras Groups Geom. 2004. Vol.21, pp. 471-487
5. Etherington I.M.H. Genetic algebras, Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1939. Vol.59, pp. 242-258.
6. Fernandez J.C.G., Garcia C.I. On Lotka-Volterra algebras, Jour. Alg. Appl. 2019. Vol.18, Issue 10, pp. 245-258.
7. Fernandez J.C.G., Garcia C.I. Derivations of Lotka-Volterra algebras, $S$ão Paulo J. Math. Sci. 2019. Vol.13, Issue 1, pp. 292-304.
8. Figueiredo A., Rocha Filho T.M., Brenig L. Algebraic structures and invariant manifolds of differential systems, J. Math. Phys. 1998. Vol.39, pp. 2929-2946.
9. Ganikhodjaev N.N., Ganikhodjaev R.N., Jamilov U.U. Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 2015. Vol.35, Issue 5, pp. 1443-1473.
10. Ganikhodjaev N.N., Jamilov U.U., Mukhitdinov R.T. On non-ergodic transformations on $S^3$, Jour. Phys. Conf. Ser. 2013. Vol.435.
11. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, Sb. Math. 1993. Vol.76, Issue 2, pp. 489-506.
12. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories, Vladikavkaz. Mat. Zh. 2006. Vol.8, pp. 12-28 (in Russian).
13. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F., Pirnapasov A., Qaralleh I. Genetic Volterra algebras and their derivations, Comm. Algebra. 2018. Vol.46, Issue 2, pp. 1353-1366.
14. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F., Rozikov U. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems, Infin. Dimens. Anal. Quan. Probab. Relat. Top. 2011. Vol.14, pp. 279-335.
15. Gasanov I.P. On the roots of a cubic equation. Young Scientist. 2018. Vol.39, pp. 1-6.
16. Gonshor H. Derivations in genetic algebras. Comm. Algebra. 1988. Vol.16, pp. 1525-1542.
17. Harrison D.K. Commutative nonassociative algebras and cubic forms. J. Algebra. 1974. Vol.32.
18. Holgate P. Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle. J. London Math. Soc. 1975. Vol.9, pp. 613-623.
19. Holgate P. Selfing in genetic algebras. J. Math. Biol. 1978. Vol.6, pp. 197-206.
20. Holgate P. The Interpretation of derivations in genetic algebras. Linear Algebra Appl. 1987. Vol.85, pp. 75-79.
21. Itoh Y. Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction,Nonlinear Anal. 1981. Vol.5, pp. 53-56.
22. Jamilov U.U., Ladra M. F-evolution algebra. Filomat. 2016. Vol.30, pp. 2637-2652.

23. Jamilov U.U., Khudoyberdiev Kh.O., Ladra M. Quadratic operators corresponding to permutations. Stoch. Anal. Appl. Vol.38, Issue 5, pp. 929-938.
24. Kurosh A. Higher algebra. Mir publishers. Moscow 1980.
25. Lotka A.J. Undamped oscillations derived from the law of mass action. J. Amer. Chem. Soc. 1920. Vol.42, pp. 1595-1599.
26. Lyubich Y.I. Mathematical structures in population genetics. Vol. 22 of Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
27. Micali A., Campos T.M.M., Costa e Silva M.C., Ferreira S.M.M., Costa R.C.F. Derivations dans les algebres Gametiques. Comm. Algebra. 1984. Vol.12, pp. 239-243.
28. Mukhamedov F.M., Jamilov U.U., Pirnapasov A.T. On non-ergodic uniform Lotka-Volterra operators. Math. Notes. 2019. Vol.105, Issue 2, pp. 258-264.
29. Mukhamedov F., Qaralleh I. On derivations of genetic algebras. J. Phys.: Conf. Ser. 2014. Vol.553.
30. Mukhamedov F., Qaralleh I. $S$-evolution algebras and their enveloping algebras. Mathematics. 2021. Vol.9.
31. Mukhamedov F., Taha M.H.M. On Volterra and orthogonality preserving quadratic stochastic operators. Miskolc Math. Notes. 2016. Vol.17, Issue 1, pp. 457-470.
32. Narendra S.G., Samaresh C.M., Elliott W.M. On the Volterra and other nonlinear models of interacting populations. Rev. Mod. Phys. 1971. Vol.43, pp. 231-276.
33. Qaralleh I., Mukhamedov F. Volterra evolution algebras and their graphs. Linear and Multilinear Algebra. 2021. Vol.69, pp. 2228-2244.
34. Reed M.L. Algebraic structure of genetic inheritance. Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.). 1997. Vol.34, pp. 107-130.
35. Rozikov U.A. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. World Sci. Publ., Singapore, 2020.
36. Volterra V. Lois de fluctuation de la population de plusieurs espèces coexistant dans le même milieu. Association Franc. Lyon. 1927. Vol.1926, pp. 96-98 (1926).
37. Worz-Busekros A. Algebras in Genetics. Lect. Notes in Biomathematics, Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
38. Yoon S.I. Idempotent elements in the Lotka-Volterra algebra Comm. Korean Math. Soc. 1995. Vol.10, pp. 123-131.
39. Yoon S.I. Automorphisms of Lotka-Volterra algebras. Comm. Korean Math. Soc. 1997. Vol.12, pp. 45-50.

GENETIK ALGEBRALARNING BIR O'LCHAMLI QISM ALGEBRALARI
**Ibragimov Mahammadjon**

Ushbu maqolada biz ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik avtomorfizmlarga mos keladigan genetik algebralarni qaraymiz. Asosiy maqsad mazkur genetik algebralarning barcha idempotent elementlari va bir o'lchamli qism algebralarini tavsiflashdir. Ushbu algebralarning bir o'lchamli qism algebralari bilan barcha idempotent elementlari va barcha absolyut nilpotent elementlaridan iborat to'plam orasidagi moslik ko'rsatilgan.

**Kalit so'zlar:** noassotsiativ algebra; genetik algebra; kvadrat stoxastik operator; kvadrat avtomorfizm.

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГЕБР
**Ибрагимов Махаммаджон**

В настоящей статье мы рассмотрим генетические алгебры соответствующие квадратичным автоморфизмам определенных на двухмерном симплексе. Основная цель — описать множество всех идемпотентов и одномерные подалгебры таких генетических алгебр. Показано соответствие между одномерными подалгебрами и множеством состоящий из всех идемпотентных и абсолютных нильпотентных элементов.

**Ключевые слова:** неассоциативная алгебра; генетическая алгебра; квадратичный стохастический оператор; квадратичный автоморфизм.

**Received: 09/07/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Ibragimov M. On 1D subalgebras of genetic algebras. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 17-38

# Equality of surfaces in Euclidean and semi-euclidean spaces according to geometric characteristics, Monge-Ampere equation

**Ismoilov Sherzodbek**
Department of Geometry and Topology
National University of Uzbekistan
Tashkent State Transport University
Tashkent, Uzbekistan
sh.ismoilov@nuu.uz

**Kholmurodova Gulnoza**
Department of Higher Mathematics
Tashkent State Transport University
Tashkent, Uzbekistan
xolmurodovagulnoza3@gmail.com

## Abstract

Total curvature is defined by first and second fundamental forms in Euclidean and isotropic spaces. In this article, theorems are proved about the connection of two-dimensional surfaces satisfying Cauchy-Riemann conditions in Euclidean and isotropic spaces.

**Keywords:** Isotropic space; Monge-Ampere equation; movement; conditions Cauchy-Riemann; full curvature; average curvature; Gauss's theorem; fundamental forms.

**MSC 2020:** 53A25, 53A35, 53A40.

## 1. Introduction

Surfaces are the basic structure of differential geometry. Numerous studies of surfaces are carried out in Euclidean and isotropic spaces. Hence, these surfaces have attracted the attention of many researchers. Concepts of isotropic space and geometry of the surfaces given in this space were first studied by K. Strubecker [12, 13], and then by Artykbaev A., D.D.Sokolov [5]. In recent years, this field has developed further, and the news related to this field was also reflected in the works of E.M.Aydin [6], M.S. Lone, M.K.Karacan [7], and Sh.Sh. Ismoilov [3, 10]. In particular, in the work of M.S. Lone and M.K. Karacan, the problem of the existence of dual surfaces with constant total and mean curvatures in isotropic space was considered. Sh.Sh. Ismoilov solved the Monge-Ampere equation for the class of transfer surfaces. In his work, equations are found for a surface with a given function of total curvature in this class of transfer surfaces.

Isotropic geometry is based on a simple semi-Riemannian metric [11]. It naturally appears when properties of functions are to be geometrically visualized and interpreted at the hand of their graph surfaces [16]. In particular, this holds for the visualization of stress properties in planar elastic systems at the hand of their Airy surfaces [15]. An application of isotropic geometry in Image Processing has been given by Koenderink and van Doorn [13].

In this article, the connection between total and mean curvatures of two surfaces satisfying the Cauchy-Riemann conditions in 3-dimensional Euclidean and isotropic spaces and spherical images of surfaces given by these conditions in Euclidean space are studied.

Let there be given a three-dimensional affine space $A_3$, set by an affine coordinate system. Let $X\{x_1, y_1, z_1\}$ and $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ be vectors of the space $A_3$ in the coordinate system $Oxyz$.

We know that it is possible to transfer a surface to another surface in Euclidian space. The following transition matrix defines this motion:

$$X' = RX + B, \tag{1}$$

where, $R$ is a 3-dimensional quadratic, skew-symmetric, orthogonal matrix in the Euclidian sense $B-$ parallel translation. It is known, the motion in 3-dimensional Euclidian space is a rotation in each coordinate plane, i.e.:

$$R = R_Z(\gamma)\, R_Y(\beta)\, R_X(\alpha), \tag{2}$$

where, $R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $R_Y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$, $R_Z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

We say the scalar product of vectors $X\{x_1, y_1, z_1\}$and $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ the number defined by the following rule:

$$(X,Y) = \begin{cases} (X,Y)_1 = x_1x_2 + y_1y_2 \;\; if \;\; (X,Y)_1 \neq 0, \\ (X,Y)_2 = z_1z_2 \qquad\quad if \;\; (X,Y)_1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

**Definition 1.1.** The affine space $A_3$, in which the scalar product of vectors is calculated by the formula (3), is called the isotropic space $R_3^2$.

We define the norm of a vector and the distance between the points with the help of the scalar product. More precisely, the vector norm $\left|\overrightarrow{X}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}\right)}$, the distance between the points $M(X)$, $N(Y)$ and $|MN| = \sqrt{(Y-X, Y-X)}$ .

In coordinates, they have the following form:

$$|MN| = \begin{cases} |MN|_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \;\; if \;\; |MN|_1 \neq 0, \\ |MN|_2 = |z_2 - z_1| \qquad\qquad\qquad\quad if \;\; |MN|_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

The isotropic space $R_3^2$ is an affine space, there exists an affine transformation of coordinates that preserves the distance defined by the formula (4). This transformation is called the motion of an isotropic space and is given by the formula [3]:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \\ z' = h_1x + h_2y + z + c. \end{cases} \tag{5}$$

Let a regular surface be given in $R_3^2$ by the vector equation

$$\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\overrightarrow{i} + y(u,v)\cdot\overrightarrow{j} + z(u,v)\cdot\overrightarrow{k}. \tag{6}$$

Then the first and second fundamental forms of the surface are determined by the following formulas:

$$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \tag{7}$$

The coefficients of the first and second fundamental forms in the isotropic space are calculated as follows, as in the Euclidean space.

$$\begin{cases} E = \overline{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \\ F = \overline{r}_u\overline{r}_v = x_ux_v + y_uy_v, \\ G = \overline{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} L = (\overline{r}_{uu}, \overline{n}), \\ M = (\overline{r}_{uv}, \overline{n}), \\ N = (\overline{r}_{vv}, \overline{n}). \end{cases} .$$

Defined by analogy with Euclidean space, the total and mean curvature of the surface, respectively, have the following forms

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{and} \quad 2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

In this space, let the surface $F$, given by the equation $z = f(x,y)$, is the one-valued projection onto the plane $Oxy$, the total and mean curvature at the point of the surface are determined by the following formulas:

$$K = LN - M^2, \qquad 2H = L + N,$$

calculating these coefficients, then we have

$$K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2, \tag{8}$$

$$2H = f_{xx} + f_{yy}. \tag{9}$$

Where, the right-hand side of the total and mean curvatures of the surface determine the Monge-Ampere and Laplace operators, respectively. Hence it follows that the study of the geometric characteristics of the surface in the isotropic space is interdependent on the Monge-Ampere and Laplace operators.

It is known from the complex analysis, that if the real and imaginary parts of a holomorphic function satisfy the Cauchy-Riemann conditions, then they are harmonic functions. If we consider each real and imaginary part of the function as a surface, we determine the connection between these surfaces according to geometric characteristics. If the transformation preserves the distance, it is known that in Euclidian space it transfers a surface to a surface equal to itself, generated by motion and differing only in position.

If

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad U(x, y), V(x, y) \in C^2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

then the Cauchy-Riemann conditions for its real and imaginary parts are as follows:

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x. \end{cases} \tag{10}$$

Now we study the geometric characteristics of $U(x, y)$ and $V(x, y)$ surfaces. For this we introduce the concept of a spherical image. If we pass rays parallel to the oriented all normal vectors of the surface $S$ from the center of the unit sphere which center lies at the origin of coordinates, each point $M$ of the surface and the domain around it are reflected to the sphere , and the point $M$ is replaced by some point $M'$ of the sphere . The point $M'$ is called the spherical image of $M$.

If the surface $S$ is given by equation (6), its unit normal vector is also a function of $u$ and $v$:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(u, v). \tag{11}$$

The end of this vector draws the sphere or part of it, this part corresponds to the domain taken on the surface $S$ and gives its image. The equation (11) can be considered as the equation of the sphere, because for the sphere the vector $n$ plays the role of a radius vector. We assume that the same values of curvilinear coordinates $u$ and $v$ correspond to points $M$ and $M'$ which corresponding to each other. Now if a closed line $L$ is taken on the surface, then another closed line $L'$ corresponds to it on the sphere.

Denote the area of the domain $(L')$ inside the line $L'$ by $S'$ and the area of the domain $(L)$ inside the line $L$ by $S$, we take the ratio of $S'$ to $S$ and reduce $L$ to the point $M$. In this case, as $L'$ decreases, the areas $S'$ and $S$ also decrease, and their ratio tends to a certain limit value:

$$\lim_{(L)\to M} \frac{S'}{S} = K_G.$$

This limit is called the Gaussian curvature of the surface.

We study the spherical image of two surfaces satisfying the Cauchy-Riemann conditions. We write the following vector equations for the surfaces $U(x, y)$ and $V(x, y)$ mentioned above:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}(x, y) &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + U(x, y)\overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{\rho}(x, y) &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + V(x, y)\overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Established the following relationship between the total curvature of these two surfaces.

**Lemma 1.1.** [10] *If the functions $U(x, y)$ and $V(x, y)$ satisfy the following differential equality*

$$U_{xx}V_{yy} + U_{yy}V_{xx} - 2U_{xy}V_{xy} = 0, \tag{13}$$

*then the total curvature of the surface $U(x, y) + V(x, y)$ is the sum of the total curvatures of these surfaces,*

$$K = K_1 + K_2.$$

## 2. Main part

**Lemma 2.1.** *The spherical images of the surfaces given by the equations $U(x, y)$ and$V(x, y)$ satisfying the Cauchy-Riemann conditions are equal to each other.*

Proof. We find the normal vectors $\overrightarrow{N_1}$ and $\overrightarrow{N_2}$ for these surfaces, respectively, and calculate their unit vectors:

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\overrightarrow{N_1}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|} = \left\{-\frac{U_x}{\sqrt{1+U_x^2+U_y^2}}, -\frac{U_y}{\sqrt{1+U_x^2+U_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+U_x^2+U_y^2}}\right\},$$

$$\overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \left\{-\frac{V_x}{\sqrt{1+V_x^2+V_y^2}}, -\frac{V_y}{\sqrt{1+V_x^2+V_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+V_x^2+V_y^2}}\right\}.$$

Using the Cauchy-Riemann conditions, we can write the following equality for the expressions in the denominator: $1+V_x^2+V_y^2 = 1+U_x^2+U_y^2$ moreover, we have the following equality: $\overrightarrow{N_1} = \{-U_x, -U_y, 1\} = \{-V_y, V_x, 1\}$ and $\overrightarrow{N_2} = \{-V_x, -V_y, 1\}$.

That is, when surface normal vectors satisfy the Cauchy-Riemann conditions, the above equations are valid. If we transfer the vector $\overrightarrow{N_1}$ to a vector symmetric to the plane $y = x$, a vector $\{V_x, -V_y, 1\}$ is generated. If we transfer the vector $\{V_x, -V_y, 1\}$ symmetrically with respect to the plane $Oyz$, then we get the vector $\overrightarrow{N_2}$. So, since the vector $\overrightarrow{N_1}$ is transferred to the vector $\overrightarrow{N_2}$ by motion, the spherical images of surfaces $U(x,y)$ and $V(x,y)$ are equal to each other. □

If we transfer a surface $S$ from one place to another in space, the first and second fundamental forms do not change. This fact is obvious from a geometric point of view. So, in space, for two $S$ and $S'$ surfaces with two different positions, it is possible to choose such common curvilinear $u$ and $v$ coordinates, that their first and second fundamental forms are the same. As we know, K.F.Gauss [14] investigated the inverse problem to this problem, i.e., the problem of whether the given surface with the first and second fundamental forms can be determined completely (one-valued) in Euclidean space and solved it by the following theorem.

**Theorem 2.1. (Gauss)** *If a surface $S$ is given by its first and second fundamental forms, that is, if the coefficients of first and second fundamental forms are considered as functions of $x$, $y$ then the geometric form of the surface is completely determined by these conditions, i.e., the same any second surface with these fundamental forms differs from the surface $S$ by its position in the space.*

Let the complex variable function $\omega = U(x,y) + iV(x,y)$ be given. Here, considering each of the functions $U = U(x,y)$ and $V = V(x,y)$ as a surface, if we require that these two surfaces satisfy the Cauchy-Riemann conditions, there must be certain connections between these surfaces. In this paper, we consider the connection between $U = U(x,y)$ and $V = V(x,y)$surfaces in Euclidean and isotropic spaces.

We get the following theorem for surfaces $U = U(x,y)$ and $V = V(x,y)$ in Euclidian space:

**Theorem 2.2.** *If the surfaces given by the functions $U = U(x,y)$ and $V = V(x,y)$ in Euclidian space satisfy the Cauchy-Riemann conditions, then these surfaces are equal to each other and differ only in position.*

Proof. Let us suppose that the surfaces are given by the equations $U = U(x,y)$ and $V = V(x,y)$, and according to the condition of the theorem, the surfaces given by these equations satisfy the Cauchy-Riemann conditions as a function, and the formula (10) holds. We write the vector equation of these two surfaces in the form (12).

Calculating the total curvature for the surface given by the first vector equation, we get the following formula:

$$K_U = \frac{U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2}{\left(1+U_x^2+U_y^2\right)^2}. \tag{14}$$

If we take the second-order derivative from the formula (10), we have

$$\begin{cases} U_{xx} = V_{xy}, \\ U_{yy} = -V_{xy}, \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{xy} = V_{yy}, \\ U_{xy} = -V_{xx}. \end{cases} \tag{15}$$

Substituting expressions of (15) into (14), we get

$$K_V = \frac{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2}{\left(1+V_x^2+V_y^2\right)^2}. \tag{16}$$

This determines the total curvature of the surface given by the second vector equation. So it follows that

$$K_U = K_V.$$

That is, the total curvatures of the two given surfaces are equal to each other. According to Gauss's theorem above, these surfaces are equal to each other and differ only in position. It is possible to transfer the surface $U(x, y)$ to the surface $V(x, y)$ by the given motion (1) in Euclidean space. That is, these surfaces are transferred from one to another through the transition matrix (1). Theorem 2.2. is proved. □

The following theorem is valid in isotropic space.

**Theorem 2.3.** *If the functions $U = U(x, y)$ and $V = V(x, y)$ are given in isotropic space and satisfy the Cauchy-Riemann conditions, the total and mean curvatures of the surfaces given by these equations are equal, but these surfaces are not equal to each other in the isotropic sense.*

Proof. Suppose that the surfaces are given by the equations $U = U(x, y)$ and $V = V(x, y)$, the surfaces given by these equations satisfy the formula (10) as a function according to the condition of the theorem:

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x. \end{cases}$$

Using the formula (8), calculating the coefficients of first and second fundamental forms for the given surface $U = U(x, y)$ in isotropic space, and putting it in the formula (9), the total and mean curvatures for the first surface are equal to the following formulas:

$$K = U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2, \qquad 2H = U_{xx} + U_{yy}. \tag{17}$$

For the surface $V$, by using equations (15), we find the total curvature of the surface as

$$K = U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = V_{xy}\left(-V_{xy}\right) - V_{xx}\left(-V_{yy}\right) = V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2.$$

From this, the total curvatures of surfaces $U$ and $V$ are equal to each other. It is known that for functions satisfying the Cauchy-Riemann conditions, the Laplace operator is equal to zero. In isotropic space, the mean curvatures of the surfaces $U$ and $V$ are equal to each other and equal to zero, because the mean curvatures of the surfaces are calculated using the Laplace operator, i.e.

$$H_U = H_V = 0.$$

It follows that the total and mean curvatures of these surfaces are equal to each other. We know that a given surface in Euclidean space is transferred to the equal surface by the motion (1). Even if the curvature of the given surface in isotropic space is equal to the curvature of the second surface, it is not always possible to transfer from the surface $U$ to the surface $V$ by the motion (5). For example, if we choose an upward convex $U$ surface and a downward convex $V$ surface satisfying the Cauchy-Riemann conditions, these two surfaces cannot be transferred from one to the other by isotropic motion. Therefore, these two surfaces are not equal to each other in the isotropic sense. However, there exist surfaces that are equal to each other satisfying the Cauchy-Riemann conditions.

**Example.** A surface $U = x^2 - y^2$ and a surface $V = 2xy$ can be transferred from one to the other by the following motion:

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4}, \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4}, \\ z' = z. \end{cases}$$

So, in the isotropic space there are such surfaces that, although the total and mean curvatures are equal to each other, these surfaces may be equal or unequal. Theorem 2.3 is proved. □

**Remark 2.1.** *Gauss' theorem about the equality of surfaces is not true for the isotropic space.*

Because this motion is a composition of rotation, parallel translation and sliding. Through sliding, the surface is deformed in the Euclidean sense. However, even if the geometric characteristics of the given upward convex and downward convex surfaces in theorem 2.3 are equal, we cannot say that these surfaces are equal to each other according to Gauss's theorem.

# References


1. Aleksandrov A.D. Intrinsic geometry of convex surfaces. 2006. Taylor and Francis Group. pp. 235-269.
2. Artykbaev A., Ismoilov Sh.Sh. The dual surfaces of an isotropic space $R_3^2$. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021. Vol. 4. pp. 1-8.
3. Artykbaev A., Ismoilov Sh. Surface recovering by a given total and mean curvature in isotropic space. Palestine Journal of Mathematics. 2022. Vol.11, Issue 3, pp. 351-361.
4. Artykbaev A, Ismoilov Sh. Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces, International electronic journal of geometry. 2022. Vol. 15, Issue 1, pp. 1-10.
5. Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве- времени. 1990. Ташкент: Фан, pp. 180.
6. Aydin M.E., Mihai A. Ruled surfaces generated by elliptic cylindrical curves in the isotropic space. Georgian Mathematical Journal. 2019. Vol.26, issue 3, pp. 331-340.
7. Lone M. S., Karacan M. K. Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space $I_3^1$. Tamking journal of mathematics. 2018. Vol.49, Issue-2, pp. 67-77.
8. Karacan M. K., Yoon D. W. and Bukcu B., Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2016, vol- 13(7).
9. Ismoilov Sh. Sh., Sultonov B. M. Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space. International Journal of Statistics and Applied Mathematics. 2020. Vol.5, Issue 1, pp. 28-31.
10. Ismoilov Sh.Sh. Geometry of the Monge-Ampere equation in an isotropic space. Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol.65, Issue 2, pp. 66-77.
11. Sachs H.Isotrope Geometrie des Raumes. 1990. Vieweg. pp. 1-300.
12. Strubecker K. Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. Mathematische Zeitschrift. 1947. pp. 743-777.
13. Strubecker K. Airy'sche Spannungsfunktion und isotrope Differentialgeometrie. Math. Zeitschrift. 1962. Vol.78, pp. 189–198.
14. Sobirov M.A. Yusupova A.Yo. Course of differential geometry. 1965. Tashkent.(in Uzbek)
15. Pottmann.H. Opitz.K. Curvature analysis and visualization for functions defined on Euclidian spaces or surfaces. Comp.Aid.Geom.Des. 1994. Vol.11, pp. 655-674.
16. Koenderink I.J. Van Doorn A.J. Image processing done right. ECCV. 2002. Vol.2350, pp. 158-172.
17. Yoon D.W. Lee J.W. Linear Weingarten helicoidally surfaces in isotropic space. Symmerty. 2016. Vol.8, Issue 11. pp. 1-7.

### Yevklid va yarim yevklid fazolarda xarakteristik kattaliklarga ko'ra sirtlarning tengligi, Monj-Amper tenglamasi

**Ismoilov Sherzodbek, Kholmurodova Gulnoza**

Ushbu maqolada to'la egrilik Yevklid va izotrop fazolarda birinchi va ikkinchi kvadratik formalar orqali to'liq aniqlanadi. Koshi-Riman shartlarini qanoatlantiruvchi ikki o'lchovli sirtlarning Yevklid va izotrop fazodagi o'zaro vaziyati haqidagi teoremalar isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** Izotrop fazo; Monj-Amper tenglamasi; harakat; Koshi-Riman shartlari; umumiy egrilik; o'rtacha egrilik; Gauss teoremasi; fundamental shakllar.

### Равенство поверхностей в евклидовом и полуевклидовом пространствах по геометрическим характеристикам, уравнение Монжа-Ампера

**Исмоилов Щерзодбек, Холмуродова Гулноза**

Полная кривизна определяется первой и второй фундаментальными формами в евклидовом и изотропном пространствах. В статье доказываются теоремы о связности двумерных поверхностей, удовлетворяющих условиям Коши-Римана, в евклидовом и изотропном пространствах.

**Ключевые слова:** Изотропное пространство; уравнение Монжа-Ампера; движение; условия Коши-Римана; полная кривизна; средняя кривизна; теорема Гаусса; фундаментальные формы.

**Received: 31/05/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Ismoilov Sh., Kholmurodova G. Equality of surfaces in Euclidean and semi-euclidean spaces according to geometric characteristics, Monge-Ampere equation. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 39-45

# Inverse problem of determining the kernel in an integro-differential equation of parabolic type with non-local conditions

**Jumaev Jonibek**
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan
jonibekjj@mail.ru

**Atoev Dilshod**
Department of Differential equations
Bukhara State University
Bukhara, Uzbekistan
dilshod.atoyev@mail.ru

**Abstract**

In this paper, the inverse problem of determination kernel from integrodifferential heat equation with the nonlocal initial boundary and additional conditional is studied. The solvability of the direct problem is proved using Fourier's method and Banach's principle. To investigate the inverse problem, an auxiliary equivalent to the original problem is obtained. Then, using the Fourier method, the problem is reduced to a system of closed integral equations equivalent to the unknown functions. The theorem about the existence and uniqueness of the solution of this integral equation using the principle of contraction mapping is proved.

**Keywords:** integro-differential equation; non-local initial-boundary problem; inverse problem; integral equation; Banach principle.

**MSC 2020:** 35K10

## 1. Introduction

Today in the theory of mathematical physics equations, investigations devoted to the direct and inverse problems took an important place. These problems arise in situations when the structure of the mathematical model of the studying process is known and it is necessary to set the problems of determining the parameters of the mathematical model itself. Such problems include the problems of determining the various kernel, leading and lower coefficients of the equations, nonlocal initial and boundary conditions, and so on (see [1]).

Problems with nonlocal conditions for partial differential equations have been studied by many authors. The articles [2, 5] were considered with the study of the unique solvability of non-local inverse boundary value problems for second-order hyperbolic equations with overdetermination conditions. These problems the existence and uniqueness theorem for the classical solution of the inverse coefficient problem is proved.

The inverse problem of determining the time-dependent thermal diffusivity and the temperature distribution in a parabolic equation in the case of nonlocal initial-boundary conditions containing a real parameter and integral overdetermination conditions are investigated in the works [6, 12].

The problem of determining the kernel $k(t)$ of the integral term in an integrodifferential heat equation was studied in many publications [13, 17], in which both one- and multidimensional inverse problems with classical initial, initial-boundary conditions were investigated. There is proven existence and uniqueness of inverse problem solutions. In this article, we study an inverse problem in integrodifferential equation for a second-order parabolic equation with nonlocal initial-boundary condition. The inverse problem of determination of the kernel $k(t)$ function in the one - dimensional integro- differential parabolic equation existence and uniqueness of this problem solution is studied.

Let $T > 0$ be fixed number and $D_{Tl} = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Consider the inverse problem of determining of functions $u(x,t), k(t)$ such that it satisfies the equation

$$u_t - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_{Tl}, \tag{1}$$

with the nonlocal initial condition

$$u(x,0) + \lambda u(x,T) + \int_0^T p(\tau)u(x,\tau)d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

and the additional condition

$$u(x_0,t) = h(t), \tag{4}$$

here $\lambda \geq 0$ is a given number greater than zero, $\varphi(x), p(t)(p(t) \geq 0, t \in [0,T]), h(t)$ are given functions of $x \in [0,l]$ and $t \in [0,T]$.

In the direct problem, for given numbers $l, T, \lambda$ and sufficiently smooth functions $k(t), \varphi(x)$, it required to find a function $u(x,t) \in C^{2,1}(D_T)$ satisfying nonlocal initial-boundary problem (1)-(3) for $(x,t) \in D_T$.

Let $C^m(0;l)$ be the class of $m$ times continuously differentiable with all derivatives up to the $m-$th order (inclusive) in $(0;l)$ functions. In the case $m = 0$ this space coincides with the class of continuous functions. $C^{m,k}(D_T)$ is the class of $m$ times continuously differentiable with respect to $x$ and $k$ times continuously differentiable with respect to $t$ all derivatives in the domain $D_T$ functions.

## 2. Investigation of the direct problem

The solution of equation (1) with the nonlocal initial condition (2) and the boundary conditions (3) satisfies the relation

$$\begin{gathered} u(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\beta) \int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta - \\ -\lambda \int_0^T \int_0^l G_0(x,\xi,t+T-\beta) \int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta - \\ -\int_0^T \int_0^\mu \int_0^l p(\mu)G_0(x,\xi,t+\mu-\beta) \int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta d\mu, \end{gathered} \tag{5}$$

where

$$\Phi(x,t) = \int_0^l \varphi(\xi)G_0(x,\xi,t)d\xi,$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} sin\frac{\pi n}{l}\xi sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$G_0(x,\xi,t) = \frac{2}{l(1+\lambda e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 T} + \int_0^T p(\tau)e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 \tau}d\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} sin\frac{\pi n}{l}\xi sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Now we write property of Green function which will be needed in the future.

**Remark 2.1.** *The integral of the Green function does not exceed 1:*

$$\int_0^l G_0(x,\xi,t)d\xi \leq \int_0^l G(x,\xi,t)d\xi \leq 1, x \in (0,l), t \in (0,T].$$

Denote the operator taking the function $u(x,t)$ to the right-hand side of (5) by A. Then (5) is written as the operator equation

$$u = Au, \tag{6}$$

Consider the functional space of function $u(x,t) \in C(D_T)$ with the norm given by the relation

$$\Phi_0 = \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |\Phi(x,t)|, \quad k_0 = \max_{t\in[0,T]} |k(t)|, \quad p_0 = \max_{t\in[0,T]} |p(t)|,$$

let $\Lambda(\Phi,\Phi_0)=\{u:\|u-\Phi\|\le\Phi_0\}$. Obviously, $\|u\|\le 2\Phi_0$ for $u(x,t)\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$. We use the Banach principle to prove the existence and uniqueness of solution to the operator equation (6).

**Lemma 2.1.** *Suppose that the following conditions are satisfied: $\varphi(x)\in C[0,l]$, $\{p(t),k(t)\}\in C[0,T], p(t)\ge 0, \varphi(0)=\varphi(l)=0$. Then for all $u(x,t)\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$ and*

$$0<T\le T_1, \tag{7}$$

*the solution to the operator equation (6) in the class $C^{2,1}(D_T)$ exists and unique, where $T_1$ is a positive root of the equation*

$$p_0k_0T^3+3(1+\lambda)k_0T^2-3=0.$$

Then there exists a classical solution of problem (1)-(3) in the space $C^{2,1}(D_T)$.

Proof. Let us prove that for suitable T the operator A maps the ball $\Lambda(\Phi,\Phi_0)$ into itself; i.e., the condition $u\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$ implies that $Au\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$. For this, we have

$$\|Au-\Phi\|=\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\|Au-\Phi\|\le\Big|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta\Big|+$$

$$+\Big|\lambda\int_0^T\int_0^l G_0(x,\xi,t+T-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta\Big|+$$

$$+\Big|\int_0^T\int_0^\mu\int_0^l p(\mu)G_0(x,\xi,t+\mu-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)u(\xi,\tau)d\tau d\xi d\beta d\mu\Big|\le k_0\parallel u\parallel\frac{T^2}{2}(1+\lambda+\frac{p_0T}{3})\le$$

$$\le k_0\Phi_0T^2(1+\lambda+\frac{p_0T}{3})$$

If T satisfy the condition $p_0k_0T^3+3(1+\lambda)k_0T^2-3=0$, then $Lu\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$. Now we check the second condition of a fixed point argument. Let $u_1,u_2\in\Lambda(\Phi,\Phi_0)$, then we get

$$\|Au_1-Au_2\|\le\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\Big|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)(u_1(\xi,\tau)-u_2(\xi,\tau))d\tau d\xi d\beta\Big|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\Big|\lambda\int_0^T\int_0^l G_0(x,\xi,t+T-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)(u_1(\xi,\tau)-u_2(\xi,\tau))d\tau d\xi d\beta\Big|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\Big|\int_0^T\int_0^\mu\int_0^l p(\mu)G_0(x,\xi,t+\mu-\beta)\int_0^\beta k(\beta-\tau)(u_1(\xi,\tau)-u_2(\xi,\tau))d\tau d\xi d\beta d\mu\Big|\le$$

$$\le k_0\frac{T^2}{2}(1+\lambda+\frac{p_0T}{3})\|u_1-u_2\|.$$

Therefore, if the number $T$ is small enough to satisfy the condition $k_0p_0T^3+3(1+\lambda)k_0T^2-6=0$, then A is a contraction operator on $\Lambda(\Phi,\Phi_0)$. Then by the Banach principle, equation (1) has a unique solution in $\Lambda(\Phi,\Phi_0)$. The proof of the lemma is complete. □

## 3. Classical solvability of inverse problem

In this section we consider the problem of simultaneously determining the functions $u(x,t)$, $k(t)$ from the integro-differential equation (1) with nonlocal initial-boundary condition (2), (3) and additional condition (4).

We introduce the notation

$$\vartheta(x,t)=u_{xx}(x,t), \tag{8}$$

and obtain the following equivalent problem with respect to function $\vartheta(x,t)$:

$$\vartheta_t-\vartheta_{xx}=\int_0^t k(t-\tau)\vartheta(x,\tau)d\tau, \tag{9}$$

$$\vartheta(x,0)+\lambda\vartheta(x,T)+\int_0^T p(\tau)\vartheta(x,\tau)=\varphi''(x),\quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \tag{10}$$

$$\vartheta|_{x=0}=\vartheta|_{x=l}=0, \tag{11}$$

$$\vartheta|_{x=x_0} = h'(t) - \int_0^t k(t-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{12}$$

The problem (9)-(11) is equivalent to the problem of finding the function $\vartheta(x,t)$ from the following integral equation:

$$\vartheta(x,t) = F(x,t) + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{t-\beta} k(\tau)\vartheta(\xi, t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta -$$
$$-\lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x,\xi,\beta) \int_0^{T+t-\beta} k(\tau)\vartheta(\xi, T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta -$$
$$-\int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta)\vartheta(\xi, t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau \tag{13}$$

$$F(x,t) = \int_0^l G_0(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi.$$

Differentiate the integral equation (13) once with respect to the variable $t$:

$$\vartheta_t(x,t) = F_t(x,t) + \lambda \int_0^l G_0(x,\xi,t) \int_0^T k(\tau)\vartheta(\xi, T-\tau)d\tau d\xi -$$
$$-\lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{T+t-\beta} k(\tau)\vartheta_t(\xi, T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta -$$
$$-\lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x,\xi,\beta)k(T+t-\beta)v(\xi,0)d\xi d\beta +$$
$$+\int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta)k(t-\beta)v(\xi,0)d\xi d\beta +$$
$$+\int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{t-\beta} k(\tau)\vartheta_t(\xi, t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\tau +$$
$$+\int_0^T p(\tau) \int_0^l G_0(x,\xi,t) \int_0^\tau k(\beta)\vartheta(\xi, \tau-\beta)d\beta d\xi d\tau -$$
$$-\int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha)k(t+\tau-\alpha)\vartheta(\xi,0)d\xi d\alpha d\tau -$$
$$\int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta)\vartheta_t(\xi, t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau \tag{14}$$

We calculate the derivative $F_t(x,t)$, using the relation

$$G_{0t}(x,\xi,t) = G_{0\xi\xi}(x,\xi,t).$$

Integrating by parts, using matching conditions $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ , we find that

$$F_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big( \int_0^l G_0(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi \Big) =$$
$$= \int_0^l G_{0\xi\xi}(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi = \int_0^l G_0(x,\xi,t)\varphi^{(4)}(\xi)d\xi.$$

Taking into account the last equalities and condition (12), from (14), we obtain the integral equation for the unknown function $k(t)$ as follows:

$$k(t) = \frac{h''(t)}{h(0)} - \frac{F_t(x_0,t)}{h(0)} - \frac{1}{h(0)} \int_0^t k(\tau)h'(t-\tau)d\tau -$$

$$-\frac{\lambda}{h(0)}\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^T k(\tau)\vartheta(\xi,T-\tau)d\tau d\xi+$$

$$+\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta} k(\tau)\vartheta_t(\xi,T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta+$$

$$+\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\beta)k(T+t-\beta)v(\xi,0)d\xi d\beta-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)k(t-\beta)v(\xi,0)d\xi d\beta-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta} k(\tau)\vartheta_t(\xi,t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^\tau k(\beta)\vartheta(\xi,\tau-\beta)d\beta d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)k(t+\tau-\alpha)\vartheta(\xi,0)d\xi d\alpha d\tau+$$

$$+\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha} k(\beta)\vartheta_t(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau. \tag{15}$$

We represent the system of equations (13)-(15) in the form

$$g = Ag, \tag{16}$$

where

$$g=(g_1,\ g_2,g_3)=(\vartheta(x,t),\vartheta_t(x,t),\ k(t))$$

is the vector-function.

$A=(A_1,\ \ A_2,\ \ A_3)$ is defined by the right sides of equations (13)-(15):

$$A_1g = g_{01}+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta} g_3(\tau)g_1(\xi,t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta-$$

$$-\lambda\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau)g_1(\xi,T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta-$$

$$-\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta)g_1(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau,$$

$$A_2g = g_{02}+\lambda\int_0^l G_0(x,\xi,t)\int_0^T g_3(\tau)g_1(\xi,T-\tau)d\tau d\xi-$$

$$-\lambda\int_t^{T+t}\int_0^l G(x,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta-$$

$$-\lambda\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x,\xi,\beta)g_3(T+t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,\beta)g_3(t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^T p(\tau)\int_0^l G_0(x,\xi,t)\int_0^\tau g_3(\beta)g_1(\xi,\tau-\beta)d\beta d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x,\xi,\alpha)g_3(t+\tau-\alpha)g_1(\xi,0)d\xi d\alpha d\tau-$$

$$-\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta)g_2(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau,$$

$$A_3 g = g_{03} - \frac{1}{h(0)}\int_0^t g_3(\tau)h'(t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\lambda}{h(0)}\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^T g_3(\tau)g_1(\xi,T-\tau)d\tau d\xi+$$

$$+\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta+$$

$$+\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\beta)g_3(T+t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)g_3(t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^\tau g_3(\beta)g_1(\xi,\tau-\beta)d\beta d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)g_3(t+\tau-\alpha)g_1(\xi,0)d\xi d\alpha d\tau+$$

$$+\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta)g_2(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau$$

The following notations were introduced in the equalities (13)-(15):

$$g_0(t,x) = (g_{01}(t,x),\;\; g_{02}(t,x),\;\; g_{03}(t)) = (F(x,t),\;\; F_t(x,t), \frac{h''(t)}{h(0)} - \frac{F_t(x_0,t)}{h(0)}).$$

**Theorem 3.1.** *Let conditions $\varphi(x)\in C^4[0,l]$, $p(t)\in C[0,T]$, $p(t)\geq 0$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $h(0)\neq 0$, $\lambda\geq 0$, be satisfied. Then there exists sufficiently small numbers $T^*\in(0,T)$ that the solution to the integral equations (13)-(15) in the class of functions $\vartheta(x,t)\in C^{2,1}(D_{T^*})$, $k(t)\in C[0;T^*]$ exist and unique, where $D_{T^*}=\{(x,t)|x\in(0,l^*), t\in(0,T^*]\}$.*

Proof. We introduce the notations

$$\varphi_0 := \|\varphi\|_{C^4[0,l]}, \qquad h_0 := \|h\|_{C^2[0,T]}.$$

We define for the unknown vector-function $g(x,t)\in C(D_T)$ the following norm:

$$\|g\| = \max\left\{\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_1(x,t)|,\; \max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_2(x,t)|,\; \max_{t\in[0,T]}|g_3(t)|\right\}$$

besides,

$$\|g_0\| = \max\left\{\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_{01}(x,t)|,\; \max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_{02}(x,t)|,\; \max_{t\in[0,T]}|g_{03}(t)|\right\},$$

where

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_{01}(x,t)| \leq \max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\int_0^l G_0(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi\right| \leq \varphi_0,$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}|g_{02}(x,t)| \leq \max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\int_0^l G_0(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi\right| \leq \varphi_0,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|g_{03}(t)| \leq \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{h''(t)}{h(0)}\right| \leq \frac{h_0}{h(0)}.$$

Denote by $S(g_0, \|g_0\|)$ the ball of vector-functions $g$ with center at the point $g_0$ and radius $\|g_0\| > 0$, i.e. $S(g_0, \rho) = \{g : \|g - g_0\| \leq \|g_0\|\}$.

Obviously, $\|g\| \leq 2\|g_0\|$ for $g(x,t) \in S(g_0, \|g_0\|)$. We prove that the operator $A$ is contracting in the Banach space $S(g_0, \|g_0\|)$ if the number $T$ will be chosen in suitable way.

Now we check the first condition of contractive mapping [[19], pp. 87-97] for operator $A$ .

Let $g(x,t)$ be an element of $S(g_0, \|g_0\|)$ i.e. $S(g_0, \|g_0\|)$. Then for $(x,t) \in D_T$ we have

$$\|A_1 g - g_{01}\| = \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} |(A_1 g - g_{01})| \leq$$

$$\leq \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{t-\beta} g_3(\tau) g_1(\xi, t-\beta-\tau) d\tau d\xi d\beta \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x,\xi,\beta) \int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau) g_1(\xi, T+t-\beta-\tau) d\tau d\xi d\beta \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta) g_1(\xi, t+\tau-\alpha-\beta) d\beta d\xi d\alpha d\tau \Big| \leq$$

$$\leq 2(1+\lambda) T^2 \|g_0\|^2 + \frac{2p_0}{3} T^3 \|g_0\|^2;$$

It follows that if

$$0 < T \leq T_1,$$

where $T_1$ is a positive root of the equation

.

$$\|A_2 g - g_{02}\| = \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} |(A_2 g - g_{02})| \leq$$

$$\leq \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \lambda \int_0^l G_0(x,\xi,t) \int_0^T g_3(\tau) g_1(\xi, T-\tau) d\tau d\xi \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau) g_2(\xi, T+t-\beta-\tau) d\tau d\xi d\beta \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \lambda \int_t^{T+t} \int_0^l G_0(x,\xi,\beta) g_3(T+t-\beta) g_1(\xi, 0) d\xi d\beta \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta) g_3(t-\beta) g_1(\xi, 0) d\xi d\beta \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,\beta) \int_0^{t-\beta} g_3(\tau) g_2(\xi, t-\beta-\tau) d\tau d\xi d\tau \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^T p(\tau) \int_0^l G_0(x,\xi,t) \int_0^{\tau} g_3(\beta) g_1(\xi, \tau-\beta) d\beta d\xi d\tau \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha) g_3(t+\tau-\alpha) g_1(\xi, 0) d\xi d\alpha d\tau \Big| +$$

$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \Big| \int_0^T p(\tau) \int_t^{t+\tau} \int_0^l G_0(x,\xi,\alpha) \int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta) g_2(\xi, t+\tau-\alpha-\beta) d\beta d\xi d\alpha d\tau \Big| \leq$$

$$\leq 4(1+2\lambda) T \|g_0\|^2 + 2(\lambda + 2p_0 + 1) T^2 \|g_0\|^2 + \frac{2p_0}{3} T^3 \|g_0\|^2;$$

It follows that if

$$0 < T \leq T_2$$

where $T_2$ is a positive root of the equation

$$\|A_3 g - g_{03}\| = \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} |(A_3 g - g_{03})| \leq$$

$$\leq \max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^t g_3(\tau)h'(t-\tau)d\tau\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{\lambda}{h(0)}\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^T g_3(\tau)g_1(\xi,T-\tau)d\tau d\xi\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,T+t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\beta\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{\lambda}{h(0)}\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\beta)g_3(T+t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)g_3(t-\beta)g_1(\xi,0)d\xi d\beta\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^t\int_0^l G(x_0,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta} g_3(\tau)g_2(\xi,t-\beta-\tau)d\tau d\xi d\tau\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_0^l G_0(x_0,\xi,t)\int_0^{\tau} g_3(\beta)g_1(\xi,\tau-\beta)d\beta d\xi d\tau\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)g_3(t+\tau-\alpha)g_1(\xi,0)d\xi d\alpha d\tau\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{1}{h(0)}\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x_0,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha} g_3(\beta)g_2(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)d\beta d\xi d\alpha d\tau\right|\leq$$

$$\leq \frac{2(h_0\|g_0\|+4\lambda\|g_0\|^2+2\|g_0\|^2)}{h(0)}T+\frac{2(\|g_0\|^2+\lambda\|g_0\|^2+2p_0\|g_0\|^2)}{h(0)}T^2+\frac{2p_0\|g_0\|^2}{3h(0)}T^3;$$

Therefore, $Ag\in S(g_0,\|g_0\|)$ if $T$ satisfies the conditions

$$2(1+\lambda)T^2\|g_0\|+\frac{2p_0}{3}T^3\|g_0\|\leq 1,$$

$$4(1+2\lambda)T\|g_0\|+2(\lambda+2p_0+1)T^2\|g_0\|+\frac{2p_0}{3}T^3\|g_0\|\leq 1, \tag{17}$$

$$\frac{2(h_0+4\lambda\|g_0\|+2\|g_0\|)}{h(0)}T+\frac{2\|g_0\|(1+\lambda 2p_0)}{h(0)}T^2+\frac{2p_0\|g_0\|}{3h(0)}T^3\leq 1.$$

Now consider two functions $g^1$ and $g^2$ belonging to the ball $S$ and estimate the distance between their images $Ag^1$ and $Ag^2$ in the space $C$.

$$\|(Ag^1-Ag^2)_1\|=$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,\beta)\int_0^{t-\beta}[g_3^1(\tau)g_1^1(\xi,t-\beta-\tau)-g_3^2(\tau)g_1^2(\xi,t-\beta-\tau)]d\tau d\xi d\beta\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\lambda\int_t^{T+t}\int_0^l G_0(x,\xi,\beta)\int_0^{T+t-\beta}[g_3^1(\tau)g_1^1(\xi,T+t-\beta-\tau)-g_3^2(\tau)g_1^2(\xi,T+t-\beta-\tau)]d\tau d\xi d\beta\right|+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\int_0^T p(\tau)\int_t^{t+\tau}\int_0^l G_0(x,\xi,\alpha)\int_0^{t+\tau-\alpha}[g_3^1(\beta)g_1^1(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)-g_3^2(\beta)g_1^2(\xi,t+\tau-\alpha-\beta)]d\beta d\xi d\alpha d\tau\right|.$$

The sub-integral expression in the second integral can be estimated as follows:

$$\left\|g_2^1g_1^1-g_2^2g_1^2\right\|=\left\|(g_2^1-g_2^2)g_1^1+g_2^2(g_1^1-g_1^2)\right\|\leq$$

$$\leq 2\left\|g^1-g^2\right\|\max\left(\left\|g_1^1\right\|,\left\|g_2^2\right\|\right)\leq 4\left\|g_0\right\|\left\|g^1-g^2\right\|.$$

Therefore,

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_1\| \leq (2(1+\lambda)T^2 + \frac{2p_0}{3}T^3)\|g_0\|\|g^1 - g^2\|.$$

The next components can be estimated in a similar way,

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_2\| \leq \Big(4(1+2\lambda)T + 2(\lambda + 2p_0 + 1)T^2 + \frac{2p_0}{3}T^3\Big)\|g_0\|\|g^1 - g^2\|,$$

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_3\| \leq \Big(\frac{2(h_0 + 4\lambda\|g_0\| + 2\|g_0\|)}{h(0)}T + \frac{2\|g_0\|(1+\lambda 2p_0)}{h(0)}T^2 + \frac{2p_0\|g_0\|}{3h(0)}T^3\Big)\|g^1 - g^2\|.$$

Consequently, $\|(Ag^1 - Ag^2)\| \leq \rho\|g^1 - g^2\|$, where $\rho < 1$ provided that $T$ satisfies the condition

$$-2(1+\lambda)T^2\|g_0\| + \frac{2p_0}{3}T^3\|g_0\| \leq 1,$$

$$4(1+2\lambda)T\|g_0\| + 2(\lambda + 2p_0 + 1)T^2\|g_0\| + \frac{2p_0}{3}T^3\|g_0\| \leq 1, \tag{18}$$

$$\frac{2(h_0 + 4\lambda\|g_0\| + 2\|g_0\|)}{h(0)}T + \frac{2\|g_0\|(1+\lambda 2p_0)}{h(0)}T^2 + \frac{2p_0\|g_0\|}{3h(0)}T^3 \leq 1.$$

Therefore, if the number $T$ is small enough to ensure that conditions (17) and (18) are satisfied, then $A$ is a contraction operator on $S(g_0, \|g_0\|)$. Then, by the Banach principle, equation $g = Ag$ has a unique solution in $S(g_0, \|g_0\|)$.

The proof of the theorem is complete. □

By found function $k(t)$, the function $u(x,t)$ is determined as a solution to integral equation (13) (see Section 2). Thus, the solution of the inverse problem (1)-(4) exists and is unique in the class of functions $u(x,t) \in C^{4,1}(D_T), k(t) \in C[0,T]$, where $T$ satisfies inequalities (7), (17), (18).

## Conclusions

In this work,the solvability of a nonlinear inverse problem for integro-differential heat equation with nonlocal conditions was studied. Firstly we investigated- solvability direct problem. Therefor (1)-(3) problem replaced equivalent of integral equation by Fourier method. Then used to Banach principle, existence and uniquness lemma of direct problem solution is proven. The inverse problem was considered for determining the kernel $k(t)$ included in the equation (1) with integral observation (4) of the solution of this system with the initial and boundary conditions (2), (3). Conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem have unique solutions for a sufficiently small interval.

# References


1. Nakhushev A. M. Equations of mathematical biology (in Russian). 1995. Moscow: Visshaya Shkola.

2. Aliev Z.S, Mehraliev Y. T. An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with nonclassical boundary conditions. Dokl. Math.2014. Vol. 90. Issue 1. pp. 513 - 517.

3. Kozhanov A.I. Pul'kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. Differ. Equ.2006. Vol 42. Issue 9. pp. 1166 - 1179.

4. Pul'kina L. S. Savenkova A. E. A problem with a nonlocal with respect to time condition for multidimensional hyperbolic equations. Russian Mathematics 2016. Vol. 60. Issue 10. pp. 33-43.

5. Pulkina L. S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. Russian Mathematics.2012. Vol. 56. Issue 4. pp. 62-69.

6. Azizbayov E. I. Mehraliyev Y. T. Solvability of nonlocal inverse boundary-value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions. Electron. J. Differential Equations. 2017. Vol. 2017. Issue 125. pp. 1-14.

7. Gordeziani D. G. Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations (in Russian). Mat. Model. 2000. Vol. 12. Issue 1. pp. 94-103.

8. Huzyk N. M. Nonlocal inverse problem for a parabolic equation with degeneration. Ukrainian Mathematical Journal.2013. Vol. 65. Issue 6. pp. 847-863.

9. Taki-Eddine O, Abdelfatah B. An Inverse Coefficient Problem for a Parabolic Equation under Nonlocal Boundary and Integral Overdetermination Conditions. International Journal of Partial Differential Equations and Applications. 2014. Vol. 2, Issue 3. pp. 38-43.

10. Hazanee A, Lesnic D, Ismailov M. I, Kerimov N. B. Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions, Applied Mathematics and Computation, Vol. 346. pp. 800-815.

11. Ismailov M.I, Inverse Source Problem for Heat Equation with Nonlocal Wentzell Boundary Condition, Results Mathematics. 2018. Vol. 73. Issue 2. Article number: 68. DOI: https://doi.org/10.1007/s00025-018-0829-2

12. Azizbayov E. I. The nonlocal inverse problem of the identification of the lowest coefficient and the right-hand side in a second-order parabolic equation with integral conditions. Boundary Value Problems. 2019. Vol. 11. pp. 1-19.

13. Durdiev D.K. Zhumaev Zh.Zh. Problem of determining the thermal memory of a conducting medium. Differential Equations. 2020. Vol. 56. Issue 6. pp. 785–796.

14. Durdiev D.K. Nuriddinov Z.Z. Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation. Journal of Siberian Federal University - Mathematics and Physics. 2021. Vol. 14. Issue 1. pp. 117-127.

15. Durdiev D.K, Zhumaev Zh.Zh. Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation. Methods of Functional Analysis and Topology. 2019. Vol. 25. Issue 3. pp. 219–226.

16. Durdiev D.K. On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.2015. Vol. 19. Issue 4. pp. 658–666.

17. Durdiev D.K, Rashidov A.Sh. Inverse problem of determining the kernel in an integro-differential equation of parabolic type.Differential Equations.2014. Vol. 50. Issue 1. pp. 110–116.

18. Kilbas A.A. Integral equations: course of lectures. 2005. Minsk: BSU.(In Russian)

19. Kolmogorov A.N, Fomin S.V. Elements of function theory and functional analysis. 1972. Moscow: Nauka (In Russian)

20. Trenogin V.A. Funktsionalnyi analiz (Functional Analysis).2002. Moscow: Izd. Tsentr Akademiya.

### Nolokal shartli integro-differensial parabolik tipdagi tenglamadan yadroni aniqlashning teskari masalasi

**Jumayev Jonibek, Atoyev Dilshod**

Ushbu maqolada, nolokal boshlang'ich-chegaraviy va qo'shimcha shartli integro-differensial issiqlik tarqalish tenglamasidan yadroni aniqlashning teskari masalasi o'rganilgan. To'g'ri masalaning bir qiymatli yechiluvchanligi Furye usuli va Banax prinsipi yordamida isbotlangan. Teskari masalani tadqiq qilish uchun dastlab qo'yilgan masalaga ekvivalent bo'lgan yordamchi olingan. So'ngra Furye usulidan foydalanib, masala noma'lum funksiyalarga nisbatan ekvivalent bo'lgan yopiq integral tenglamalar sistemasiga keltirilgan. Ushbu integral tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema qisqartirib akslantirishlar prinsipi yordamida isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** integro-differensial tenglama; nolokal boshlang'ich-chegaraviy masala; teskari masala; integral tenglama; Banax prinsipi.

### Обратная задача определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа с нелокальным условием

**Жумаев Жонибек, Атоев Дилшод**

В данной работе исследуется обратная задача определения ядра из интегро-дифференциального уравнения диффузии тепла с нелокальной начальной границей и дополнительным условным условием. Разрешимость прямой задачи доказывается методом Фурье и принципом Банаха. Для исследования обратной задачи получена вспомогательная, эквивалентная исходной задаче. Затем методом Фурье задача сводится к системе замкнутых интегральных уравнений, эквивалентных неизвестным функциям. Доказана теорема о существовании и единственности решения этой системы интегральных уравнений с использованием принципа сжимающего отображения. Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нелокальная начально-краевая задача, обратная задача, интегральное уравнение, принцип Банаха.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение; нелокальная начально-краевая задача; обратная задача; интегральное уравнение; принцип Банаха.

**Received: 31/07/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

Cite this article Jumayev J., Atoyev D. Inverse problem of determining the kernel in an integro - differential equation of parabolic type with nonlocal condition. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 46-56

# Limit properties of the total progeny in the positive recurrent Q-processes with a finite second moment

**Nazarov Zuhriddin**
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
University of Management and Future Technologies,
Tashkent, Uzbekistan
zuhrov13@gmail.com

## Abstract

We examine the population growth system called Q-processes. This is defined by the Galton-Watson Branching system conditioned on non-extinction of its trajectory in the remote future. In this paper we observe the total progeny up to time $n$ in the Q-process. By analogy with branching systems, this variable is of great interest in studying the deep properties of the Q-process. We find that the sum total progeny as a random variable approximates the standard normal distribution function under the third moment assumption for the initial Galton-Watson system offspring law.

**Keywords:** Branching system; Q-process; Markov chain; generating function; transition probabilities; invariant distribution; extinction time; total progeny; positive recurrent; central limit theorem; law of large numbers.

**MSC 2020:** 60J80, 60J85

## 1. Introduction and main results

In the general theory of random processes models of stochastic branching systems are particularly important. Nowadays, there is great interest in these models. The creation of the theory of branching models is related to the possibility of estimating the survival probability of the population of monotypic individuals. The discrete-time simple branching process model was introduced by Francis Galton in 1889 as a mathematical model for the population family growth is now called the Galton-Watson Branching (GWB) system; see [1], [2], [3], [8], [9], [10] and [13]. GWB models play a fundamental role in both the theory and applications of stochastic processes. Among the random trajectories of branching systems, there are those that continue a long time. In the case of the GWB model, the class of such trajectories forms another stochastic model called Q-process; see [2] and [5]. In the case of continuous-time Markov branching systems, an analogous model called the *Markov Q-process*, was first introduced in [4].

Let $\{Z(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ be GWB system with branching rates $\{p_k, k \in \mathbb{N}_0\}$, where $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. The variable $Z(n)$ denotes the population size at the moment $n$ in the system. The evolution of the system occurs according to the following mechanism. Each individual lives a unit length lifetime and then gives $k \in \mathbb{N}_0$ descendants with probability $p_k$. This system is a reducible, homogeneous-discrete-time Markov chain with a state space consisting of two classes: $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\{0\}$ is absorbing state, and $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ is the class of possible essential communicating states. Throughout the paper we assume that $p_0 > 0$ and $p_0 + p_1 > 0$ which called the Schröder case. We suppose that $p_0 + p_1 < 1$ and

$$m := \sum_{k \in \mathcal{S}} k p_k < \infty.$$

Considering transition probabilities

$$P_{ij}(n) := \mathsf{P}\left\{Z(n+k) = j \;\middle|\; Z(k) = i\right\} \qquad \text{for any} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

we observe that the corresponding probability generating function (GF)

$$\sum_{k\in\mathcal{S}_0} P_{ij}(n)s^k = \left[f_n(s)\right]^i, \tag{1}$$

where

$$f_n(s) := \sum_{k\in\mathcal{S}_0} \mathsf{p}_k(n)s^k,$$

therein $\mathsf{p}_k(n) := P_{1k}(n)$ and, $f_n(s)$ is $n$-fold iteration of the offspring GF $f(s) := \sum_{k\in\mathcal{S}_0} p_k s^k$. Needless to say that $f_n(0) = \mathsf{p}_0(n)$ is a vanishing probability of the system initiated by single individual. Note that $\{\mathsf{p}_0(n)\}$ is monotone and tends to $q$ as $n \to \infty$, which called an extinction probability of the system, i.e. $\lim_{n\to\infty} \mathsf{p}_0(n) = q$. It is known that the extinction probability

- $q = 1 \quad \text{if} \quad m \le 1;$
- $q < 1 \quad \text{if} \quad m > 1.$

Based on this, according to the values of the parameter $m$, the system is called

- *sub-critical* if $m < 1$;
- *critical* if $m = 1$;
- *super-critical* if $m > 1$;

see [2], [3], [13].

Further we are dealing with the GWB system conditioned on the event $\{n < \mathcal{H} < \infty\}$, where $\mathcal{H}$ is the extinction time, i.e. $\mathcal{H} := \min\{n \in \mathbb{N} : Z(n) = 0\}$. Let $\mathsf{P}_i\{*\} := \mathsf{P}\left\{* \,\middle|\, Z(0) = i\right\}$ and define conditioned probability measure

$$\mathsf{P}_i^{\mathcal{H}(n+k)}\{*\} := \mathsf{P}_i\left\{* \,\middle|\, n+k < \mathcal{H} < \infty\right\} \qquad \text{for any} \quad k \in \mathbb{N}.$$

In [2, p. 58] proved, that

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_i^{\mathcal{H}(n+k)}\{Z(n) = j\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^n} P_{ij}(n) =: \mathcal{Q}_{ij}(n), \tag{2}$$

where $\beta := f'(q)$. Observe that $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{Q}_{ij}(n) = 1$ for each $i \in \mathbb{N}$. Thus, the probability measure $\mathcal{Q}_{ij}(n)$ can determine a new population growth system with the state space $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ which we denote by $\{W(n), n \in \mathbb{N}_0\}$. This is a discrete-homogeneous-time irreducible Markov chain and called *the Q-process*; see [2, p. 58]. Undoubtedly $W(0) \overset{d}{=} Z(0)$ and transition probabilities

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) = \mathsf{P}\left\{W(n) = j \,\middle|\, W(0) = i\right\} = \mathsf{P}_i\left\{Z(n) = j \,\middle|\, \mathcal{H} = \infty\right\},$$

so that the Q-process can be interpreted as a "long-living" GWB system.

Put into consideration a GF

$$w_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{E}} \mathcal{Q}_{ij}(n)s^j.$$

Then from (1) and (2) we obtain

$$w_n^{(i)}(s) = \left[\frac{f_n(qs)}{q}\right]^{i-1} \cdot w_n(s), \tag{3}$$

where the GF $w_n(s) := w_n^{(1)}(s) = \mathsf{E}\left[s^{W(n)} \,\middle|\, W(0) = 1\right]$ has a form of

$$w_n(s) = s\frac{f_n'(qs)}{\beta^n} \qquad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Using iterations for $f(s)$ in (3) leads to the following functional equation:

$$w_{n+1}^{(i)}(s) = \frac{w(s)}{f_q(s)} w_n^{(i)}\big(f_q(s)\big), \tag{5}$$

where $w(s) := w_1(s)$ and $f_q(s) = f(qs)/q$. Thus, Q-process is completely defined by setting the GF

$$w(s) = s\frac{f'(qs)}{\beta}. \tag{6}$$

An evolution of the Q-process is in essentially regulated by the structural parameter $\beta > 0$. In fact, as it has been shown in [2, p. 59, Theorem 2], that

- $\mathcal{E}$ *is positive recurrent* if $\beta < 1$;
- $\mathcal{E}$ *is transient* if $\beta = 1$.

On the other hand, it is easy to be convinced that positive recurrent case $\beta < 1$ of Q-process is in a definition character of the non-critical case $m \neq 1$ of the initial GWB system. Note that $\beta \le 1$ and nothing but.

It is obvious, that when initial GWB system is sub-critical, then the condition $w'(1-) < \infty$ is equivalent to that $f''(1-) < \infty$. Further we everywhere will be accompanied by this condition by default. Then differentiating (6) on the point $s = 1$ we obtain $\mathsf{E}W(1) = w'(1-) = 1 + B_q\big(1 - \beta\big)$, where

$$B_q := \frac{b_q}{\beta\,(1-\beta)},$$

and $b_q := f_q''(1) = qf''(q)$. It follows from (3) and (4) that

$$\mathsf{E}_i W(n) := \mathsf{E}\Big[W(n)\;\Big|\;W(0) = i\Big] = (i-1)\,\beta^n + \mathsf{E}W(n),$$

where $\mathsf{E}W(n) = 1 + B_q\big(1 - \beta^n\big)$.

Our purpose is to investigate asymptotic properties of a random variable

$$S_n = W(0) + W(1) + \cdots + W(n-1),$$

denoting the total number of individuals that have existed up to the $n$-th generation in the Q-process. By analogy with branching systems, this variable is of great interest in studying the deep properties of the Q-process. We refer the readers to [9], [10], [11], [12] for details on total progeny in GWB systems and related model results.

Our main results are analogues of Central Limit Theorem and Law of Large Numbers for $S_n$. Let $\mathcal{N}(0,1)$ be a normal distributed random variable with the zero mean and the finite variance 1 and $\Phi_{0,1}(x)$ is its distribution function.

In this paper we deal with the positive recurrent case assuming that second moment $w''(1-)$ be finite, i.e.

$$\beta < 1 \qquad \text{and} \qquad w''(1-) < \infty. \tag{A}$$

Also in this case, the condition $w''(1-) < \infty$ is equivalent to $f'''(1-) < \infty$.

**Theorem 1.1.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{S_n}{n} < t\right\} = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad t \le 1 + B_q, \\ 1, & \text{if} \quad t > 1 + B_q. \end{cases}$$

Let

$$\Psi := 1 + 3B_q + \frac{\mathcal{J}_q}{\beta} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J}_q := \frac{1}{(1-\beta)^2}\left(\frac{2\beta(1-\beta) + b_q}{1-\beta}b_q + c_q\right),$$

where $c_q := f_q'''(1)$.

**Theorem 1.2.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\Psi n}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{as} \quad n \to \infty,$$

*where the symbol "$\xrightarrow{\mathsf{P}}$" means the convergence in distribution.*

The rest of this paper is organized as follows. The next section provides auxiliary statements that will be essentially used in the proof of our theorems. Section 3 is devoted to the proof of Theorems.

## 2. Preliminaries and Auxiliary Lemmas

Now we define the sum $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_q(k)$, which is a total progeny of individuals that participated in the evolution of the system $\{Z_q(n), n \in \mathbb{N}\}$, up to the $n$-th generation and an appropriate random variable $V = \lim_{n\to\infty} V_n$, which means the total number of individuals involved in the whole evolution of the system. Then the results from [6, p. 5, Remark 1] implies that

$$h(x) := \mathsf{E}x^V = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}x^{V_n}$$

and it satisfies the functional equation

$$h(x) = xf_q\big(h(x)\big). \tag{7}$$

Let

$$\Delta_n(x) := h(x) - h_n(x),$$

where $h_n(x) = \mathsf{E}x^{V_n}$ which satisfies a recurrence equation

$$h_{n+1}(x) = xf_q\big(h_n(x)\big).$$

Further we need the joint GF of the variables $W(n)$ and $S_n$

$$T_n(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{P}\left\{S_n = k\right\} x^k$$

on a domain $x \in [0, 1]$. It was proved in [7] that

$$T_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} u_k(x), \tag{8}$$

where

$$u_n(x) = \frac{xf_q'\big(h_n(x)\big)}{\beta}.$$

In the mentioned work [7], the following important formula was obtained, which we will use in our further discussion:

$$\frac{u^n(x)}{\Delta_n(x)} = \frac{1}{h(x)-1} + \frac{\upsilon(x)\big[1-u^n(x)\big]}{1-u(x)} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x)u^k(x), \tag{9}$$

where

$$u(x) = xf_q'\big(h(x)\big), \qquad \upsilon(x) = x\frac{f_q''\big(h(x)\big)}{2u(x)}$$

and $\sup_{x\in\mathbb{K}}\big|\varepsilon_n(x)\big| \le \varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Since $\partial T_n(x)/\partial x\Big|_{x=1} = \mathsf{E}S_n$, it is not difficult to observe that

$$\mathsf{E}S_n = (1+B_q)n - B_q\frac{1-\beta^n}{1-\beta}. \tag{10}$$

In our further discussion, we will need expansions of the functions $h(x)$ and $u(x)$ in the left neighborhood of the point $x = 1$.

**Lemma 2.1.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\begin{aligned} 1-h(x) \quad \sim \quad & \frac{1}{1-\beta}\cdot(1-x) - \frac{2\beta(1-\beta)+b_q}{(1-\beta)^3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2} \\ + \quad & \left(\frac{6\beta^2}{(1-\beta)^3} + \frac{c_q}{(1-\beta)^2} + \frac{3b_q\left(1+\beta-2\beta^2+b_q\right)}{1-\beta}\right)\cdot\frac{(1-x)^3}{6} \qquad \text{as} \quad x\uparrow 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Proof. We write the Peano's form Taylor expansion for $h(x)$:

$$h(x) = 1 + h'(1-)(x-1) + \frac{h''(1-)}{2}(x-1)^2 + \frac{h'''(1-)}{6}(x-1)^3 + o(x-1)^3 \qquad \text{as} \quad x \uparrow 1. \tag{12}$$

Formula (7) and standard calculations produce that

$$h'(1-) = \frac{1}{1-\beta}, \qquad h''(1-) = \frac{2\beta(1-\beta) + b_q}{(1-\beta)^3}$$

and

$$h'''(1-) = \frac{6\beta^2}{(1-\beta)^3} + \frac{c_q}{(1-\beta)^2} + \frac{3b_q\left(1+\beta-2\beta^2+b_q\right)}{1-\beta}.$$

Substituting these expressions in the expansion (12), entails (11).

The lemma 2.1 is proved. □

Similar arguments can be used to verify the validity of the following lemma.

**Lemma 2.2.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$u(x) = \beta x\big[1 - B_q(1-x)\big] + \mathcal{J}_q \frac{x(1-x)^2}{2} + \varrho(x), \tag{13}$$

*where*

$$\mathcal{J}_q = \frac{1}{(1-\beta)^2}\left(\frac{2\beta(1-\beta)+b_q}{1-\beta} b_q + c_q\right)$$

*and* $\varrho(x) = \mathcal{O}(1-x)^3$ as $x \uparrow 1$.

Proof. Write the Taylor expansion with Lagrange error bound for $f'_q(y)$:

$$f'_q(y) = \beta + f''_q(1)(y-1) + \frac{1}{2} f'''_q(1)(y-1)^2 + r(y),$$

where $r(y) = \mathcal{O}(y-1)^3$ as $y \uparrow 1$. Since $u(x) = x f'_q\big(h(x)\big)$, taking herein $y = h(x)$ and using (11) leads to (13).

The lemma 2.2 is proved. □

The following two lemmas directly follow from Lemma 2.1 and Lemma 2.2 respectively.

**Lemma 2.3.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$h\left(e^{\theta}\right) - 1 \sim h'(1-)\theta + h''(1-)\frac{\theta^2}{2} + \left[3h''(1-) + h'''(1-)\right]\frac{\theta^3}{6} \qquad \text{as} \quad \theta \to 0. \tag{14}$$

**Lemma 2.4.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\frac{u\left(e^{\theta}\right)}{\beta} - 1 = \left(1 + B_q\right)\theta + \Psi\frac{\theta^2}{2} + \rho(\theta), \tag{15}$$

*where* $\rho(\theta) = \mathcal{O}\left(\theta^3\right)$ *as* $\theta \to 0$.

Next lemma follows from combination of (9), (14) and (15).

**Lemma 2.5.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\frac{\Delta_n\left(e^{\theta}\right)}{u^n\left(e^{\theta}\right)} = \mho_q(\theta) + \mathcal{O}\big(\theta^3\big) \qquad \text{as} \quad \theta \to 0 \tag{16}$$

*for any fixed* $n \in \mathbb{N}$, *where*

$$\mho_q(\theta) := \frac{\theta}{1-\beta} + \frac{1-\beta^2+b_q}{2(1-\beta)^3}\theta^2.$$

Now we have the following lemma.

**Lemma 2.6.** *Let the condition* [A] *be satisfied. Then*

$$\ln \prod_{k=0}^{n-1} u_k\left(e^\theta\right) \sim -\left(1-\frac{u\left(e^\theta\right)}{\beta}\right) n-\frac{b_q}{\beta} \mho_q(\theta) \sum_{k=0}^{n-1} u^k\left(e^\theta\right) \quad \text{as} \quad \theta \to 0 \tag{17}$$

*for any fixed $n \in \mathbb{N}$, where $\mho_q(\theta)$ is defined in Lemma 2.5.*

Proof. Using the inequality $\ln(1-y) \geq -y-y^2/(1-y)$, which is valid for $0 \leq y<1$, we have

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=0}^{n-1} u_k\left(e^\theta\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left\{1-\left[1-u_k\left(e^\theta\right)\right]\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[u_k\left(e^\theta\right)-1\right]+\rho_n^{(1)}(\theta)=: \sigma_n(\theta)+\rho_n^{(1)}(\theta), \end{aligned} \tag{18}$$

where

$$\sigma_n(\theta):=-\sum_{k=0}^{n-1}\left[1-u_k\left(e^\theta\right)\right], \tag{19}$$

and

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[1-u_k\left(e^\theta\right)\right]^2}{u_k\left(e^\theta\right)} \leq \rho_n^{(1)}(\theta) \leq 0 .$$

It is easy to see that the sequence of functions $\{h_k(x)\}$ does not decrease in $k \in \mathbb{N}$. Then, by the property of the GF, and the function $u_k\left(e^\theta\right)$ is non-decreasing in $k$, for any fixed $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in \mathbb{R}$. Therefore,

$$\frac{1-u_0\left(e^\theta\right)}{u_0\left(e^\theta\right)} \sigma_n(\theta) \leq \rho_n^{(1)}(\theta) \leq 0 . \tag{20}$$

According to the GF property, we will also verify that under the conditions of our theorem $1-u_0\left(e^\theta\right) \to 0$ as $\theta \to 0$. Then, according to (20), $\rho_n^{(1)}(\theta) \to 0$, if only $\sigma_n(\theta)$ has a finite limit.

Further, using the Taylor formula, we write

$$f_q^{\prime}(t)=f_q^{\prime}\left(t_0\right)+f_q^{\prime \prime}\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)+\left(t-t_0\right) g\left(t ; t_0\right),$$

where $g\left(t ; t_0\right)=\left(t-t_0\right) \cdot f_q^{\prime \prime \prime}(\tau)/2$ and $t_0<\tau<t$. Hence, at $t_0=h(x)$ and $t=h_k(x)$ we write the following relation:

$$u_k(x)=\frac{u(x)}{\beta}-\frac{x f_q^{\prime \prime}(h(x))}{\beta} \Delta_k(x)+\Delta_k(x) g_k(x),$$

where $g_k(x)=x \Delta_k(x) f_q^{\prime \prime \prime}(\tau)/2 \beta$ and $h_k(x)<\tau<h(x)$. Therefore,

$$u_k\left(e^\theta\right)=\frac{u\left(e^\theta\right)}{\beta}-\frac{e^\theta f_q^{\prime \prime}\left(h\left(e^\theta\right)\right)}{\beta} \Delta_k\left(e^\theta\right)+\Delta_k\left(e^\theta\right) g_k\left(e^\theta\right). \tag{21}$$

From (19) and relation (21) it follows that

$$\sigma_n(\theta)=-\left[1-\frac{u\left(e^\theta\right)}{\beta}\right] n-\frac{e^\theta f_q^{\prime \prime}\left(h\left(e^\theta\right)\right)}{\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k\left(e^\theta\right)+\rho_n^{(2)}(\theta), \tag{22}$$

where

$$0 \leq \rho_n^{(2)}(\theta) \leq \Delta_0\left(e^\theta\right) \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(e^\theta\right).$$

In the last step we used the fact that $\left|\Delta_n(x)\right| \leq \beta^n\left|\Delta_0(x)\right|$ which follows from inequality

$$\left|\Delta_n(x)\right| \leq \beta^{n-k}\left|\Delta_k(x)\right| .$$

It follows from (14) that $\Delta_0(e^{\theta}) = \mathcal{O}(\theta)$ as $\theta \to 0$. And also estimate $|\Delta_n(x)| = \mathcal{O}(\beta^n) \to 0$ as $n \to \infty$ implies that $g_k(e^{\theta}) = \mathcal{O}(\beta^k) \to 0$ as $k \to \infty$ and hence the functional series $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(e^{\theta})$ converges for all $\theta \in \mathbb{R}$. Therefore,

$$\Delta_0(e^{\theta}) \sum_{k=0}^{n-1} g_k(e^{\theta}) = \mathcal{O}(\theta) \to 0 \qquad \text{as} \quad \theta \to 0. \tag{23}$$

It follows from this that the remainder term in (22) is

$$\rho_n^{(2)}(\theta) \to 0 \qquad \text{as} \quad \theta \to 0. \tag{24}$$

Assertion (16) implies that

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(e^{\theta}) = \mho_q(\theta) \sum_{k=0}^{n-1} u^k(e^{\theta}) \left(1 + \mathcal{O}(\theta^2)\right) \tag{25}$$

as $\theta \to 0$. Since $f_q''(h(e^{\theta})) \longrightarrow b_q$ as $\theta \to 0$, combining relations (18), (22)–(25) and, after some calculations, we will come to (17).

The lemma 2.6 is proved. □

## 3. Proof of Theorems

Proof of Theorem 1.1. Let us denote $\psi_n(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, the Laplace transform of the distribution of the variable $S_n/n$. According to (8) $\psi_n(\theta) = T_n(\theta_n)$, where $\theta_n = \exp\{-\theta/n\}$. The assertion of the theorem is equivalent to the fact that

$$\psi_n(\theta) \to e^{-\theta(1+B_q)} \qquad \text{as} \quad n \to \infty \tag{26}$$

for any fixed $\theta \in \mathbb{R}_+$. By virtue of Lemma 2.6,

$$\ln \psi_n(\theta) \sim -\left(1 - \frac{u(\theta_n)}{\beta}\right) n - \frac{b_q}{\beta} \mho_q\left(-\frac{\theta}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} u^k(\theta_n) \tag{27}$$

as $n \to \infty$, where $\mho_q(\theta)$ is defined in Lemma 2.5. It follows from (15) that

$$\left(1 - \frac{u(\theta_n)}{\beta}\right) n \sim (1 + B_q)\,\theta - \Psi \frac{\theta^2}{2n} \tag{28}$$

as $n \to \infty$. And the second term in (27), as it is easy to see, has a decreasing order of $\mathcal{O}(1/n)$. By virtue of what has been said, (27) and (28) yield (26).

Theorem 1.1 is proved. □

It should be noted that, in view of relation (25), it will be possible to estimate the rate of convergence

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 + B_q \qquad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Proof of Theorem 1.2. Define a sequence of variables

$$\zeta_n := \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\Psi n}}$$

and then an appropriate characteristic function

$$\varphi_{\zeta_n}(\theta) := \mathsf{E}\left[\exp\{i\theta\zeta_n\}\right] = \mathsf{E}\left[\theta_n^{S_n} \cdot \exp\left\{\frac{-i\theta \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\Psi n}}\right\}\right],$$

where $\theta_n := \exp\left\{i\theta/\sqrt{\Psi n}\right\}$ and $\theta \in \mathbb{R}$. Using (10) we write

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(\theta) \sim -(1 + B_q) \frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}} n + \ln T_n(\theta_n) \quad \textit{as} \quad n \to \infty, \tag{29}$$

where $T_n(x) = \mathsf{E}x^{S_n}$. Simultaneously according to (8) and Lemma 2.6,

$$\ln T_n(\theta_n) \sim -\left(1 - \frac{u(\theta_n)}{\beta}\right) n - \frac{b_q}{\beta} \mho_q \left(\frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}}\right) \sum_{k=0}^{n-1} u^k(\theta_n) \tag{30}$$

as $n \to \infty$, where $\mho_q(\theta)$ is defined in Lemma 2.5. In turn, (15) implies

$$-\left(1 - \frac{u(\theta_n)}{\beta}\right) n = (1 + B_q) \frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}} n - \frac{\theta^2}{2} + n\rho\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}}\right), \tag{31}$$

where $\rho(\theta) = \mathcal{O}\left(\theta^3\right)$ as $\theta \to 0$. Now we write

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(\theta) \sim -\frac{\theta^2}{2} + n\rho\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}}\right) - \frac{b_q}{\beta} \mho_q \left(\frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}}\right) \sum_{k=0}^{n-1} u^k(\theta_n) \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{32}$$

Hence we see that

$$n\rho\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\Psi n}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\theta^3}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{as} \quad n \to \infty \tag{33}$$

for each fixed $\theta \in \mathbb{R}$. At the same time, since $u(x) = x f_q'\big(h(x)\big)$, in our assumptions we observe that $u(x) \le \beta$ uniformly in $x \in [0, 1]$. Therefore, one can choose $\varepsilon > 0$ so desirably small that

$$\left|u^k(\theta_n) - \beta^k\right| \le \varepsilon$$

for large enough $n$. This entails that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(\theta_n)$ converges uniformly in $\theta \in \mathbb{R}$. Eventually,

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(\theta) = -\frac{\theta^2}{2} + y_n(\theta), \tag{34}$$

where $y_n(\theta) = \mathcal{O}\left(i\theta/\sqrt{n}\right)$ as $n \to \infty$. Finally, we conclude that

$$\varphi_{\zeta_n}(\theta) \longrightarrow \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\right\} \quad as \quad n \to \infty$$

for each fixed $\theta \in \mathbb{R}$.

Theorem 1.2 is proved. $\square$

# References


1. Asmussen S. and Hering H. Branching processes. 1983. Boston: Birkhäuser.
2. Athreya K. B. and Ney P. E. Branching processes.1972. New York: Springer.
3. Harris T. E. The theory of branching processes. 1963. Berlin: Springer-Verlag.
4. Imomov A. A. On Markov continuous time analogue of Q-processes. Theory Prob. and Math. Stat. 2012. No 84, pp. 57–64.
5. Imomov A. A. Limit Theorem for the Joint Distribution in the Q-processes. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2014. Vol. 7(3), pp. 289–296.
6. Imomov A. A., Nazarov Z. A. On asymptotic normality of the total progeny in the positive recurrent Q-processes. arXiv:2306.09367v1 [math.PR] 14 June 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.09367.
7. Imomov A. A., Nazarov Z. A. Limit Theorems for the Positive Recurrent Q-process. Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1803. pp. 1-15.
8. Jagers P. Branching Progresses with Biological applications. 1975. JW & Sons, Pitman Press, GB.
9. Karpenko A. V. and Nagaev S. V. Limit theorems for the total number of descendents for the Galton-Watson branching process. Theory Probab. Appl.. 1994, No 38, pp. 433–455.
10. Kennedy D. P. The Galton-Watson process conditioned on the total progeny. Jour. Appl. Prob. 1975. No 12, pp. 800–806.
11. Kolchin V. F. Random mappings. 1984. Moscow: Nauka. (in Russian)
12. Pakes A. G. Some limit theorems for the total progeny of a branching process. Adv. App. Prob. 1971. No 3(1), pp. 176–192.
13. Sevastyanov B. A. Branching processes. Nauka, Moscow, 1971. (Russian)

### Ikkinchi tartibli momenti chekli bo'lgan musbat qaytuvchi Q-jarayonlar barcha avlodlari umumiy sonining limit xossalari

**Nazarov Zuhriddin**

Ushbu maqolada Q-jarayonlar deb nomlanuvchi populyatsion stoxastik tizimlarni qaraymiz. Bunday tizimlar trayektoriyasi uzoq kelajakkacha davom etuvchi tasodifiy tarmoqlanuvchi Galton-Vatson tizimlari sifatida aniqlanadi. Ishda biz Q-jarayonlar evolyutsiyasida ishtirok etgan barcha avlodlar umumiy sonining asimptotik xossalarini o'rganamiz. Bu miqdor tarmoqlanuvchi Galton-Vatson tizimlaridagi kabi Q-jarayonlarning xossalarini chuqur o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi. Dastlabki Galton-Vatson tizimi evolyutsion qonunining uchinchi tartibli momenti chekli bo'lgan holda Q-jarayonlar barcha avlodlari umumiy soni tasodifiy miqdor sifatida standart normal qonunga bo'ysunuvchi miqdorga yaqinlashishini isbotlaymiz.

**Kalit so'zlar:** Tarmoqlanuvchi tizimlar; Q-jarayonlar; Markov zanjiri; hosil qiluvchi funksiya; o'tish ehtimolliklari; invariant taqsimotlar; so'nish vaqti avlodlarning umumiy soni musbat qaytuvchanlik markaziy limit teorema; katta sonlar qonuni.

### Предельные свойства полного числа поколений в положительно возвратных Q-процессах с конечным вторым моментом

**Назаров Зухриддин**

Мы исследуем популяционную случайную систему, называемую Q-процессом. Эта система определяется как ветвящаяся случайная система Гальтона-Ватсона с траекториями продолжающиеся бесконечно долго. Мы исследуем полное число потомков частиц до текущего момента времени в Q-процессе. По аналогии с ветвящимися системами, эта величина представляет большой интерес в изучении глубоких свойств Q-процесса. Мы докажем, что если третий момент закона эволюции частиц в первичной системе Гальтона-Ватсона конечен, то полное число потомков как случайная величина, аппроксимирует величину со стандартным нормальным законом распределения.

**Ключевые слова:** Ветвящаяся система; Q-процесс, цепь Маркова; производящая функция; переходные вероятности; инвариантное распределение; момент вырождения; полное число потомков; положительная возвратность; центральная предельная теорема; закон больших чисел.

**Received: 14/06/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Nazarov Z. A. Limit properties of the total progeny in the positive recurrent Q-processes with a finite second moment. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 57-65

# A Linear Pursuit problem with Langenhop type constraints

**Samatov Bahrom**
V.I.Romanovskii Institute of Mathematics
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan
samatov57@inbox.ru

**Uralova Saboxat**
V.I.Romanovskii Institute of Mathematics
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan
saboxat.17@inbox.ru

## Abstract

This work is focused on the pursuit problem between two controlled objects(a pursuer and an evader). The pursuit problem is formulated by linear differential equations. The objects apply controls with the Langenhop constraints of integral type. A strategy of parallel convergence ($\Pi$-strategy) is constructed for the pursuer that provide completion of the pursuit in a finite time.

**Keywords:** Differential games; linear game; pursuit problem; Langenhop constraint; pursuer; evader; $\Pi$-strategy.

**MSC 2020:** 49N75, 91A24

## 1. Introduction

The theory of differential games were first investigated by R.Isaacs [1].Fundamental results in the theory of differential games were obtained in the works of L.Pontryagin [2], L.Petrosyan [3], Pshenichny [4], A.Chikrii [5], N.Grigorenko [6], N.Satimov [7]and others.

Constructing strategies for players and determining the value of the game are difficult and essential problem in the differential games(see [8]). Among many pursuit strategies, a significant place is occupied by a parallel pursuit strategy, which is the best strategy for a wide class of the pursuit problems. The first time (1965), in the work of L.Petrosyan[3], a parallel approach strategy (in short, a $\Pi$-strategy) for simple pursuit problem was studied. Later in the works( B.Pshenichny [4], A.Chikrii [5], A.Azamov, [9], A.Azamov and B.Samatov [10], B.Samatov et.al. [11]–[16]), $\Pi$-strategy was applied effectively in pursuit problems.

Linear differential games are an essential group of the differential games. In many works, linear differential games have been studied. In R.Isaac's book [1], linear two person zero-sum differential game was studied. Linear differential games were studied in the first method of L.Pontryagin [17]. Later, many researchers have examined linear differential games (for example [14], [16]–[20]). Pursuit-evasion problems of linear differential games with integral constraints were studied as a result of the work of many authors, whose research focused on linear differential games with integral constraints (see [16]–[20]).

This work is focused on to the study of the pursuit problem for linear differential games with Langenhop type(briefly,$LT$-constraint)(see [14], [15], [21]) constraints. This work provides a review of some basic results on linear pursuit problem. Control functions of both players have equal constraints, i.e Langenhop type constraints (briefly, $LT$-constraint[15]). The $\Pi$-strategy of the pursuer is constructed to solve pursuit problem and this strategy provides completion of the pursuit in a finite time in this work.

## 2. Statement of problems.

Consider the linear $LT$-pursuit problem with linear differential system:

$$\dot{x} = Ax + u,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = Ay + v,\ y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y, u, v, A \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; the coefficient $A$ is $n \times n$ known matrix, $x_0$ and $y_0$ are $n$-initial state vectors , $u(t)$ and $v(t)$ are controller velocity vectors of Pursuer and Evader and they are imposed on Langenhop type constraint(briefly, $LT$-constraint[15]):

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 - 2l \int\limits_0^t |u(s)|^2 ds, \text{ for almost every } 0 \leq t < \bar{t}, \tag{3}$$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2l \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds, \text{ for almost every } 0 \leq t < \bar{\tau} \tag{4}$$

where, $\rho$, $\sigma$, $l$ are positive parametric numbers, $\bar{t} = \sup\{t : \rho^2 - 2l \int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \geq 0\}$ and $\bar{\tau} = \sup\{t : \sigma^2 - 2l \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \geq 0\}$. Let $U_{LT}$ (correspondingly, $V_{LT}$)- the set of all admissible controls $u(\cdot)$ (correspondingly, $v(\cdot)$) for which satisfying constraint (3) (correspondingly, (4)).

Let's see other constraints for control functions $u(t)$ and $v(t)$ of the Pursuer and Evader.

Geometric constraint (briefly, $G$-constraint [15]):

$$|u(t)| \leq \rho e^{-lt}, \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{5}$$

$$|v(t)| \leq \sigma e^{-lt}, \text{ for almost every } t \geq 0 \tag{6}$$

and $U_G$ ($V_G$)-the class of all admissible controls $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) for which satisfying constraint (5)((6))

Integral constraint (briefly, $I$-constraint [15]):

$$\int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho^2}{2l}(1 - e^{-2lt}), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma^2}{2l}(1 - e^{-2lt}), \quad t \geq 0 \tag{8}$$

and $U_I$ ($V_I$)-the class of all admissible controls $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$)for which satisfying constraint (7)((8))

If the Pursuer (correspondingly, the Evader) chooses the control function $u(\cdot)$ (correspondingly $v(\cdot)$)from one of the classes $U_{LT}$,$U_G$,$U_I$ (correspondingly $V_{LT}$,$VG$,$V_I$), then we easily can be found the trajectories of the Pursuer and the Evader, i.e the solutions of (1)-(2) :

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int\limits_0^t e^{-As}u(s)ds,$$

$$y(t) = e^{At}y_0 + e^{At} \int\limits_0^t e^{-As}v(s)ds.$$

Solutions $x(t)$ and $y(t)$ are real absolutely continuous $n$-vector.

**Definition 2.1.** A measurable function $\mathbf{u}(t) \in U$ is said an admissible control of the Pursuer, if $U$ is one the classes $U_G$, $U_{LT}$ and $U_I$.

**Definition 2.2.** A measurable function $\mathbf{v}(t) \in V$ is said an admissible control of the Evader, if $V$ is one the classes $V_G$, $V_{LT}$ and $V_I$.

**Definition 2.3.** A measurable function $\mathbf{u}(t, v(t)) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is called to be a strategy of the Pursuer

**Definition 2.4.** A strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, v(t))$ is said completion of the pursuit in the interval $[0, \mathrm{T}(\mathbf{u})]$, if the following initial value problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + \mathbf{u}(t, v(t)), \ x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = Ay + v(t), \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

has a unique solution $x(t)$ and $y(t)$ for any the Evader's admissible control $v(t) \in V$ and $x(t^*) = y(t^*)$ at some time $t^* \in [0, \mathrm{T}(\mathbf{u})]$.

## 3. The motion of the Pursuer in $\mathbb{R}^n$

In this section we consider the motion of the Pursuer. Here the equation of motion is (1) and the control function of the Pursuer $u$ satisfies the constraint (3).

**Lemma 3.1.** (B.T.Samatov et.al. [15] ) *The relations $U_G \subset U_{LT} \subset U_I$ for almost every $t \geq 0$ are satisfied.*

**Lemma 3.2.** *If $A \equiv 0$, then the pursuer can reach any point $p \in \mathbb{R}^n$ by the control $u^* = (p - x_0)\left[\sqrt{l^2 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} - l\right]$ at time $t^* = \left[\sqrt{l^2 + \left[\frac{\rho}{a}\right)^2} - l\right]^{-1}$, where $x(t^*) = p$, $|p - x_0| = a$ and $u^* \in ULT$.*

Proof. **Lemma 3.2.** was proved by B.T.Samatov et.al.[15].

□

We see the motion of the Pursuer for $A \neq 0$.

**Lemma 3.3.** *If $u(\cdot) \in U_G$ and $\|A\| \leq l$, then for each $t \geq 0$, $x(t) \in S_\omega(t)$. where $\|A\|$ is norm of $A$ matrix and $\omega(t) = |x_0|\left(e^{lt} + 1\right) + \rho t e^{lt}$.*

Proof. Let $u(\cdot) \in U_G$ , then using (1) and (7) we can obtain

$$|x(t) - x_0| = \left|e^{At}x_0 - x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}u(s)ds\right| \leq \|e^{At} + (-I)\||x_0| + \|e^{At}\|\int_0^t |e^{-As}||u(s)|ds \leq$$

$$\left(e^{\|At\|} + 1\right)|x_0| + e^{\|A\|t}\int_0^t e^{\|A\|s}\rho e^{-ls}ds \leq |x_0|\left(e^{lt} + 1\right) + \rho t e^{lt}.$$

**Lemma 3.3.** has been proved. □

According to Lemmas 3.1 and 3.3, the following important result is achieved.

**Corollary 3.1.** *If $u(\cdot) \in U_{LT}$ or $u(\dot{)} \in U_I$ and $\|A\| \leq l$,then Pursuer can reach any point in $\mathbb{R}^n$.*

## 4. The linear $LT$-pursuit game.

Let's introduce the denotations: $z(t) = x(t) - y(t), \ \dot{z}(0) = z_0$.

In order to resolve the linear $LT$-pursuit game, we assume that the initial positions $x_0$, $y_0$, constants $\rho$, $\sigma$, $l$, $A$ and the Evader's control $v(t)$ at each time $t$ are known to the Pursuer.

**Definition 4.1.** A function $\mathbf{u}_{LT}(t, v)$ of the form

$$\mathbf{u}_{LT}(t, v) = v - \frac{e^{At}z_0}{|e^{At}z_0|}\lambda_{LT}(t, v), \quad \lambda_{LT}(t, v) = \frac{\langle v, e^{At}z_0\rangle}{|e^{At}z_0|} + \sqrt{\left(\frac{\langle v, e^{At}z_0\rangle}{|e^{At}z_0|}\right)^2 + \delta e^{-2lt}} \tag{9}$$

is called a $\Pi_{LT}$-strategy of the Pursuer, in case $\rho \geq \sigma$ , where $\delta = \rho^2 - \sigma^2$ and $\langle v, e^{At}z_0\rangle$ denotes the inner product of the vectors $v$ and $e^{At}z_0$ in $\mathbb{R}^n$.

Note that for any $v \in S_\sigma$, the equality

$$|\boldsymbol{u}_{LT}(t,v)|^2 = |v|^2 + \delta e^{-2lt}, \quad t \geq 0 \tag{10}$$

holds.

**Theorem 4.1.** *The $\Pi_{LT}$-strategy (9) guarantees the completion of pursuit in the game (1)-(4) on the time interval $[0, \mathrm{T}_{LT}]$, if and only if $\rho > \sigma$, where*

$$\mathrm{T}_{LT} = \min\{t|\ \Lambda_{LT}(t) = 0,\ t \geq 0\}, \Lambda_{LT}(t) = |z_0| - \sqrt{F(t) + G(t)} + \sqrt{F(t)},$$

*where* $F(t) = \frac{\sigma^2}{4\|A\|l}\left(1 - e^{-2\|A\|t} - e^{-2lt} + e^{-2(\|A\|+l)t}\right)$, $G(t) = \frac{\delta}{(\|A\|+l)^2}\left(1 - e^{-(\|A\|+l)t}\right)^2$.

Proof. Suppose the Evader chooses an arbitrary control $v(\cdot) \in V_{LT}$. If the Pursuer apply the $\Pi_{LT}$ -strategy, then from (1),(2) and (9), then we consider the following initial value problem

$$\dot{z} = Az + \boldsymbol{u}_{LT}(t, v(t)) - v(t) = -\frac{e^{At}z_0}{|e^{At}z_0|}\lambda_{LT}(t,v),\ z(0) = z_0.$$

From (9), it follows

$$z(t) = e^{At}z_0\Lambda_{LT}(t, v(\cdot)), \Lambda_{LT}(t, v(\cdot)) = 1 - \int_0^t \frac{1}{|e^{As}z_0|}\lambda_{LT}(s, v(s))ds \tag{11}$$

Accordance to $\Lambda_{LT}(t, v(\cdot))$ is continuous and monotonically decreasing function for all $t \geq 0$ we have

$$\Lambda_{LT}(t, v(\cdot) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|}\int_0^t g(s)f(w(s))ds, \tag{12}$$

where $g(s) = e^{-(\|A\|+l)s}$, $w(s) = e^{ls}|v(s)|$ and $f(w) = \sqrt{w^2 + \delta} - w$. Since $f : [0, +\infty) \to (0, \alpha]$ is a convex function ($f''(\omega) > 0$) and $g$ is integrable and $\int_0^t g(s) > 0$, we apply Jensen's inequality for the integral in (13)

$$\int_0^t g(s)f(w(s))ds \geq \int_0^t g(s)ds f\left(\frac{\int_0^t g(s)w(s)ds}{\int_0^t g(s)ds}\right). \tag{13}$$

As a consequence (13), takes the form

$$\Lambda_{LT}(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|}\left[\sqrt{Q^2(t, v(\cdot)) + G(t)} - Q(t, v(\cdot))\right]. \tag{14}$$

where $Q(t, v(\cdot)) = \int_0^t e^{-\|A\|s}|v(s)|ds$

Since the function in the square bracket of (14) is monotonically decreasing with respect to $Q(t, v(\cdot))$, by applying the inequalities Cauchy-Bunyakovskii and (4), we obtain

$$Q(t, v(\cdot)) \leq \sqrt{\frac{1}{2\|A\|}\left(1 - e^{-2\|A\|t}\right)\int_0^t |v(s)|^2 ds} \leq F(t)$$

By applying last inequality to (14) we obtain $\Lambda_{LT}(t, v(\cdot)) \leq \Lambda_{LT}(t)$.

According to the conditions of Theorem 4.1., it proceeds $\Lambda_{LT}(\mathrm{T}_{LT}) = 0$ and it follows that there exists some time $t^* \in [0, \mathrm{T}_{LT}]$ such that $\Lambda_{LT}(t^*, v(\cdot)) = 0$. So, by virtue of (12) we conclude the equality $z(t^*) = 0$ or $x(t^*) = y(t^*)$.

□

Now, we show the admissibility of the strategy (9) for all $t \in [0, t^*]$. In view of (10), for any control $v(\cdot) \in V_{LT}$ of the Evader and from (3)

$$|\boldsymbol{u}_{LT}(t, v(t))|^2 = |v(t)|^2 + \delta e^{-2lt} \leq \sigma^2 - 2l \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds + \delta e^{-2lt} =$$

$$\rho^2 - 2k \int\limits_0^t \left(|v(s)|^2 + \delta e^{-2ls}\right) ds = \rho^2 - 2l \int\limits_0^t |\boldsymbol{u}_{LT}(s, v(s))|^2 ds,$$

which completes the proof of Theorem 4.1.

**Example 4.1.** Let's consider the differential game

$$\ddot{x} = u, \;\; \dot{x}(0) = 0, \;\; x(0) = \frac{1}{2}$$

$$\ddot{y} = v, \;\; \dot{y}(0) = 0, \;\; y(0) = 0,$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^2$; the controls $u$ and $v$ satisfy the constraints (3) and (4) correspondingly and let given the values of $\rho = 3$, $\sigma = 1$, $l = 1$.

Introduce $\binom{x(0)-y(0)}{\dot{x}-\dot{y}} = \binom{z_1}{z_2} = z$, $\binom{x(0)-y(0)}{\dot{x}(0)-\dot{y}(0)} = \binom{\frac{1}{2}}{0} = \binom{z_1(0)}{z_2(0)} = z(0)$ and $\vec{u} = \binom{0}{u}$ $\vec{v} = \binom{0}{v}$ to write the system as a first-order differential system

$$\dot{z} = Az + \vec{u} - \vec{v}, \;\; z(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u}(t)|^2 \leq 9 - 2 \int\limits_0^t |\vec{u}(s)|^2 ds, \;\; \text{for almost every } 0 \leq t < \bar{t},$$

$$|\vec{v}(t)|^2 \leq 1 - 2 \int\limits_0^t |\vec{v}(s)|^2 ds, \;\; \text{for almost every } 0 \leq t < \bar{t},$$

where $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|A\|$=1, $|z_0| = \frac{1}{2}$.

We use the following theorem to solve this problem.

**Theorem 4.2.** *If $\|A\| \leq l$ and $|z_0| < \frac{(\rho-\sigma)}{2l}$ , then the $\Pi_{LT}$-strategy (9) guarantees the completion of pursuit in the game (1)-(4) on the time interval $[0, T_{LT}]$,where*

$$T_{LT} = \frac{1}{2l} \ln\left(\frac{\rho - \sigma}{\rho - \sigma - 2l|z_0|}\right).$$

Proof.

This proof is analogous to the proof of Theorem 4.1. So, we have

$$T_{LT} = \ln \sqrt{2}.$$

□

# References


1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons.1965. 385 p.
2. Pontryagin L. Selected Works.Moscow: MAKS Press. 2004. 551 p.
3. Petrosyan L. Differential games of pursuit: Series on optimization. Singapore : World Scientific Publishing. 1993. 2. 326 p.
4. Pshenichny B. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and System Analysis. 1976. Vol.12, Issue 5, pp. 484–485.
5. Chikrii A. Conflict-Controlled Processes.Mathematics and Its Applications. 1977. 405 p.
6. Grigorenko N. On the structure of a class of differential games with general integral constraints. Upravliaemie systemy. 1974. 12. pp. 46–53.
7. Satimov N. (2019) Methods to Solve Pursuit Problems in Theory Differential Games, Tashkent, NUU Press.
8. Azamov A. and Kuchkarov A. Generalized "Lion and Man " Game of R. Rado. Contributions to Game Theory and Management. 2009. 2. pp. 8-20.
9. Azamov A. About the quality problem for the games pursuit with the restriction. Serdica Bulgarian math.1986. Vol.2, Issue 12, pp.38–43.
10. Azamov A. and Samatov B. The Π-Strategy: Analogies and Applications.The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg, Russia. 2011. pp. 33–47.
11. Samatov B. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls. Automation and Remote Control. 2013. Vol.74, Issue 7, pp. 1072–1081.
12. Samatov B. The Π-strategy in a differential game with linear control constraints. J.Appl.Maths and Mechs. 2014. Vol.78, Issue 3, pp.258–263.
13. Samatov B. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players I. Cybernetics and Systems Analysis. 2013. Vol.49, Issue 5, pp. 255-302
14. Samatov B. and Uralova S. Pursuit-Evasion problems for one linear case under $La$ - Constraints , Bulletin of the Institute of Mathematics. 2023. Vol.1, Issue 6, pp. 48–51.
15. Samatov B., Umaraliyeva N. and Uralova S. Differential Games with the Langenhop type constrains on controls. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 12, Issue 42, pp. 2942–2951.
16. Samatov B. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players II. Cybernetics and Systems Analysis. 2013. Vol.49, Issue 6, pp.907–921.
17. Pontryagin L. Linear differential games. I, II. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. pp. 764–766
18. Pshenichnii B. and Onopchuk Yu. Linear Differential Games with Integral Constraints, Izvestige Akademii Nauk SSSR, Tekhnicheskaya Kibernetika. 1968. Vol. 1, Issue 1, pp. 13-22.
19. Azimov A. Linear Differential Pursuit Games with Integral Constraints on The Control. 1975. Differential Equations. Vol 11. pp. 1723-1731.
20. Azimov A. A Linear Differential Evasion Game with Integral Constraints on The Controls. 1974. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz, Vol. 6, Issue 14, pp. 1427-1436.
21. Langenhop C. Bounds on the norm of a solution of a general differential equation. Proc: AMS 11. 1960. pp. 795-799.


Langenhop tipidagi chegaralanishli chiziqli ta'qib qilish masalasi

**Samatov Bahrom, Uralova Saboxat**

Ushbu ish ikkita boshqariladigan obyektlar (quvlovchi va qochuvchi) o'rtasidagi quvish masalasiga qaratilgan. Quvish masalasi chiziqli differensial tenglamalar bilan tuzilgan. Obyektlar integral turdagi Langenhop tipdagi cheklovli boshqaruvlarni qo'llaydi. Quvlovchi uchun parallel yaqinlashish strategiyasi (Π-strategiya) tuzilgan bo'lib, u chekli vaqt ichida quvishni yakunlashni ta'minlaydi.

**Kalit so'zlar:** Differensial o'yin; chiziqli o'yin, ta'qib qilish masalasi; Langenhop; quvlovchi; qochuvchi; Π-strategiya.

Задача линейного преследования с ограничениями типа Лангенхопа

**Саматов Бахром, Уралова Сабохат**

Эта работа сосредоточена на задаче преследования между двумя контролируемыми объектами (преследователь и убегающий). Задача преследования формулируется линейными дифференциальными уравнениями. Объекты применяют элементы управления с ограничениями Лангенхопа интегрального типа. Для преследователя разрабатывается стратегия параллельного сближения (П-стратегия), которая обеспечивает завершение преследования в течений ограниченного периода времени.

**Ключевые слова:** Диффереציальные игры; линейная игра; задача преследования; Лангенхоп; преследователь; убегающий; П-стратегия.

**Received: 05/09/2022**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Samatov B., Uralova S. A Linear Pursuit problem with Langenhop type constraints. *Bull. Inst. Math.*, 202 , Vol.6, No 4, pp. 66-72

# On convergence of the series of weakly dependent random variables

**Sharipov Olimjon**
National University of Uzbekistan
named after Mirzo Ulugbek
Tashkent, Uzbekistan,
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy
of Sciences of the Republic of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan
osharipov@yahoo.com

**Kobilov Utkir**
National University of Uzbekistan
named after Mirzo Ulugbek
Tashkent, Uzbekistan
kobilov.utkir25@gmail.com

## Abstract

In this note we give sufficient conditions of almost sure convergence of the series of mixing random variables. We assume that random variables are from domain of attraction of stable laws.

**Keywords:** Random series; mixing conditions; almost sure convergence.

**MSC 2020:** 60F15

## 1. Introduction and main results

Let $\{\xi_n,\, n \in Z\}$ be a strictly stationary sequence of random variables. We consider linear processes defined as

$$X_n = \sum_{i \in Z} a_i \xi_{n-i}. \tag{1}$$

In the case of the sequences of independent identically distributed stable random variables $\{\xi_n,\, n \in Z\}$ conditions of almost sure convergence of the series in (1) are given, for instance, in [1]. Almost sure convergence in (1) for independent identically distributed random variables from domain of attraction of stable laws were studied in [9]. In [7] the authors consider almost sure convergent series

$$Y_n = \sum_{i \in Z^d} a_i \xi_{n-i}, \tag{2}$$

where $\left\{\xi_n,\, n \in Z^d\right\}$ is a random field of independent identically distributed random variables from domain of attraction of stable law. Remind that $\xi_0$ is in domain of stable law if

$$P\left(|\xi_0| > x\right) = \frac{L(x)}{x^\alpha},\ 0 < \alpha < 2 \tag{3}$$

where $L(x)$ is slowly varying function at infinity i.e. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ for any $t > 0$.

$\xi_0$ has the characteristic function $\varphi_{\xi_0}(t)$ of the form

$$\varphi_{\xi_0}(t) = \exp\left\{-c_\alpha \left|t\right|^\alpha L\left(1/\left|t\right|\right)\left(1 - i\beta\tau(\alpha, t)\right\}\right. \tag{4}$$

for $t$ in the neighborhood of zero, where $c_\alpha > 0$,

$$\tau(\alpha, t) = \left\{ \begin{array}{rl} sgnt \tan(\pi\alpha/2), & if \quad \alpha \neq 1, \\ 0, & if \quad \alpha = 1, \end{array} \right.$$

and $\beta = c^+ - c^-$ if $0 < \alpha < 2$. Notice that $\tau(\alpha, t) = 0$ if $\alpha = 2$.

If $0 < \alpha < 2$, then

$$\frac{P(\xi_0 > x)}{P(|\xi_0| > x)} \to c^+ \text{ and } \frac{P(\xi_0 < -x)}{P(|\xi_0| > x)} \to c^- \text{ as } x \to \infty.$$

Here $0 \le c^+ \le 1$ and $c^+ + c^- = 1$.

Assume

$$E\xi_0 = 0, \text{ if } \alpha > 1, \tag{5}$$

$$\xi_0 \text{ is symmetric, if } \alpha = 1. \tag{6}$$

We are interested in limit theorems for (1) in the case of weakly dependent random variables $\{\xi_n, n \in Z\}$, but in this note we consider the almost sure convergence in (1) only. Namely we consider mixing random variables. For the sequence of random variables $\{\xi_n, n \in Z\}$ mixing coefficients are defined as following

$$\varphi(n) = \sup\left\{|P(A/B) - P(A)| : B \in \mathfrak{F}_{-\infty}^{k},\ A \in \mathfrak{F}_{k+n}^{\infty},\ k \in N,\ P(B) > 0\right\} \to 0, \tag{7}$$

$$\alpha(n) = \sup\left\{|P(AB) - P(A)P(B)| :\ A \in \mathfrak{F}_{-\infty}^{k},\ B \in \mathfrak{F}_{k+n}^{\infty},\ k \in N\right\} \tag{8}$$

we $\mathfrak{F}_a^b$ is a $\sigma-$field generated by $\xi_a, .., \xi_b$.

We say that $\{\xi_n, n \in Z\}$ is $\varphi-$mixing (or $\alpha-$mixing) if $\varphi(n) \to 0$ as $n \to \infty$ (respectively $\alpha(n) \to 0$ as $n \to \infty$). For the properties of mixing random variables see [4].

Now we formulate our results.

**Theorem 1.1.** *Let $\{\xi_n, n \in Z\}$ be a strictly stationary sequence of $\varphi-$mixing random variables satisfying (3)-(6) and*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}\left(2^k\right) < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{i \in Z} |a_i|^{\alpha} L\left(\frac{1}{|a_i|}\right) < \infty. \tag{10}$$

*Then the series*

$$\sum_{i \in Z} a_i \xi_{n-i}$$

*converges almost surely for any fixed $n$.*

**Theorem 1.2.** *Let $\{\xi_n, n \in Z\}$ be a strictly stationary sequence of $\alpha-$mixing random variables satisfying (3)-(6), (10) and*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) < \infty. \tag{11}$$

*Then the series*

$$\sum_{i \in Z} a_i \xi_{n-i}$$

*converges almost surely for any fixed $n$.*

## 2. Proofs

Proof of Theorem 1.1. We will use the following results.

**Lemma 2.1 [5].** *Assume that*

$$P(|\xi| > x) = x^{-\alpha} L(x)$$

*where $L(x)$ is slowly varying at infinity.*

1. *If $\alpha \in (0, 2)$, then there exists a constant $C_2$ depending on $\alpha$ and the law of $\xi$, such that*

$$E\left[\xi^2 I\left(|\xi| < x\right)\right] \leq C_2 x^{2-\alpha} L(x),\ x > 0. \tag{12}$$

2. *If $\alpha \in (0, 1)$, then there exists a constant $C_1$ depending on $\alpha$ and the law of $\xi$, such that*

$$E\left[|\xi| I\left(|\xi| < x\right)\right] \leq C_1 x^{1-\alpha} L(x),\ x > 0. \tag{13}$$

3. *If $\alpha \in (1, 2)$, then there is$x_0 > 0$, depending on the law of $\xi$, such that*

$$E\left[|\xi| I\left(|\xi| \geq x\right)\right] \leq E\left[|\xi| I\left(x < x_0\right)\right] + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} x^{1-\alpha} L(x),\ x > 0, \tag{14}$$

*where $I(\cdot)$ - an indicator function.*

**Theorem 2.1[8].** *Assume that $\{\xi_n, n \in N\}$ is a sequence of random variables satisfying the $\varphi-$mixing condition and (9). If*

$$\sum_{i=1}^{\infty} Var \xi_i < \infty,$$

*then the following series converges almost surely*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_i - E\xi_i\right).$$

**Lemma 2.2.** *Let $\{\xi_n, n \in N\}$ be a sequence of random variables from domain of attraction of stable law satisfying the $\varphi-$mixing condition and (9). If for some $c > 0$*

$$\sum_{i \in Z} P\left(|a_i \xi_{n-i}| \geq c\right) < \infty, \tag{15}$$

$$\sum_{i \in Z} E\left|a_i \xi_{n-i}\right| I\left(|a_i \xi_{n-i}| < c\right) < \infty, \tag{16}$$

$$\sum_{i \in Z} Var\left|a_i \xi_{n-i}\right| I\left(|a_i \xi_{n-i}| < c\right) < \infty, \tag{17}$$

*then following series converges almost surely for any fixed $n$*

$$\sum_{i \in Z} a_i \xi_{n-i}.$$

Taking into account Theorem 2.1 a proof of Lemma 2.2 is the same as in the case of independent random variables, see for instance [3]. Conditions (15)-(17) of Lemma 2.2 follows from Lemma 2.1. Now Theorem 1.1 itself follows from Lemma 2.2 and Theorem 2.1. Theorem is proved. □

Proof of Theorem 1.2. In this case we use the following.

**Lemma 2.3[2],[6].** *Suppose that $X_i = c_i Z_i$, $i \in Z$ where $\{Z_i\}$ is strictly stationary sequence of random variables suel that $|Z_i| \leq M$ for some $M > 0$ and the following hold*

$$\sum_{i \in Z} c_i^2 < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) < \infty.$$

*Then the series*

$$\sum_{i \in Z} X_i$$

*converges almost surely.*

Note that conditions (15), (16) hold.

Set for any $c > 0$
$$\eta_{n-i} = a_i \xi_{n-i} I\left(|a_i \xi_{n-i}| < c\right) - E a_i \xi_{n-i} I\left(|a_i \xi_{n-i}| < c\right).$$
From Lemma 2.3 we have that the series
$$\sum_{i \in Z} \eta_{n-i}$$
converges almost surely.

(16) implies almost sure convergence of series
$$\sum_{i \in Z} a_i \xi_{n-i} I\left(|a_i \xi_{n-i}| < c\right).$$
From (15) and Borel-Cantelli lemma we get a statement of the theorem. Theorem 1.2 is proved. □

## References


1. Leadbetter M., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and related properties of random sequences and processes. 1983. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag.
2. Rio E. Asymptotic Theory of Weakly Dependent Random Processes. 2016. Probability Theory and Stochastic Modelling. Vol.80. Springer.
3. Petrov V.V. Limit theorems for sums of independent random variables. 1987. Moskow: Nauka (in Russian).
4. Bradley R. Introduction to Strong Mixing Conditions. Volumes 1-3. 2007. Kendrick Press.
5. Balan R., Jakubowski A., Louhichi S. Functional Convergence of Linear Processes with Heavy-Tailed Innovations. J: Theor. Probab. 2016. Vol.29, pp. 491-526.
6. Rio E. A Maximal Inequality and Dependent Marcinkiewicz-Zygmund Strong Laws. The Annals of Probability. 1995. Vol.23, .2, pp. 918-937.
7. Peligrad M., Sang H., Xiao Y. and Yang G. Limit theorems for linear random fields with innovations in the domain of attraction of a stable law. Stochastic Processes and their Application. 2022. Vol.150, pp. 596-621.
8. Utev S. Sums of random variables with $\varphi$-mixing. Siberian Advances in Mathematics. 1991. Vol.1, pp. 124-155.
9. Astrauskas A. Limit theorems for sums of linearly generated random variables. Lithuanian Math. J. 1983. Vol.23, .2, pp. 918-937.

KUCHSIZ BOG'LANGAN TASODIFIY MIQDORLARDAN TUZILGAN QATORNING YAQINLASHISHI HAQIDA

**Sharipov Olimjon, Qobilov O'tkir**

Bu maqolada qorishmalilik shartlarini qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdorlardan tuzilgan qatorlarning bir ehtimollik bilan yaqinlashishining yetarli shartlari keltirilgan. Biz tasodifiy miqdorlar turg'un taqsimotlarning jalb qilish sohasidan olingan, deb faraz qilamiz.

**Kalit so'zlar:** Tasodifiy qatorlar; qorishmalilik shartlari; bir ehtimollik bilan yaqinlashish.

О СХОДИМОСТИ РЯДА СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**Шарипов Олимжон, Кобилов Уткир**

В этой заметке мы приводим достаточные условия почти наверное сходимости ряда случайных величин с перемешиванием. Мы предполагаем, что случайные величины принадлежат области притяжения устойчивых законов.

**Ключевые слова:** Случайный ряд; условия перемешивания; почти наверное сходимость.

**Received: 11/09/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Sharipov O., Kobilov U. On convergence of the series of weakly dependent random variables. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 73-77

# Extension of some solvable Leibniz algebras

**Sheraliyeva Surayyo**
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of
Uzbekistan Academy of Sciences
Tashkent, Uzbekistan
abdiqodirovna@mail.ru

## Abstract

In this work we consider one-dimensional extension of solvable Leibniz algebras whose nilradical is null-filiform and naturally graded filiform algebras.

**Keywords:** Leibniz algebra; solvability; nilpotency; filiform Leibniz algebras; cental extension.

**MSC 2020:** 17A32; 17A36; 17A65; 17B30

## 1. Introduction

Leibniz algebras are a non-antisymmetric analogue of Lie algebras [7], which makes that every Lie algebra is a Leibniz algebra. Since then many analogs of important theorems in Lie theory were found to be true for Leibniz algebras, such as the analogue of Levi's theorem which was proved by Barnes [3]. For many years, researchers have used varios method to classify nilpotent and solvable Lie algebras and studied the problem of classification of low dimensional Lie algebras. One of the effective method of classification of low dimensional nilpotent Lie algebras is the method of extension. There are several type of extensions, such as trivial, central, split and others. Central extension is very useful to the classification of finite-dimensional nilpotent algebras.

Central extensions are needed in physics, because the symmetry group of a quantized system usually is a central extension of the classical symmetry group, and in the same way the corresponding symmetry Lie algebra of the quantum system is, in general, a central extension of the classical symmetry algebra. Kac-Moody algebras have been conjectured to be a symmetry groups of a unified superstring theory. The centrally extended Lie algebras play a dominant role in quantum field theory, particularly in conformal field theory, string theory and in $M$-theory.

It is well-known that all nilpotent Lie algebras of a specific dimension can be obtained by central extensions of nilpotent Lie algebras of lower dimensions [9]. It should be noted that in [10] by T. Sund the method of central extension is generalized for the solvable Lie algebras. In [6] extensions of solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradicals are considered and all one-dimensional central extension of such solvable Lie algebras are found. In fact, the method of central extensions firstly is adapted for Leibniz algebras in [8]. Central extension of Leibniz algebras and superalgebras are investigated in [1], [4].

In the present paper we consider central extension of solvable Leibniz algebras whose nilradical is null-filiform and naturally graded filiform algebras.

## 2. Main part

In this section we recall some basic notions and concepts used throughout the paper.

**Definition 2.1.** A vector space with a bilinear bracket $(L, [\cdot,\cdot])$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the so-called Leibniz identity

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big]$$

holds.

For a given Leibniz algebra $(L, [\cdot,\cdot])$, the sequences of two-sided ideals are defined recursively as follows: $L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1.$

These are said to be the lower central and the derived series of $L$, correspondingly.

**Definition 2.2.** A Leibniz algebra $L$ is said to be nilpotent (respectively, solvable), if there exists $n \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) such that $L^n = \{0\}$ ($L^{[m]} = \{0\}$).

It is easy to see that the sum of two nilpotent ideals is also nilpotent. Therefore, the maximal nilpotent ideal always exists. The maximal nilpotent ideal of a Leibniz algebra is said to be the nilradical of the algebra.

**Definition 2.3.** A Leibniz algebra $L$ is called null-filiform if $\dim L^i = n+1-i, \quad 1 \le i \le n+1$, where $n = \dim L$.

**Definition 2.4.** A Leibniz algebra $L$ is called filiform if $\dim L^i = n-i$, for $2 \le i \le n$, where $n = \dim L$.

It is known that [2] an arbitary $n$-dimensional null-filiform Leibniz algebra is isomorphic to the algebra:

$$NF^n : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

Moreover, any complex $n$-dimensional naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebra is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras:

$$F_n^1 : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-1, \quad F_n^2 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1. \end{cases}$$

All solvable Leibniz algebras whose nilradical is the null-filform Leibniz algebra $NF_n$ and solvable Leibniz algebras whose nilradical are the naturally graded filiform Leibniz algebras $F_n^1$ and $F_n^2$ are classified in [5]. Here we give the list of such solvable Leibniz algebras. We denote by $\mathfrak{R}$ solvable Leibniz algebra with nilradical $NF_n$, and by $\mathfrak{L}_i$, and $\mathfrak{S}_i$ solvable Leibniz algebra with nilradical $F_n^1$ and $F_n^2$, respectively:

$$\mathfrak{R} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = e_1, & \\ [e_i, x] = -ie_i, & 1 \le i \le n, \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_1 \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \le i \le n, \end{cases} \qquad \mathfrak{L}_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-1+\alpha)e_i, & 2 \le i \le n, \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_3 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-n)e_i, & 2 \le i \le n, \\ [x, x] = e_n, & \end{cases} \qquad \mathfrak{L}_4 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1 + e_n, & \\ [e_i, x] = (i+1-n)e_i, & 2 \le i \le n, \\ [x, x] = -e_{n-1}, & \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_5(\alpha_4, \dots, \alpha_n) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [e_1, x] = e_2 + \sum\limits_{i=4}^{n-1} \alpha_i e_i, & \\ [e_i, x] = e_i + \sum\limits_{j=i+2}^{n} \alpha_{j-i+2} e_j, & 2 \le i \le n, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_1(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_1, x] = -e_1, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [x, e_1] = e_1, & [x, x] = \alpha e_2, \quad \alpha \in \{0, 1\}, \end{cases} \qquad \mathfrak{S}_2(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_1, x] = -e_1, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_2, x] = \alpha e_2, \quad \alpha \ne 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_3 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_1, x] = -e_1, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_2, x] = (1-n)e_2 + e_n, \end{cases} \qquad \mathfrak{S}_4(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_i, x] = -(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [x, e_1] = e_1, & [e_1, x] = -e_1, \\ [e_2, x] = -\alpha e_2, & [x, e_2] = \alpha e_2, \quad \alpha \ne 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_5: \begin{cases} [e_1,e_1]=e_3, & \\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [e_1,x]=-e_1-e_2, & [e_2,x]=-e_2,\\ [x,e_1]=e_1+e_2, & [x,e_2]=e_2, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n,\lambda,\delta): \begin{cases} [e_1,e_1]=e_3, & [e_2,x]=e_2,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i e_i, & \\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+2}e_j, & 3\le i\le n-1,\\ [x,x]=\lambda e_n, & [x,e_2]=\delta e_2, \quad \delta\in\{0,-1\}. \end{cases}$$

Let $(N,[-,-])$ be a solvable Leibniz algebra over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{V}$ be a vector space. The $\mathbb{C}$-linear space $\mathrm{Z}^2(N,\mathbb{V})$ is defined as the set of all anti-symmetric bilinear maps $\psi\colon N\times N\longrightarrow\mathbb{V}$ such that

$$\psi(x,[y,z])=\psi([x,y],z)-\psi([x,z],y).$$

These elements will be called 2-*cocycles*. For a linear map $f: N\to\mathbb{V}$, we define $df\colon N\times N\longrightarrow\mathbb{V}$ by $df(x,y)=f([x,y])$ and these elements is called 2-coboundaries. The set of all 2-coboundaries we denote by $\mathrm{B}^2(N,\mathbb{V})$, i.e., $\mathrm{B}^2(N,\mathbb{V})=\{df \mid f\in\mathrm{Hom}(N,\mathbb{V})\}$. Define the *second cohomology space* $\mathrm{H}^2(N,\mathbb{V})$ as the quotient space $\mathrm{Z}^2(N,\mathbb{V})\big/\mathrm{B}^2(N,\mathbb{V})$.

For $\psi\in\mathrm{Z}^2(N,\mathbb{V})$, define on the linear space $\widetilde{N}=N\oplus\mathbb{V}$ the bilinear product $[-,-]_\psi$ by

$$[x+u,y+v]_\psi=[x,y]+\psi(x,y)$$

for all $x,y\in N, u,v\in\mathbb{V}$. The algebra $N_\psi=(\widetilde{N},[-,-]_\psi)$ is called an *s-dimensional central extension* of $N$ by $\mathbb{V}$.

## Extension of solvable Leibniz algebras

Let $L$ be a Leibniz algebra with a basis $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Then by $\Delta_{ij}$ we will denote the bilinear form $\Delta_{ij}: L\times L\longrightarrow\mathbb{C}$ with $\Delta_{ij}(e_l,e_m)=\delta_{il}\delta_{jm}$. The set $\{\Delta_{ij}: 1\le i,j\le n\}$ is a basis for the linear space of bilinear forms on $L$, so every $\psi\in\mathrm{Z}^2(L,\mathbb{V})$ can be uniquely written as $\psi=\sum\limits_{1\le i,j\le n}c_{ij}\Delta_{ij}$, where $c_{ij}\in\mathbb{C}$.

Now we obtain all one-dimensional extensions of solvable Leibniz algebras $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{L}_i,\ \ 1\le i\le 5$. First, we give the description of the group of automorphisms of these algebras.

**Proposition 2.1.** *Any automorphism of the algebra $\mathfrak{R}$ has the following form:*

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n!}b^ie_i+x,\quad \phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{(i-j)!}a^jb^{i-j}e_i,\quad 1\le j\le n.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{L}_1$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=ae_1,\quad \phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{(-1)^{i+j-2}}{(i-j)!}a^{j-1}b^{i-j}e_i,\quad 2\le j\le n,$$

$$\phi(x)=be_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{(i-1)!}b^{i-1}e_i+x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{L}_2(\alpha)$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=ae_1,\quad \phi(e_2)=\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{(i-2)!}\frac{c}{a}b^{i-2}e_i,$$

$$\phi(x) = be_1 + x, \quad \phi(e_j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i+j-4}}{(i-j)!} ca^{j-3} b^{i-j} e_i, \quad 3 \le j \le n.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{L}_3$ has the following form:*

$$\phi(e_1) = ae_1, \quad \phi(x) = be_1 + x,$$

$$\phi(e_j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i+j-2}}{(i-j)!} a^{j-n} b^{i-j} e_i, \quad 2 \le j \le n.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{L}_4$ has the following form:*

$$\phi(e_1) = ae_1 - ace_n, \quad \phi(x) = de_1 + c(e_{n-1} - de_n) + x,$$

$$\phi(e_j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i+j-2}}{(i-j)!} a^{j-2} d^{i-j} be_i, \quad 2 \le j \le n.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{L}_5$ has the following form:*

$$\phi(e_1) = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i, \quad \phi(x) = x,$$

$$\phi(e_j) = (1 + a_2)e_j + \sum_{i=j+1}^{n} a_{i-j+2} e_i, \quad 2 \le j \le n.$$

Proof. The proof follows directly from the definition of an automorphism. $\square$

In the following Proposition we give the description of 2-cocycles of the solvable Leibniz algebras $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}_\mathrm{i}$, $1 \le i \le 5$.

**Proposition 2.2.** *Any element $\psi \in Z^2(L, \mathbb{C})$ is formed by the following, where $L \in \{\mathfrak{R}, \mathfrak{L}_\mathrm{i}, 1 \le i \le 5\}$:*

$$Z^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) : \begin{cases} \psi(e_i, e_1) = b_{i,1}, & 1 \le i \le n-1, \\ \psi(e_i, x) = -\frac{1}{i} b_{i-1,1}, & 2 \le i \le n, \\ \psi(e_1, x) = -\psi(x, e_1) = b_{1,n+1}, & \psi(x, x) = b_{n+1,n+1}. \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{L}_1, \mathbb{C}) : \begin{cases} \psi(e_i, e_1) = b_{i,1}, & 2 \le i \le n-1, \\ \psi(e_i, x) = \frac{1}{i-1} b_{i-1,1}, & 3 \le i \le n, \\ \psi(e_2, x) = b_{2,n+1}, & \psi(e_1, x) = b_{1,n+1}, \\ \psi(x, e_1) = -b_{2,n+1} - b_{1,n+1}, & \\ \psi(x, x) = b_{n+1,n+1}. & \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{L}_2(\alpha), \mathbb{C}) : \begin{cases} \psi(e_i, e_1) = b_{i,1}, & 2 \le i \le n-1, \\ \psi(e_i, x) = \frac{1}{i-1+\alpha} b_{i-1,1}, & 3 \le i \le n, \\ \psi(e_2, x) = b_{2,n+1}, & \psi(e_1, x) = b_{1,n+1}, \\ \psi(x, e_1) = -b_{1,n+1}, & \psi(x, x) = b_{n+1,n+1}. \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{L}_3, \mathbb{C}) : \begin{cases} \psi(e_i, e_1) = b_{i,1}, & 2 \le i \le n-1, \\ \psi(e_i, x) = \frac{1}{i-n} b_{i-1,1}, & 3 \le i \le n-1, \\ \psi(e_2, x) = b_{2,n+1}, & \psi(e_1, x) = b_{1,n+1}, \\ \psi(x, e_1) = -b_{1,n+1}, & \psi(x, x) = b_{n+1,n+1}. \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{L}_4, \mathbb{C}) : \begin{cases} \psi(e_i, e_1) = b_{i,1}, & 2 \le i \le n-1, \\ \psi(e_i, x) = \frac{1}{i+1-n} b_{i-1,1}, & 3 \le i \le n-2, \\ \psi(e_2, x) = b_{2,n+1}, & \psi(e_1, x) = b_{1,n+1}, \\ \psi(e_n, x) = b_{n-1,1}, & \psi(x, e_1) = -b_{1,n+1} + b_{n-1,1}, \\ \psi(x, x) = b_{n+1,n+1}. & \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{L}_5(\alpha_4,\dots,\alpha_n),\mathbb{C}):\begin{cases}\psi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\le i\le n-1,\\ \psi(e_1,x)=b_{1,n+1}, & \psi(e_2,x)=b_{2,n+1},\\ \psi(e_3,x)=b_{2,1}+\sum\limits_{i=4}^{n-1}\alpha_i b_{i,1}, & \\ \psi(e_i,x)=b_{i-1,1}+\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+3}b_{j,1}, & 4\le i\le n,\\ \psi(x,e_1)=b_{n+1,1}, & \psi(x,x)=b_{n+1,n+1}.\end{cases}$$

Proof. The proof follows directly from the definitions of the 2-cocycle. □

Now we determine the elements of the space $B^2(\mathfrak{L},\mathbb{C})$. Putting

$$f(e_i)=c_i y,\quad 1\le i\le n,\quad f(x)=c_{n+1}y,$$

considering

$$df(a,b)=f\big([a,b]\big),$$

we have following proposition:

**Proposition 2.3.** *Any element $df\in B^2(L,\mathbb{C})$ is formed by the following, where $L\in\{\mathfrak{R},\mathfrak{L}_i,1\le i\le 5\}$:*

$$B^2(\mathfrak{R},\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ df(e_i,x)=-ic_i, & 1\le i\le n-1,\\ df(x,e_1)=c_1.\end{cases}$$

$$B^2(\mathfrak{L}_1,\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ df(e_i,x)=(i-1)c_i, & 2\le i\le n,\\ df(e_1,x)=c_1 & df(x,e_1)=-c_1-c_2.\end{cases}$$

$$B^2(\mathfrak{L}_2(\alpha),\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ df(x,e_i)=(i-1+\alpha)c_i, & 2\le i\le n,\\ df(x,e_1)=-c_1, & df(e_1,x)=c_1.\end{cases}$$

$$B^2(\mathfrak{L}_3,\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ df(e_i,x)=(i-n)c_i, & 2\le i\le n,\\ df(e_1,x)=c_1, & df(x,e_1)=-c_1,\\ df(x,x)=c_n.\end{cases}$$

$$B^2(\mathfrak{L}_4,\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ df(e_i,x)=(i+1-n)c_i, & 2\le i\le n,\\ df(x,e_1)=-c_1, & df(e_1,x)=c_1+c_n,\\ df(x,x)=-c_{n-1}.\end{cases}$$

$$B^2(\mathfrak{L}_5,\mathbb{C}):\begin{cases}df(e_i,e_1)=c_{i+1}, & 2\le i\le n-1,\\ df(e_1,e_1)=c_3, & df(e_1,x)=c_2+\sum\limits_{i=4}^{n-1}\alpha_i c_i,\\ df(e_i,x)=c_i+\sum\limits_{j=i+2}^{n}\alpha_{j-i+2}c_j, & 2\le i\le n.\end{cases}$$

Proof.

In the following theorem we give all one-dimensional extensions of the solvable Leibniz algebra $\mathfrak{R},\mathfrak{L}_i,\quad 1\le i\le 5$.

**Theorem 2.1.** *Any one-dimensional central extension of the Leibniz algebra $\mathfrak{R}$ is isomorphic to the following algebra*

$$\widetilde{\mathfrak{R}}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [x,e_1]=e_1, & [x,x]=y,\\ [e_i,x]=-ie_i & 1\le i\le n.\end{cases}$$

*Any one-dimensional central extension of the Leibniz algebra $\mathfrak{L}_i$, $1 \le i \le 5$ is isomorphic to the following non-isomorphic algebras, respectively:*

$$\widetilde{\mathfrak{L}_1}(\alpha): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, & \\ [e_1, x] = e_1, & [x,x] = y \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \le i \le n, \end{cases} \qquad \widetilde{\mathfrak{L}}_2(\alpha): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & [e_1, x] = e_1, \\ [x,x] = y, & \\ [e_i, x] = (i-1+\alpha)e_i, & 2 \le i \le n, \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_3: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-n)e_i, & 2 \le i \le n, \\ [x,x] = e_n + y, & \end{cases} \qquad \widetilde{\mathfrak{L}}_4: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1 + e_n, & \\ [e_i, x] = (i+1-n)e_i, & 2 \le i \le n, \\ [x,x] = y - e_{n-1}, & \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_5(\alpha_4, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 + \gamma_1 y, & \\ [x, e_1] = \gamma_2 y, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [e_1, x] = e_2 + \sum\limits_{i=4}^{n-1} \alpha_i e_i + \gamma_3 y, & \\ [e_i, x] = e_i + \sum\limits_{j=i+2}^{n} \alpha_{j-i+2} e_j, & 2 \le i \le n, \\ [x,x] = \gamma_4 y. & \end{cases}$$

the first non vanishing element of $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ can be scaled to 1.

Proof. We only give the proof of the Theorem for the algebra $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Since $\dim Z^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) = n+1$, $\dim B^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) = n$ we have $\dim H^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) = 1$ and a basis of $H^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$H^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C}) = \langle \overline{\psi} \rangle, \quad \psi(x,x) = y.$$

An automorphism $\phi \in Aut(\mathfrak{R})$ acts to the space $H^2(\mathfrak{R}, \mathbb{C})$ as follows:

$$(\phi)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \end{pmatrix} \cdot \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \end{pmatrix},$$

where we consider the basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$.

We obtain that orbits of $\langle \gamma \overline{\psi} \rangle$ is a one dimensional vector space span$\{\overline{\psi}\}$. Therefore, we get the algebra $\widetilde{\mathfrak{R}}$. The proof of Theorem 2.8 is complete. □

Now we obtain all one-dimensional extensions of solvable Leibniz algebras whose nilradical is isomorphic to the algebra $F_n^2$.

First, we give the description of the group of automorphisms of these algebras.

**Proposition 2.4.** *Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_1(\alpha)$ has the following form:*

$$\phi(e_1) = a_1 e_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_1 b_1^{i-2}}{(i-2)!} e_i, \quad \phi(e_2) = e_2,$$

$$\phi(e_j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{(i-j)!} a_1^{j-1} b_1^{i-j} e_i, \quad 3 \le j \le n, \quad \phi(x) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{(i-1)!} b_1^{i-1} e_i + x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_2(\alpha)$ has the following form:*

$$\phi(e_1) = a_1 e_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_1 c_1^{i-2}}{(i-2)!} e_i, \quad \phi(e_2) = b_2 e_2,$$

$$\phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{(i-j)!}a_1^{j-1}c_1^{i-j}e_i, 3\leq j\leq n,\quad \phi(x)=c_1e_1+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{(i-1)!}c_1^{i-1}e_i+x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_3$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=a_1e_1+\sum_{i=3}^{n}\frac{a_1c_1^{i-2}}{(i-2)!}e_i,\quad \phi(e_2)=a_1^{n-1}e_2,$$

$$\phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{(i-j)!}a_1^{j-1}c_1^{i-j}e_i,\quad 3\leq j\leq n,\quad \phi(x)=c_1e_1+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{(i-1)!}c_1^{i-1}e_i+x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_4(\alpha)$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=a_1e_1+\sum_{i=3}^{n}\frac{a_1c_1^{i-2}}{(i-2)!}e_i,\quad \phi(e_2)=b_2e_2,$$

$$\phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{(i-j)!}a_1^{j-1}c_1^{i-j}e_i,\quad 3\leq j\leq n,\quad \phi(x)=c_1e_1+c_2e_2+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{(i-1)!}c_1^{i-1}e_i+x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_5(\alpha)$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=a_1e_1+a_2e_2+\sum_{i=3}^{n}\frac{a_1c_1^{i-2}}{(i-2)!}e_i,\quad \phi(e_2)=b_2e_2,$$

$$\phi(e_j)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{(i-j)!}a_1^{j-1}c_1^{i-j}e_i,\quad 3\leq j\leq n,\quad \phi(x)=c_1e_1+c_2e_2+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{(i-1)!}c_1^{i-1}e_i+x.$$

*Any automorphism of the algebra $\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\lambda,\delta)$ has the following form:*

$$\phi(e_1)=e_1+\sum_{i=3}^{n}a_ie_i,\quad \phi(e_2)=b_2e_2,$$

$$\phi(e_j)=e_j+\sum_{i=j+1}^{n}a_{i-j+2}e_i,\quad 3\leq j\leq n,\quad \phi(x)=c_ne_n+x.$$

Proof. The proof follows directly from the definition of an automorphism. □

In the following Propositions we give the description of 2-cocycles and second cohomology spaces of the solvable Leibniz algebras $\mathfrak{S}_i$, $1\leq i\leq 6$.

**Proposition 2.5.** *Any element $\psi\in Z^2(\mathfrak{S}_i, 1\leq i\leq 6,\mathbb{C})$ is formed by the following:*

$$Z^2(\mathfrak{S}_1(\alpha),\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\leq i\leq n-1,\quad i\neq 2\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\leq i\leq n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \varphi(e_2,e_2)=(1-\alpha)b_{2,2},\\ \varphi(e_1,x)=-\varphi(x,e_1)=b_{1,n+1}, & \varphi(e_2,x)=(1-\alpha)b_{2,n+1},\\ \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1}, & \varphi(x,e_2)=(1-\alpha)b_{n+1,2}.\end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_2(\alpha=1),\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\leq i\leq n-1,\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\leq i\leq n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \\ \varphi(e_2,x)=b_{2,n+1}, & \varphi(x,e_1)=b_{n+1,1},\\ \varphi(e_1,x)=-b_{n+1,1}, & \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1}.\end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_2(\alpha\neq 1),\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\leq i\leq n-1,\quad i\neq 2,\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\leq i\leq n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \\ \varphi(e_2,x)=b_{2,n+1}, & \varphi(x,e_1)=b_{n+1,1},\\ \varphi(e_1,x)=-b_{n+1,1}, & \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1}.\end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_3,\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\le i\le n-1,\quad i\neq 2\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\le i\le n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \\ \varphi(e_2,x)=b_{2,n+1}, & \varphi(x,e_1)=b_{n+1,1},\\ \varphi(e_1,x)=-b_{n+1,1}, & \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1}.\end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_4(\alpha),\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\le i\le n-1,\quad i\neq 2\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\le i\le n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1},\\ \varphi(x,e_2)=-\varphi(e_2,x)=b_{n+1,2}, & \\ \varphi(x,e_1)=-\varphi(e_1,x)=b_{n+1,1}. & \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_5,\mathbb{C}):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\le i\le n-1,\quad i\neq 2\\ \varphi(e_i,x)=-(i-1)b_{i-1,1}, & 4\le i\le n,\\ \varphi(e_3,e_{n+1})=-2b_{1,1}, & \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1},\\ \varphi(x,e_2)=-\varphi(e_2,x)=b_{n+1,2}, & \\ \varphi(x,e_1)=-\varphi(e_1,x)=b_{n+1,1}. & \end{cases}$$

$$Z^2(\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\lambda,\delta)):\begin{cases}\varphi(e_i,e_1)=b_{i,1}, & 1\le i\le n,\\ \varphi(e_i,x)=\sum\limits_{j=i}^{n}\alpha_{j-i+3}b_{j,1}, & 3\le i\le n,\\ \varphi(e_1,x)=b_{1,n+1}, & \varphi(x,e_1)=b_{n+1,1},\\ \varphi(e_2,x)=b_{2,n+1}, & \varphi(x,e_2)=\delta b_{2,n+1},\\ \varphi(x,x)=b_{n+1,n+1}. & \end{cases}$$

Proof. The proof follows directly from the definitions of the 2-cocycle. □

**Proposition 2.6.** *A basis of $H^2(\mathfrak{S}_{\mathrm{i}},1\le i\le 6,\mathbb{C})$ is formed by the following cocycle:*

- $\alpha=0,\quad H^2(\mathfrak{S}_1(\alpha),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{2,2}],[\Delta_{2,n+1}],[\Delta_{n+1,2}],[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $\alpha=1,\quad H^2(\mathfrak{S}_1(\alpha),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{2,n+1}]\rangle,$
- $\alpha=1,\quad H^2(\mathfrak{S}_2(\alpha),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{2,1}],[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $\alpha\neq 1,\quad H^2(\mathfrak{S}_2(\alpha),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $H^2(\mathfrak{S}_3,\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $H^2(\mathfrak{S}_4(\alpha),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $H^2(\mathfrak{S}_5,\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $\lambda=0,\quad H^2(\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\lambda,\delta),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n,n+1}+\alpha_3\Delta_{n,1}],[\Delta_{n+1,1}],[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle,$
- $\lambda\neq 0,\quad H^2(\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\lambda,\delta),\mathbb{C})=\langle[\Delta_{n+1,n+1}]\rangle.$

In the following theorem we give all one-dimensional extensions of the solvable Leibniz algebra $\mathfrak{S}_i, 1\le i\le 6$.

**Theorem 2.2.** *Any one-dimensional central extension of the Leibniz algebra $\mathfrak{S}_i,\ \ 1\le i\le 6$ is isomorphic to the following non-isomorphic algebras, respectively:*

$$\widetilde{\mathfrak{S}_1}^1:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [x,x]=y,\end{cases}\qquad \widetilde{\mathfrak{S}_1}^2:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [x,e_2]=y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_1}^3(\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=y,\\ [x,e_2]=\gamma y, & \gamma\neq -1,\end{cases}\qquad \widetilde{\mathfrak{S}_1}^4(\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=y,\\ [x,e_2]=-y, & [x,x]=\gamma y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_1}^5(\gamma_1,\gamma_2):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,e_2]=y\\ [x,e_2]=\gamma_1 y, & [x,x]=\gamma_2 y,\end{cases}\quad \widetilde{\mathfrak{S}_1}^6:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=y,\\ [x,x]=e_2.\end{cases}.$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_2}^1(\alpha):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=\alpha e_2,\\ [x,x]=y,\end{cases}\quad \widetilde{\mathfrak{S}_2}^2(\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_2,x]=e_2,\\ [e_2,e_1]=y, & [x,x]=\gamma y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_3}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [x,x]=y,\\ [e_2,x]=(1-n)e_2+e_n,\end{cases}\quad \widetilde{\mathfrak{S}_4}(\alpha):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_1,x]=-e_1,\\ [e_2,x]=-\alpha e_2, & [x,e_2]=\alpha e_2,\\ [x,x]=y, & \alpha\neq 0,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_5}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [e_1,x]=-e_1-e_2, & [e_2,x]=-e_2,\\ [x,e_1]=e_1+e_2, & [x,e_2]=e_2,\\ [x,x]=y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_6}^1(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\delta,\lambda):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_2,x]=e_2,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i e_i,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+2}e_j, & 3\le i\le n-1,\\ [x,x]=\lambda e_n, & [x,e_2]=\delta e_2,\quad \delta\in\{0,-1\},\\ [x,e_1]=y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_6}^2(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\delta,\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_2,x]=e_2,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i e_i, & [x,e_2]=\delta e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+2}e_j, & 3\le i\le n-1,\\ [x,e_1]=\gamma y, & [x,x]=y,\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}_6}^3(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\delta,\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_2,x]=e_2,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_i e_i, & [x,e_2]=\delta e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+2}e_j, & 3\le i\le n-1,\\ [x,e_1]=\gamma y, & [e_n,e_1]=y,\\ [e_n,x]=\alpha_3 y,\end{cases}$$

Proof. Now we show the proof for the algebras $\mathfrak{S}_1(\alpha)$, $\mathfrak{S}_2(\alpha)$ and $\mathfrak{S}_6(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_n,\delta,\lambda)$.

**Extension of $\mathfrak{S}_1(\alpha)$.** First we consider the case of $\alpha=0$. Let us use following notation

$$\nabla_1=[\Delta_{2,2}],\quad \nabla_2=[\Delta_{2,n+1}],\quad \nabla_3=[\Delta_{n+1,2}],\quad \nabla_4=[\Delta_{n+1,n+1}].$$

Since

$$\phi^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \gamma_3 & \dots & \gamma_4 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1^* & \dots & \gamma_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \gamma_3^* & \dots & \gamma_4^* \end{pmatrix},$$

we have that the action of $\operatorname{Aut}(\mathfrak{S}_1(\alpha))$ on the subspace $\langle \sum\limits_{i=1}^{4} \gamma_i \nabla_i \rangle$ is given by $\langle \sum\limits_{i=1}^{4} \gamma_i^* \nabla_i \rangle$, where

$$\gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = \gamma_2 + b_2\gamma_1, \quad \gamma_3^* = \gamma_3 + b_2\gamma_1, \quad \gamma_4^* = \gamma_4 + b_2^2\gamma_1 + b_2(\gamma_2 + \gamma_3).$$

We have the following subcases:

1. if $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_4 \neq 0$, then we have the representative $\langle \nabla_4 \rangle$;
2. if $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$, then choosing $b_2 = -\frac{\gamma_4}{\gamma_3}$, we have the representative $\langle \nabla_3 \rangle$;
3. if $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$ and $\gamma_2 + \gamma_3 \neq 0$, then choosing $b_2 = -\frac{\gamma_4}{\gamma_2+\gamma_3}$ and we have the representative $\langle \nabla_2 + \gamma_3 \nabla_3 \rangle_{\gamma_3 \neq -1}$;
4. if $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$ and $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, then we have the representative $\langle \nabla_2 - \nabla_3 + \gamma_4 \nabla_4 \rangle$;
5. if $\gamma_1 \neq 0$, then choosing $b_2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, have the representative $\langle \nabla_1 + \gamma_3 \nabla_3 + \gamma_4 \nabla_4 \rangle$.

Hence, we get the orbits $\langle \nabla_4 \rangle$, $\langle \nabla_3 \rangle$, $\langle \nabla_2 + \gamma_3 \nabla_3 \rangle_{\gamma_3 \neq -1}$, $\langle \nabla_2 - \nabla_3 + \gamma_2 \nabla_4 \rangle$, $\langle \nabla_1 + \gamma_3 \nabla_3 + \gamma_4 \nabla_4 \rangle$ and the algebras $\mathfrak{S}_1^1$, $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{S}_1^3(\gamma)$, $\mathfrak{S}_1^4(\gamma)$, $\mathfrak{S}_1^5(\gamma_1, \gamma_2)$.

**Case 2.** Let $\alpha = 1$. In this case we have $\dim H^2(\mathfrak{S}_1) = 1$ and a basis of $H^2(\mathfrak{S}_1, \mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$H^2(\mathfrak{S}_1, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{2,n+1}] \rangle.$$

By performing the same operations as above, we get the algebra $\widetilde{\mathfrak{S}_1}^6$.

**Extension of $\mathfrak{S}_2(\alpha)$.** We consider following cases:

**Case 1.** Let $\alpha = 1$, then we use the following notation

$$\nabla_1 = [\Delta_{2,1}], \quad \nabla_2 = [\Delta_{n+1,n+1}].$$

Since

$$\phi^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_2 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1^* & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_2^* \end{pmatrix},$$

we have that the action of $\operatorname{Aut}(\mathfrak{S}_2(\alpha))$ on the subspace $\langle \gamma_1 \nabla_1 + \gamma_2 \nabla_2 \rangle$ is given by $\langle \gamma_1^* \nabla_1 + \gamma_2^* \nabla_2 \rangle$, where

$$\gamma_1^* = a_1 b_2 \gamma_1, \quad \gamma_2^* = \gamma_2.$$

Since we are interested only in new algebras, we have the following cases:

1. if $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, then we have the representative $\langle \nabla_2 \rangle$;
2. if $\gamma_1 \neq 0$, then choosing $b_2 = \frac{1}{a_1 \gamma_1}$, we have the representative $\langle \nabla_1 + \gamma_2 \nabla_2 \rangle$.

Hence, we get the orbits $\langle \nabla_2 \rangle$ and $\langle \nabla_1 + \gamma_2 \nabla_2 \rangle$ and the algebras $\widetilde{\mathfrak{S}_2}^1(\alpha = 1)$, $\widetilde{\mathfrak{S}_2}^2(\gamma)(\alpha = 1)$.

**Case 2.** Let $\alpha \neq 1$. In this case we have $\dim H^2(\mathfrak{S}_2) = 1$ and a basis of $H^2(\mathfrak{S}_2, \mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$H^2(\mathfrak{S}_2, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{n+1,n+1}] \rangle.$$

By performing the same operations as above, we get the algebra $\widetilde{\mathfrak{S}_2}^1(\alpha)$ for $\alpha \neq 1$.

**Extension of $\mathfrak{S}_6(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \lambda, \delta)$.** We consider following cases:

**Case 1.** Let $\lambda = 0$, then we use the following notation

$$\nabla_1 = [\alpha_3 \Delta_{n,n+1} + \Delta_{n,1}], \quad \nabla_2 = [\Delta_{n+1,1}], \quad \nabla_3 = [\Delta_{n+1,n+1}].$$

Since

$$\phi^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & 0 & \dots & \alpha_3\gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 & \dots & \gamma_3 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^* & 0 & \dots & \alpha_3\gamma_1^* \\ \gamma_2^* & 0 & \dots & \gamma_3^* \end{pmatrix},$$

we have that the action of $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \lambda, \delta))$ on the subspace $\langle \sum\limits_{i=1}^{3} \gamma_i \nabla_i \rangle$ is given by $\langle \sum\limits_{i=1}^{3} \gamma_i^* \nabla_i \rangle$, where

$$\gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = \gamma_2 + c_n\gamma_1, \quad \gamma_3^* = \gamma_3 + \alpha_3 c_n \gamma_1.$$

We have the following cases:

1. if $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, then we have the representative $\langle \nabla_2 \rangle$;
2. if $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$, then we have the representative $\langle \gamma_2\nabla_2 + \nabla_3 \rangle$;
3. if $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = \alpha_3\gamma_3$, then choosing $c_n = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, we have the representative $\langle \nabla_1 + \gamma_3\nabla_3 \rangle$.

Hence, we get the orbits $\langle \nabla_2 \rangle$, $\langle \gamma_2\nabla_2 + \nabla_3 \rangle$, $\langle \nabla_1 + \gamma_3\nabla_3 \rangle$, and the algebras $\widetilde{\mathfrak{S}_6}^1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \delta, 0)$, $\widetilde{\mathfrak{S}_6}^2(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \delta, \gamma)$ and $\widetilde{\mathfrak{S}_6}^3(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \delta, \gamma)$ algebras.

**Case 2.** Let $\lambda \neq 0$. In this case we have $\dim H^2(\mathfrak{S}_6) = 1$ and a basis of $H^2(\mathfrak{S}_6, \mathbb{C})$ is formed by the following cocycles

$$H^2(\mathfrak{S}_6, \mathbb{C}) = \langle [\Delta_{n+1,1}] \rangle.$$

By performing the same operations as above, we get the algebra $\widetilde{\mathfrak{S}_6}^1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n, \delta, \lambda)_{\lambda \neq 0}$.

Like that we get extensions of $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4(\alpha), \mathfrak{S}_5(\alpha)$ algebras. The proof of Theorem 2.12 is complete. $\square$

# References


1. Adashev J., Camacho L., Omirov B. Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras. J. Algebra. 2017. Vol.479. pp. 461-486.
2. Ayupov Sh.A., Omirov B. A. On some classes of nilpotent Leibniz algebras. Sib. Math.J. 2001. Vol. 42, Issue 1. pp. 15-24.
3. Barnes D. W. On Levi's theorem for Leibniz algebras.Bull. Aust. Math. Soc. 2012 Vol. 86, Issue 2. pp. 184-185.
4. Camacho L. M., Navarro R. M. , Omirov B. A. Central extensions of some solvable Leibniz superalgebras. Linear Algebra and its Applications. 2003. Vol. 656, Issue 1. pp. 63-91.
5. Karimjonov I.A. Classification of Leibniz algebras with a given nilradical and with some corresponding Lie algebras. PhD thesis. Santiago de Compostella. 2017.
6. Khudoyberdiyev A. Kh., Sheraliyeva S. A. Extensions of solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradical. arXiv:2202.10718.2022.
7. Loday, J. -L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. 1993. Vol.39, Issue 3-4. pp.269–293.
8. Rakhimov I. S., Langari S. L., Langari M. B. On central extensions of null-filiform Leibniz algebras. J. Algebra. 2009. Vol.3, Issue 6. pp. 271-280
9. Skjelbred T., Sund T. Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes. C R Acad Sci Paris Ser A-B. 1978. Vol.286, Issue 5. pp.241-242.
10. Sund T.On the structure of solvable Lie algebras. Mathematica Scandinavica journal. 1979. Vol.44, Isuue 2. pp.235-242.

Ba'zi yechiladigan Leybnits algebralarining kengayishi haqida

**Sheraliyeva Surayyo**

Ushbu maqolada nilradikali null-filiform va tabiiy usulda gradiurlangan filiform Leibniz algebralariga izomorf bo'lgan yechiluvchan Leibniz algebralarning bir o'lchamli kengaytmalari aniqlangan.

**Kalit so'zlar:** Leibniz algebrasi; yechiluvchanlik; nilpotentlik; filiform Leibniz algebrasi; markaziy kengaytma.

О расширении некоторых разрешимых алгебр Лейбница

**Шералиева Сурайё**

В данной работе мы рассматриваем одномерные расширения разрешимых алгебр Лейбница с нуль-филиформными и естественным образом градуированными филиформными нильрадикалами.

**Ключевые слова:** Алгебра Лейбница; разрешимость; нильпотентность; филиформные алгебры Лейбница; центральное расширение.

**Received: 03/03/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Sheraliyeva S. Extension of some solvable Leibniz algebras. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 78-89

# Cauchy Problem for Subdiffusion Equation on the metric graph in the form of a series of bridges

**Sobirov Zarifboy**
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Tashkent, Uzbekistan
sobirovzar@gmail.com

**Saparbayev Rajapboy**
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Tashkent, Uzbekistan
rajapboy1202@gmail.com

## Abstract

This work is devoted to the Cauchy problem for a time-fractional differential equation on the metric graph that consists of three incoming bonds, a series of 3-bridges that connect the consequent vertices, and three outgoing bonds. The problem is reduced to the number of IBVPs in finite, semi-infinite intervals and the Cauchy problem on the line. We found an exact solution to the problem in the form of integral representation via given data. The uniqueness of the solution is proved using a-prior estimate for the solution.

**Keywords:** Fractional derivatives; Fractional PDE; subdiffusive equation; time-fractional heat equation; integral representation of the solution.

**MSC 2020:** 35R11

## 1. Introduction

Fractional partial differential equations have become more popular over the years. In particular, initial-boundary value problems (IBVP) and Cauchy problem for time fractional differential equations are studied with great interest. There are works (see [1, 2, 3, 4]) showing that models of anomalous dispersion and diffusion processes can be constructed using a fractional-order equation. In [5, 6] was considered the Cauchy problem for the time-fractional diffusion equation with the general Caputo-type differential operator proposed by Kochubei and was proved the existence and uniqueness theorem. In [7] was proved the uniqueness and existence theorem for an initial-boundary value problem for a fractional diffusion equation with Caputo time-fractional derivative. In [8] was constructed the fundamental solution of the subdiffusion equation with Dzhrbashyan-Nersesyan fractional derivative.

Branched thin structures and metric graphs are widely used as a model in theoretical research on applied problems. They are used in the study of many complex systems from physics, biology, ecology, sociology, economics and finance [9, 10]. In particular, ladder-type graphs can be used as a mathematical model in the theoretical study of RNA chains [11, 12]. It is also known that the initial and initial-boundary value problems on metric graphs are used for the theoretical study of diffusion processes in branched structures and networks [13, 14, 15].

In this paper we consider the time-fractional subdiffusion equation on the metric graph in the form of three incoming semi-infinite edges followed by a series of bridges and three outgoing bonds. Each of the bridges consists of three equal, finite-length edges. On the branching points (vertices) we use $\delta-$ type gluing conditions, which guarantee flux conservation in subdiffusive process. Such kind conditions also called to be Kirchhoff conditions at the vertex points [14, 15]. We notice, that the subdiffusion equation on such a graph is not considered due to the present time.

The main purpose of the work is to construct an exact integral representation of the solution, which gives us more precise understanding on the scattering at vertices (branching points of the graph). We found a transformation that separates the part of the solution that corresponds to the transmission via bridges and the part that stay on each bridge series continuing the diffusion process isolated in it. It is clear that such kind of solutions are powerful tool to understand diffusion processes in branched structures that give an opportunity to understand scattering processes in more general types of branched structures.

## 2. Preliminaries

In modern mathematics, fractional derivatives are introduced in different ways. For example, the derivatives of Hilfer, Dzhrbashyan-Nersesyan, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu, Riesz, Davidson and others are known [2, 3]. In this paper, we use the *Riemann-Liouville fractional integral* is defined by the expression

$$D_{0t}^{-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(\xi)}{|t-\xi|^{1-\alpha}}d\xi,\ 0<\alpha<1.$$

The *Riemann-Liouville fractional derivative* is defined by

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}}d\xi,\ 0<\alpha<1$$

and *Caputo fractional derivative* is defined by (see [16])

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u'(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}}d\xi,\ 0<\alpha<1,$$

where $\Gamma(x)$ is the Gamma function. The function

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)},\ \alpha>0, \alpha>\beta.$$

is called *Wright type function* [16]. Wright type function can be represented by the integral

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\omega\pi)} e^t t^{-\delta} E_{\frac{1}{\alpha}}(zt^{\beta};\mu)dt,\ 1-\omega\beta>\frac{\alpha}{2},\ \frac{1}{2}<\omega\le 1$$

where integral is taken along the Hankel contour [16].

Now we give some results from [16].

**Lemma 2.1.** (see [16]) If $\delta \ge 0$, then for any positive $x$ the inequalities

$$e_{1,\beta}^{1,\delta}(-x) \le C_n e_{1,\beta}^{1,1}(-x) \le C_n \exp(-x^{\frac{1}{1-\beta}}\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}(1-\beta)) \tag{1}$$

where $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\beta^k x^k}{\Gamma(\delta+k(1-\beta))}$ , and $n \in N\cup\{0\}$ is selected from the condition $\delta + n(1-\beta) \ge 1$.

The solution of the Cauchy problem for the time-fractional diffusion equation.

**Theorem 2.1.** (see [16]) Let $n-1<\alpha\le n$, $n\in\{1,2\}$, $\tau_k(x)\in C(R)$, $1\le k\le n$, $y^{n-\alpha}f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(x,y)$ satisfy the Holder condition with respect to the variable $x$, and the relations

$$\lim_{|x|\to\infty}\tau_k(x)\exp(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}) = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} y^{n-\alpha}f(x,y)\exp(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}) = 0, \tag{2}$$

where $\rho < (1-\beta)\left(\frac{\beta}{T}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$, and the convergence in (2) is uniform on the set $\{y\in(0;T)\}$.Then there exists a regular solution to equation $(u(x,y))_{xx} - D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = f(x,y)$, in the domain $R\times[0,T]$ satisfying the boundary conditions $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) = \tau_k(x)$, $1\le k\le n$, $n-1<\alpha\le n$ and it has the form

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k(x)y^{\beta-k}e_{1,\beta}^{1,\beta-k+1}(-\frac{|x-s|}{y^{\beta}})ds + \Phi(x,y), \tag{3}$$

where

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)(y-t)^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}(-\frac{|x-s|}{(y-t)^{\beta}})dsdt.$$

**Theorem 2.2.** (see [16]) Let $0 < \alpha \le 1$, $y^{1-\alpha}\varphi_0(y), y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C\,[0;b]\,, \tau(x) \in C\,[0;a]\,, y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(x,y)$ satisfy the Holder condition with respect to the variable $x$, and the matching conditions are met

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\varphi_0(y) = \tau(0), \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\varphi_1(y) = \tau(a).$$

Then there is a unique regular solution to the equation $(u(x,y))_{xx} - D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = f(x,y)$, in the domain $[0,a]\times[0,b]$ satisfying the boundary conditions $u(0,y) = \varphi_0(y), u(a,y) = \varphi_1(y), 0 < y < b, \lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \tau(x), 0 < x < a$, $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \tau(x)-$ preset functions. The solution has the form

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_0(y)G_\xi(x,y,0,\eta)d\eta - \int_0^y \varphi_1(y)G_\xi(x,y,a,\eta)d\eta$$

$$+\int_0^a \tau(\xi)G_\xi(x,y,\xi,0)d\xi - \int_0^y\int_0^a f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

where

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2na|}{(y-\eta)^{\beta}}\right) - e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2na|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right]$$

and $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

## 3. Formulation of a problem

Let the graph consist of three incoming edges, in which the coordinates are set from $-\infty$ to 0, a series of loops, each of the series is associated with segments $[L_{i-1}; L_i]$, $i = \overline{1, n-1}$, respectively, and outgoing edges where coordinates are set from $L_{n-1}$ to $\infty$. The edges of the graph are denoted by $B_{ij} = \{x_{ij} : L_{i-1} \le x \le L_i\}$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,3}$, where $L_0 = 0$, $L_{-1} = -\infty$, $L_n = +\infty$ (see Fig. 1). Further, we will use $x$ instead of $x_{ij}, i = \overline{0,n}, j = \overline{1,3}$. On each bond $B_{ij}$ of the graph we consider the time fractional subdiffusion equation

$$D_{0t}^{\alpha}u_{ij}(x,t) - (u_{ij}(x,t))_{xx} = f_{ij}(x,t), 0 < t < T,\ x \in B_{ij}, 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

with the following initial conditions

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_{ij}(x,0) = \varphi_{ij}(x), x \in B_{ij}, \tag{5}$$

asymptotic conditions at infinity

$$\lim_{x\to -\infty} u_{0j}(x,t) = \lim_{x\to\infty} u_{nj}(x,t) = 0, \tag{6}$$

and the following gluing (Kirchhoff) conditions at the vertices

$$u_{ij}(L_i,t) = u_{i+1,k}(L_i,t), t \in [0,T], j \ne k = \overline{1,3}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{3}(u_{ik}(L_i,t))_x = \sum_{k=1}^{3}(u_{i+1,k}(L_i,t))_x,\ i = \overline{0,n-1}\ ,\ j = \overline{1,3}. \tag{8}$$

**Problem** consists of finding the regular solutions of the equation (4), satisfying conditions (5) – (8). By the regular solution we mean the solution that has enough smoothness to satisfy the equation, initial, boundary, and vertex conditions).

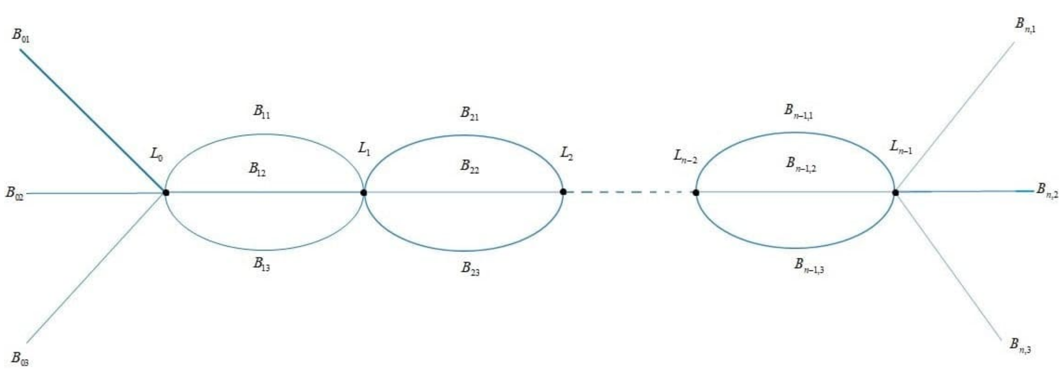


*Figure.1. Metric graph in the form of a series of bridges.*

## 4. Uniqueness of the solution

$$u = (u_{ij})_{i=\overline{0,n},\, j=\overline{1,3}},\ f = (f_{ij})_{i=\overline{0,n},\, j=\overline{1,3}},\ \varphi = (\varphi_{ij})_{i=\overline{0,n},\, j=\overline{1,3}}.$$

We define the norm of a matrix function on the following form

$$||u||^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{B_{ij}} u_{ij}^2 dx.$$

**Theorem 4.1.** *Let $\varphi_{ij}(x) \in C(\overline{B_{ij}})$, $f_{ij}(x,t) \in C^{0,1}(\overline{B_{ij}} \times [0,T])$. Then the considered problem has at most one solution which satisfies the following a-prior estimate*

$$\left|\left|D_{0t}^{\alpha-1}u\right|\right|^2 \le E_\alpha(t^\alpha)\cdot||\varphi||^2 + \Gamma(\alpha)\cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) D_{0t}^{-\alpha}\left|\left|D_{0t}^{\alpha-1}f\right|\right|^2.$$

Proof. Let

$$\vartheta_{ij}(x,t) = D_{0t}^{\alpha-1}u_{ij}(x,t).$$

For these functions

$$\partial_{0t}^\alpha \vartheta_{ij}(x,t) - (\vartheta_{ij}(x,t))_{xx} = D_{0t}^{\alpha-1} f_{ij}(x,t) = \widetilde{f_{ij}}(x,t),\ x \in B_{ij}, 0 < t \le T$$

holds true. Considering the next inequality (see [17])

$$\vartheta_{ij}\partial_{0t}^\alpha \vartheta_{ij} \ge \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha {\vartheta_{ij}}^2,$$

we get

$$\int\limits_{B_{ij}} \partial_{o,t}^\alpha {\vartheta_{ij}}^2 dx \le \int\limits_{B_{ij}} (2\vartheta_{ij}(\vartheta_{ij})_{xx} + 2\vartheta_{ij}\widetilde{f_{ij}})dx = 2\vartheta_{ij}(\vartheta_{ij})_x\Big|_{L_{i-1}}^{L_i} - \int\limits_{B_{ij}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\vartheta_{ij}\right)^2 dx + 2\int\limits_{B_{ij}} \vartheta_{ij}\widetilde{f_{ij}}dx.$$

Further, summing over all indexes, using the conditions (6) – (8) and Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, we obtain

$$D_{0,t}^\alpha||\vartheta||^2 \le |\vartheta|^2 + \left|\left|\widetilde{f}\right|\right|^2.$$

Taking the last inequality into account and using Grönwall-Bellman inequality [17], we get the inequality

$$\left|\left|D_{0t}^{\alpha-1}u\right|\right|^2 \le E_\alpha(t^\alpha)\cdot||\varphi|| + \Gamma(\alpha)\cdot E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha) D_{0t}^{-\alpha}\left|\left|D_{0t}^{\alpha-1}f\right|\right|^2. \tag{9}$$

The uniqueness of the solution follows from (9).

## 5. Existence of the solution

**Theorem 5.1.** *Let functions $\varphi_{ij}(x) \in C^1(\overline{B_{ij}}), i = \overline{0,n}, j = \overline{1,3}$, $f_{ij}(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{B_{ij}} \times [0,T])$ are bounded functions which satisfy conditions (7), (8). Then the solution to the considered problem has the following form*

$$u_{ij} = \int\limits_{B_{ij}} (G^- - G^+)\varphi_{ij}d\xi + \int\limits_{B_{ij}\times[0,T]} (G^- - G^+) f_{ij}d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{B_{ij}} G^+(\varphi_{i1}+\varphi_{i2}+\varphi_{i3})d\xi + \frac{1}{3}\int\limits_{B_{ij}\times[0,T]} G_1^+(f_{i1}+f_{i2}+f_{i3})d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_{kj}} G^-(\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\varphi_{k3})d\xi + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{B_{kj}\times[0,T]} G_1^-(f_{k1}+f_{k2}+f_{k3})d\xi d\tau$$

*for $i \in \{0,n\}, j = \overline{1,3}$ and*

$$u_{ij} = \int\limits_{B_{ij}} G^{1i}\varphi_{ij}d\xi + \int\limits_{B_{ij}\times[0,T]} G^{2i} f_{ij}d\xi d\tau + \frac{1}{3}\int\limits_{B_{ij}} G^{1i}(\varphi_{i1}+\varphi_{i2}+\varphi_{i3})d\xi +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{B_{ij}\times[0,T]} G^{2i}(f_{i1}+f_{i2}+f_{i3})d\xi d\tau+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{B_{kj}} G^{-}(\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\varphi_{k3})d\xi+$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{B_{kj}\times[0,T]} G_1^{-}(f_{k1}+f_{k2}+f_{k3})d\xi$$

*for* $i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,3}$.

*Here*

$$G^{-}=G(x-\xi,t),\ G^{+}=G(x+\xi,t), G_1^{-}=G(x-\xi,t-\tau),\ G_1^{+}=G(x+\xi,t-\tau)$$

*and*

$$G^{1i}=G_i(x,t,\xi,0)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}[G(x-\xi+2p(L_i-L_{i-1}),t)-G(x+\xi+2p(L_i-L_{i-1})-2L_i,t)],$$

$$G^{2i}=G_i(x,t,\xi,\eta)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}[G(x-\xi+2p(L_i-L_{i-1}),t-\eta)-G(x+\xi+2p(L_i-L_{i-1})-2L_i,t-\eta)].$$

*Here*

$$G(x,t)=\frac{1}{2}t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}(-\frac{|x|}{t^{\frac{\alpha}{2}}})$$

*is the fundamental solution of the equation* (4).

Proof.

We define $\tilde{u}_i=Au_i$, where $u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3})^T$, $\tilde{u}_i=(\tilde{u}_{i1},\tilde{u}_{i2},\tilde{u}_{i,3})^T$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Similarly, we put $\tilde{f}_i=Af_i$, $\tilde{\varphi}_i=A\varphi_i$.

We find the solution in two steps. In the beginning we will find unknown functions $\tilde{u}_{ij}(x,t),\ i=\overline{0,n},\ j=1,2,3$. Further, by solving the system of equations $\tilde{u}_i=Au_i$ we will find the solution to the considered problem.

Obviously that functions $\tilde{u}_{ij}(x,t),\ i=\overline{0,n},\ j=1,2,3$ satisfy the equation (4) in corresponding intervals of the coordinate and $0<t<T$. We explore several cases with respect to indices and find each of these functions on these cases.

**Case 1**. Let $i=0, j\in\{1,2\}$. We have the following boundary value problem on the semi-line.

Find the solution for the equation

$$D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{0j}(x,t)=(\tilde{u}_{0j}(x,t))_{xx}+\tilde{f}_{0j}(x,t),\ \ -\infty<x<0,\ 0<t\le T,$$

satisfying initial condition

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}\tilde{u}_{0j}(x,t)=\tilde{\varphi}_{0j}(x).$$

and following boundary condition

$$\lim_{x\to -0}\tilde{u}_{0j}(x,t)=0,\quad 0\le t\le,T$$

$$\lim_{x\to -\infty}\tilde{u}_{0j}(x,t)=0.$$

Let function $\vartheta(x,t)$ be the solution to the Cauchy problem for the equation

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+F(x,t)$$

with the following initial condition

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\Phi(x).$$

The solution to the Cauchy problem was constructed in the [16] and given by (3).

The following lemma directly follows from the even parity property of the function $G(x,t)$ with respect to $x$.

**Lemma 5.1.** If functions $\varphi(x)$ and $f(x,t)$ are the odd (even) functions by the variable $x$, then function $\vartheta(x,t)$ is the odd (even) with respect to the variable $x$ for every fixed $t$.

We define functions

$$\Phi(x)=\begin{cases}\tilde{\varphi}_{0j}(x), & -\infty<x\le 0,\\ -\tilde{\varphi}_{0j}(-x), & 0\le x<\infty\end{cases}$$

and

$$F(x,t)=\begin{cases}\tilde{f}_{0j}(x,t) & -\infty<x<0,\\ -\tilde{f}_{0j}(-x,t) & 0<x<\infty\end{cases}$$

for every fixed $j=1,2$. Then

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t)\cdot\Phi(\xi)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{0} G(x-\xi,t)\cdot\tilde{\varphi}_{0j}(\xi)d\xi-\int\limits_{0}^{+\infty} G(x-\xi,t)\cdot\tilde{\varphi}_{0j}(-\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\left(G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)\right)\cdot\tilde{\varphi}_{0j}(\xi)d\xi$$

and

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t-\tau)\cdot F(\xi,\tau)d\xi d\tau=\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{0}\left(G(x-\xi,t-\tau)-G(x+\xi,t-\tau)\right)\cdot\tilde{f}_{0j}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Taking the above relations into account we obtain

$$\tilde{u}_{0j}(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{0}\left(G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)\right)\tilde{\varphi}_{0j}(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{0}\left(G(x-\xi,t-\tau)-G(x+\xi,t-\tau)\right)\tilde{f}_{0j}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

**Case 2.** Let $i=\overline{0,n}, j=3$. In this case combining all intervals into one $(-\infty,\infty)$ we get following Cauchy problem for the equation.

Find the solution for the equation

$$D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}(x,t)=\left(\tilde{u}(x,t)\right)_{xx}+\tilde{f}(x,t),\ \ -\infty<x<+\infty,\ 0\le t\le T$$

Satisfying initial condition

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}\tilde{u}(x,t)=\tilde{\varphi}(x),\ \ -\infty<x<+\infty,$$

and following conditions at infinities

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tilde{u}(x,t)=0\ .$$

where

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}\tilde{u_{03}}(x,t), & -\infty<x\le L_0,\\ \tilde{u_{13}}(x,t), & L_0\le x\le L_1,\\ \cdot\ \cdot\\ \tilde{u_{n3}}(x,t), & L_{n-1}\le x<+\infty,\end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\tilde{\varphi_{03}}(x)\ , & -\infty<x\le L_0,\\ \tilde{\varphi_{13}}(x)\ , & L_0\le x\le L_1,\\ \cdot\ \cdot\\ \tilde{\varphi_{n3}}(x), & L_{n-1}\le x<+\infty\end{cases}$$

and

$$\tilde{f}(x,t)=\begin{cases}\tilde{f_{03}}(x,t), & -\infty<x\leq L_0,\\ \tilde{f_{13}}(x,t), & L_0\leq x\leq L_1,\\ \cdot\ \cdot \\ \tilde{f_{n3}}(x,t), & L_{n-1}\leq x<+\infty.\end{cases}$$

It is easy to see that the functions $\tilde{\varphi}(x)$ and $\tilde{f}(x,t)$ are continuous functions on the on their domains and tend to zero for $x\to\pm\infty$. From the vertex conditions it follows that $\tilde{u}(x,t)$ and its derivative with respect to $x$ should be continuous functions. Moreover, from the results in [16] it follows that the solution is regular. This solution has the following form.

$$\tilde{u}(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{0}G(x-\xi,t)\tilde{\varphi}_{03}(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{0}G(x-\xi,t-\tau)\tilde{f}_{03}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{L_{k-1}}^{L_k}G(x-\xi,t)\tilde{\varphi}_{k3}(\xi)d\xi+\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{L_{k-1}}^{L_k}G(x-\xi,t-\tau)\tilde{f}_{k3}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_{L_{n-1}}^{+\infty}G(x-\xi,t)\tilde{\varphi}_{n3}(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{L_{n-1}}^{+\infty}G(x-\xi,t-\tau)\tilde{f}_{n3}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

It is enough to take the restrictions of the function $\tilde{u}(x,t)$ to the corresponding domains to get the functions $\tilde{u}_{i3}(x,t),\ i=\overline{0,n}$.

**Case 3**. Let $i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,2}$. We consider following initial boundary value problems on the segment.

Find the solution for the equation

$$D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{ij}(x,t)=\left(\tilde{u}_{ij}(x,t)\right)_{xx}+\tilde{f}_{ij}(x,t),\ L_{i-1}<x<L_i,\ 0<t\leq T,$$

satisfying initial condition

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}\tilde{u}_{ij}(x,t)=\tilde{\varphi}_{0j}(x)$$

and the following boundary condition

$$\tilde{u}_{ij}(L_{i-1},t)=\tilde{u}_{ij}(L_i,t)=0.$$

The solution to the problem has the following form [16]

$$\tilde{u}_{ij}=\int\limits_{L_{i-1}}^{L_i}G_i(x,t,\xi,0)\tilde{\varphi}_{ij}(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{L_{i-1}}^{L_i}G_i(x,t,\xi,\eta)\tilde{f}_{ij}(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

**Case 4.** Let $i=n,\ j=\overline{1,2}$. In this case, we consider the following boundary value problem.

Find the solution for the equation

$$D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{nj}(x,t)=\left(\tilde{u}_{nj}(x,t)\right)_{xx}+\tilde{f}_{nj}(x,t),\ \mathrm{L}_{n-1}<x<+\infty,\ 0<t\leq T$$

that satisfies the initial condition

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}\tilde{u}_{n3}(x,t)=\tilde{\varphi}_{n3}(x)$$

and boundary condition

$$\lim_{x\to+\infty}\tilde{u}_{nj}(x,t)=0.$$

This case is similar to the **Case 1**. The solution has a form

$$\tilde{u}_{nj}(x,t)=\int\limits_{L_{n-1}}^{+\infty}\left(G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)\right)\tilde{\varphi}_{nj}(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^T \int_{L_{n-1}}^{+\infty} (G(x-\xi,t-\tau)-G(x+\xi,t-\tau))\tilde{f}_{nj}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Further, solving the equations $\tilde{u}_i = Au_i$, we get solution of the (4) — (8).

$$u_{ij} = \int_{B_{ij}} (G^- - G^+)\varphi_{ij}d\xi + \int_{B_{ij}\times[0,T]} (G^- - G^+)f_{ij}d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\int_{B_{ij}} G^+(\varphi_{i1}+\varphi_{i2}+\varphi_{i3})d\xi + \frac{1}{3}\int_{B_{ij}\times[0,T]} G_1^+(f_{i1}+f_{i2}+f_{i3})d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\int_{B_{kj}} G^-(\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\varphi_{k3})d\xi + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\int_{B_{kj}\times[0,T]} G_1^-(f_{k1}+f_{k2}+f_{k3})d\xi d\tau$$

for $i=0,n, j=\overline{1,3}$ and

$$u_{ij} = \int_{B_{ij}} G^{1i}\varphi_{ij}d\xi + \int_{B_{ij}\times[0,T]} G^{2i}f_{ij}d\xi d\tau + \frac{1}{3}\int_{B_{ij}} G^{1i}(\varphi_{i1}+\varphi_{i2}+\varphi_{i3})d\xi +$$

$$+\frac{1}{3}\int_{B_{ij}\times[0,T]} G^{2i}(f_{i1}+f_{i2}+f_{i3})d\xi d\tau + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\int_{B_{kj}} G^-(\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\varphi_{k3})d\xi +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\int_{B_{kj}\times[0,T]} G_1^-(f_{k1}+f_{k2}+f_{k3})d\xi$$

for $i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,3}$.

The uniform convergence of the integrals in the above expressions and their derivatives, which needed to satisfy the equation (4), directly follows from the estimate (1) and the theorems from [16] that was listed in preliminaries section of the present paper.

**6. Conclusion.** We investigated the Cauchy problem for the time-fractional wave equation in the graph, which has $n$ consequent vertices, and in each vertex, we have three incoming and three outgoing bonds. Each pair of consequent vertices $(i-1,i)$, $i=\overline{1,n}$, connected by three edges (bridges). We constructed an exact integral representation of the solution in terms of given data. From the constructed solution one can see terms that correspond to reflected and transmitted flow at each vertex point. Such a form of solution gives a big advantage in understanding diffusion processes in branched structures and scattering processes in more general types of metric graphs.

**7. Acknowledgments.** This research is partly supported by a Grant from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan (No:F-FA-2021-424).

## References

1. Kilbas A. A., Srivstava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. 2006. Amsterdam: Elsevier Science.
2. Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CIAM Cources and Lectures. 1997. Vol. 376. Wien: Springer.
3. Hilfer R. (Ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: WSPC. 2000.
4. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys. Reports. 2000. Vol. 339. pp. 1-77.
5. Ashurov R., Fayziev Yu.On the nonlocal problems in time for time-fractional subdiffusion equations. Fractal and Fractional. 2022. 6,41, pp. 1-21.
6. Chung-Sik., Sin. Cauchy Problem for General Time-Fractional Diffusion Equation.- Fractional calculus and Applied Analysis. 2020. Vol. 23, No 5, pp. 1554-1559.

7. Adam K., Masahiro Y. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time dependent coeffcients,Fractional Calculus and Applied Analysis, March 22. 2017.
8. Pskhu A.V. Multi-time fractional diffusion equation.Eur. Phys. J. Special Topics 222. 2013. pp.1939-1950.
9. Albert R., Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks. Rev. Mod.Phys. 2002. Vol.74, No.1.
10. Cohen R., Havlin S. Complex Networks: Structure, Robustness and Function. it Cambridge University Press, 2010.
11. Schlick T. Adventures with RNA Graphs. Methods. 2018. 143, pp. 16-33.
12. Khudayberganov G., Sobirov Z., Eshimbetov M. Unified transform method for the Schrodinger equation on a simple metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. 2019. 12, 4, pp. 412-420.
13. Kivshar Y.S., Agarwal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. 2003. Academic, San Diego.
14. Kottos T., Smilansky U. Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs. Annals of Physics. 1999. Vol. 274, Issue 1, pp.76-124.
15. Gnutzmann S., Smilansky U. Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics. Advances in Physics. 2006. Vol. 55, issue 5-6, pp. 527-625.
16. Pskhu A.V. Fractional Partial Differential Equations. 2005. Nauka, Moscow, 199p (**in Russian**)
17. Alikhanov A. A. A priori estimate for solutions of boundary value problems for fractional-order equations. Differential Equations and Application. 2010. Vol.46, Issue 5, pp. 660-666.

### Ko‘priklar seriyasidan tashkil topgan metrik grafda subdiffuziya tenglamasi uchun Koshi masalasi

**Sobirov Zarifboy, Saparbayev Rajapboy**

Ushbu maqolada metrik grafda kasr vaqt hosilali issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi korrektligi tadqiq qilingan. Bunda graf ketma-ket joylashgan nuqtalar va ulardan har ketma-ket ikkitasini tutashtiruvchi uchtadan qirralardan, birinchi nuqtada uchta kiruvchi yarim cheksiz qirralar, oxirgi nuqtada uchta chiquvchi yarim cheksiz qirralardan tashkil topgan. Masalani yechish jarayonida u chekli va yarim cheksiz oraliqlardagi boshlang‘ich-chegaraviy masalalarga va to‘g‘ri chiziqdagi Koshi masalasiga keltirilgan. Masalada berilgan funksiyalar orqali yechimning aniq integral ifodasi topilgan. Masala yechimi yagonaligi energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

**Kalit so‘zlar:** Kasr hosila; xususiy hosilali differensial tenglama; subdiffuziya tenglamasi; vaqt bo‘yicha kasr tartibli hosilali issiqlik tarqalish tenglamasi; yechimning integral ifodasi.

### Задача Коши для уравнения субдиффузии на метрическом графе состоящий из серии мостов

**Собиров Зарифбой, Сапарбаев Ражапбой**

В данной работе рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с дробной производной по временем на метрическом графе, состоящий из трех входящих ребер, серии 3-мостов, соединяющих последующие вершины, и трех исходящих ребер. Задача сводится к нескольким начально-краевым задам в конечных, полубесконечных интервалах и задаче Коши на прямой. Мы нашли точное интегральное представление решении по заданным данным. Единственность решения доказывается с помощью метода интегралов энергии.

**Ключевые слова:** Дробное производное; уравнение в частных производных; уравнение субдиффузии; уравнение теплопроводности с дробной производной по времени; интегральное представление решения.

**Received: 27/03/2023**

**Accepted: 02/10/2023**

## Cite this article

Sobirov Z., Saparbayev R. Cauchy Problem for Subdiffusion Equation on the metric graph in the form of a series of bridges. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 90-99

# Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с кратными характеристиками

**Абдукодиров Абдурашид**
Факультет математики и информатики
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан
abdurashid1976@mail.ru

## Аннотация

В данной работе, приведены канонические виды дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками.

**Ключевые слова:** Канонический вид; дифференциальные уравнения с частными производными; характеристика; характеристическое уравнение.

**MSC 2020:** 35G05, 35A25

## 1. Введение

В работе [1] найдены необходимое и достаточные условия для того чтобы дифференциальное уравнение пятого порядка в частных производных имело некратные характеристики, а также, приведены канонические виды дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными с некратными характеристиками, а в [2] изучены некоторые вопросы приведения к каноническим видам дифференциальных уравнений в частных производных произвольного $n$ –ого $(n \geq 6)$ порядка.

В данной работе, приведены канонические виды дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными и с кратными характеристиками.

## 2. Основная часть

В некоторой области $\Omega$ плоскости $xOy$ рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных пятого порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных:

$$L[u] = \sum_{k=0}^{5} A_k \frac{\partial^5 u}{\partial x^{5-k} \partial y^k} = F, \tag{1}$$

где $A_k$ $(k = \overline{0,5})$ - заданные непрерывные функции, зависящие от $x$ и $y$, а $F$ - непрерывная функция, зависящая от $x, y, u$ и её частные производные по $x$,$y$ до четвертого порядка включительно.

С помощью преобразования переменных $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$, допускающего обратное преобразование, то есть выполняющее условие $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$, из (1) получаем новое уравнение

$$M[u] = \sum_{k=0}^{5} a_k \frac{\partial^5 u}{\partial \xi^{5-k} \partial \eta^k} = F_1, \tag{2}$$

где $F_1$ - функция, зависящая от $\xi, \eta, u$ и её частные производные по $\xi, \eta$ до четвертого порядка включительно, а $a_k,\ k = \overline{0,5}$- новые коэффициенты, линейно зависящие от $A_k,\ k = \overline{0,5}$.

Если ввести обозначение

$$f(z_x, z_y) = A_0 z_x^5 + A_1 z_x^4 z_y + A_2 z_x^3 z_y^2 + A_3 z_x^2 z_y^3 + A_4 z_x z_y^4 + A_5 z_y^5,$$

то коэффициенты $a_k(k=\overline{0,5})$ уравнения (2), можно написать в виде

$$a_k = \frac{1}{k!}\left(\eta_x\frac{\partial}{\partial\xi_x}+\eta_y\frac{\partial}{\partial\xi_y}\right)^k f(\xi_x,\xi_y) \equiv \frac{1}{(5-k)!}\left(\xi_x\frac{\partial}{\partial\eta_x}+\xi_y\frac{\partial}{\partial\eta_y}\right)^{5-k} f(\eta_x,\eta_y). \tag{3}$$

Надо выбирать новые переменные $\xi,\ \ \eta$ так, чтобы уравнение (2) в некоторой точке $P$ области $\Omega$ имело канонический вид. В силу непрерывности функции $A_0(x,y)$, как и в работе [1] , без ограничения общности можно считать, что в достаточно малой окрестности точки $P$ выполняется условие $A_0>0$[1].

Как и в работе [1], воспользуемся следующими леммамы.

**Лемма 2.1**. *Функция $z=\varphi(x,y)$ является решением уравнения*

$$A_0z_x^5+A_1z_x^4z_y+A_2z_x^3z_y^2+A_3z_x^2z_y^3+A_4z_xz_y^4+A_5z_y^5=0, \tag{4}$$

*тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x,y)=const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения*

$$A_0(dy)^5-A_1(dy)^4dx+A_2(dy)^3(dx)^2-A_3(dy)^2(dx)^3+A_4dy(dx)^4-A_5(dx)^5=0. \tag{5}$$

**Лемма 2.2.** *Если $\varphi(x,y)=const$ представляет собой k-кратный $(2\le k\le 5)$общий интеграл уравнения (5), то при $z=\varphi(x,y)$ функция $f(z_x,z_y)$ и её все производные по $z_x,\ z_y$ до (k-1) порядка включительно равны нулю.*

**Лемма 2.3.** *При преобразовании переменных, допускающего обратное преобразование, число и кратность действительных и комплексных корней уравнения*

$$A_0t^5-A_1t^4+A_2t^3-A_3t^2+A_4t-A_5=0,(t=dy/dx). \tag{6}$$

*инвариантны и имеет место тождество $\tilde{D}=J^{20}D$.*

Пусть, в области $\Omega$ $A_k=const$, $k=\overline{0,5}$.

Заметим, что согласно формулам Вьета [3] для уравнения (6), имеют место равенства

$$t_1+t_2+....+t_5=\frac{A_1}{A_0},\quad t_1t_2+t_1t_3+...+t_4t_5=\frac{A_2}{A_0},\ ....,\ \ t_1\cdot...\cdot t_5=\frac{A_5}{A_0}. \tag{7}$$

На основании (7), уравнению (1) можно написать в виде:

$$A_0\left[\frac{\partial^5u}{\partial x^5}+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\frac{\partial^5u}{\partial x^4\partial y}+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+...+\lambda_4\lambda_5)\frac{\partial^5u}{\partial x^3\partial y^2}+...\right.$$
$$\left....+(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)\frac{\partial^5u}{\partial y^5}=F\right].$$

Отсюда имеем

$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F. \tag{8}$$

Справедливо следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть относительно уравнение (6) справедливо одно из следующих утверждений:*

*1) имеет один 5-кратный действительный корень; 2) имеет один 4-кратный и один простой действительный корень; 3) имеет один 3-кратный и один 2-кратный действительный корень; 4) имеет один 3-кратный и два различных действительных корней; 5) имеет один 3-кратный и два комплексно-сопряженных корня; 6) имеет два различных 2-кратный и один простой действительный корень; 7) имеет два различных, 2-кратных комплексно-сопряженных и один действительный корень; 8) имеет один 2-кратный и три различных действительный корень; 9) имеет один 2-кратный, один простой действительный корень и два комплексно-сопряженных корней.*

*Тогда в области $\Omega$ уравнение (1) может быть приведено соответственно к одному из следующих канонических вид:*

$$1)u_{\xi\xi\xi\xi\xi}=F_2;2)u_{\xi\xi\xi\xi\eta}=F_2;3)u_{\xi\xi\xi\eta\eta}=F_2;4)\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4u}{\partial s\partial t^3}=F_3;$$

$$5)\frac{\partial^3}{\partial s^3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=F_3; 6)\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}=F_3;$$

$$7)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2\frac{\partial u}{\partial s}=F_3; 8)\left(\frac{\partial}{\partial s}+a\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}\right)=F_3;$$

$$9)\left(a\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}\right)=F_3;$$

*где $a\in R$, а $F_2$, $F_3$-вполне определенные функции, зависящая от $s,t,u$ и из частные производные по $s,t$ до четвертого порядка включительно.*

Доказательство. 1) Пусть уравнение (6) имеет один пятикратный действительный корень: $t_1=\lambda_1$. Тогда, уравнение (5) имеет один пятикратный общий интеграл- $\psi_1(x,y)=y-\lambda_1 x=const$. Положим $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\psi_1(x,y)$, где $\xi(x,y)$- любая функция, не зависящая от $\psi_1(x,y)$. Тогда в силу леммы 2 и равенства (3), $a_k\equiv 0$, $k=\overline{1,5}$ и $a_0\neq 0$. Поэтому уравнение (2) принимает вид $u_{\xi\xi\xi\xi\xi}=F_2$, где $F_2=F_1/a_0$.

**2)** Пусть уравнение (6) имеет один четырёхкратный корня $t_1=\lambda_1$ и один простой (некратный) действительного корня $t_2=\lambda_2$. Тогда, уравнение (5) имеет один четырёхкратный $\psi_1(x,y)=y-\lambda_1 x=const$ и один простой $\psi_2(x,y)=y-\lambda_2 x=const$ общие интегралы. Положим $\xi=\eta=\psi_1(x,y),;\Psi_2(x,y)$. Тогда, в силу леммы 2.2 и равенства (3), $a_k\equiv 0$, $k=\overline{0,5}$, $k\neq 1$ и $a_1\neq 0$, в силу чего, уравнение (2) принимает вид $u_{\xi\xi\xi\xi\eta}=F_2$, где $F_2=F_1/a_1$.

**3)** Пусть уравнение (6) имеет один трёхкратный корня $t_1=\lambda_1$ и один двух кратный действительного корня $t_2=\lambda_2$. Тогда, уравнение (5) имеет один трёхкратный $\psi(x,y)=y-\lambda_1 x=const$ и один двух кратный $\psi_2(x,y)=y-\lambda_2 x=const$ общие интегралы. Положим $\eta=\psi_1(x,y)$, $\xi=\psi_2(x,y)$. Тогда, в силу леммы 2.2 и равенства (3), $a_k\equiv 0$, $k=\overline{0,5}$, $k\neq 2$ и $a_2\neq 0$, в силу чего, уравнение (2) принимает вид $u_{\xi\xi\xi\eta\eta}=F_2$, где $F_2=F_1/a_2$.

**4)** Пусть уравнение (6) имеет один трехкратный $t_1=\lambda_1$ и два различных $t_2=\lambda_2, t_3=\lambda_3$ действительного корня. Тогда уравнение (5) имеет один трехкратный $\psi_1(x,y)=y-\lambda_1 x=const$ и два различных $\psi_2(x,y)=y-\lambda_2 x=const$, $\psi_3(x,y)=y-\lambda_3 x=const$ общие интегралы. Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно написать в виде:

$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F. \tag{9}$$

Из всех возможних замен переменных, рассмотрим замену $\eta=\psi_1(x,y)$, $\xi=\psi_2(x,y)$.

Тогда $\frac{\partial}{\partial x}=\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta}==-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\xi}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial\eta}$, $\frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}$ .

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (9) имеем:

$$\left[(\lambda_3-\lambda_2)\frac{\partial}{\partial\xi}+(\lambda_3-\lambda_1)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^3\partial\eta}=F_1, \tag{10}$$

где $F_1=-F\Big/A_0(\lambda_2-\lambda_1)^4$.

Для дальнейшего упрощения уравнения (10) введем замену $t=(\lambda_3-\lambda_1)\xi$, $s=(\lambda_3-\lambda_2)\eta$, $J=s_\xi t_\eta-s_\eta t_\xi\neq 0$. Тогда, учитывая $\frac{\partial}{\partial\xi}=s_\xi\frac{\partial}{\partial s}+t_\xi\frac{\partial}{\partial t}=(\lambda_3-\lambda_1)\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial\eta}=s_\eta\frac{\partial}{\partial s}+t_\eta\frac{\partial}{\partial t}=(\lambda_3-\lambda_2)\frac{\partial}{\partial s}$, из уравнения (10) получим новое уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial s\partial t^3}=F_3,$$

где $F_3=F_1\Big/\left[(\lambda_3-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_1)^4\right]$.

**5)** Пусть уравнение (6) имеет один трехкратный действительный и два комплексно-сопряженных корней: $t_1=\lambda_1$, $t_4=\alpha+\beta i$, $t_5=\alpha-\beta i$. Тогда уравнение (5) имеет один трехкратный действительный $\psi_1(x,y)=y-\lambda_1 x=const$ и два различных комплексно-сопряженных $\varphi(x,y)=y-\alpha x-i\beta x=const$,

$\varphi * (x,y) = y - \alpha x + i\beta x = const$ общие интегралы, где $\alpha,\ ,\beta,\ \lambda \in R$ и $\beta \neq 0$. Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно писать в виде:

$$A_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = F \tag{11}$$

Из все возможних замены переменных, рассмотрим замену $\xi = y - \alpha x$, $\eta = \beta x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} == -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (11) имеем:

$$\left[ (\lambda_1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \right]^3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = F_1, \tag{12}$$

где $F_1 = F \big/ A_0 \beta^2$.

Если $\lambda_1 = \alpha$, тогда уравнение (12) имеет вид: $\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = \overline{F}_2$ , где $\overline{F}_2 = F \big/ A_0 \beta^5$.

Пусть $\lambda_1 \neq \alpha$. Для дальнейшего упрощения уравнения (12) введем замену переменных

$$s = s(\xi, \eta),\ t = t(\xi, \eta), \tag{13}$$

причем $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi \neq 0$, тогда $\frac{\partial}{\partial \xi} = s_\xi \frac{\partial}{\partial s} + t_\xi \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = s_\eta \frac{\partial}{\partial s} + t_\eta \frac{\partial}{\partial t}$. Учитывая это, из уравнение (12) получим новое уравнение в виде

$$\left[ ((\lambda_1 - \alpha) s_\xi + \beta s_\eta) \frac{\partial}{\partial s} + ((\lambda_1 - \alpha) t_\xi + \beta t_\eta) \frac{\partial}{\partial t} \right]^3 \left[ (s_\xi^2 + s_\eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2(s_\xi t_\xi + s_\eta t_\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + (t_\xi^2 + t_\eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = F_2. \tag{14}$$

Чтобы уравнение (14) имело более простой вид, в качестве замену (13) берем $s = (\lambda_1 - \alpha) \xi + \beta \eta$, $t = \beta \xi - (\lambda_1 - \alpha) \eta$ (причем,$J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = -(\lambda_1 - \alpha)^2 - \beta^2 \neq 0$).

Тогда, уравнение (12) имеет вид $\frac{\partial^3}{\partial s^3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = F_3$, где $F_3 = F_2 \Big/ \left[ (\lambda_1 - \alpha)^2 + \beta^2 \right]^5$.

**6)** Пусть уравнение (6) имеет два различных $t_1 = \lambda_1$ и $t_2 = \lambda_2$ двукратный и один простой (некратный) $t_3 = \lambda_3$ действительного корня.

Тогда уравнение (5) имеет два различных $\psi_1(x,y) = y - \lambda_1 x = const$ и $\psi_2(x,y) = y - \lambda_2 x = const$ двух кратный и один простой (некратный) $\psi_3(x,y) = y - \lambda_3 x = const$ действительные общие интегралы. Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно написать в виде:

$$A_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F \tag{15}$$

Из всех возможних замен переменных, рассмотрим замену $\eta = \psi_1(x,y)$, $\xi = \psi_2(x,y)$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} = -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ .

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (15) имеем:

$$\left[ (\lambda_3 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = F_2, \tag{16}$$

где $F_2 = F_1 \Big/ (\lambda_2 - \lambda_1)^4$.

Для дальнейшего упрощения уравнения (16) введем замену $t = (\lambda_3 - \lambda_1) \xi$, $s = (\lambda_3 - \lambda_2) \eta$ (причем $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = -(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$).

Тогда, учитывая $\frac{\partial}{\partial \xi} = s_\xi \frac{\partial}{\partial s} + t_\xi \frac{\partial}{\partial t} = (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = s_\eta \frac{\partial}{\partial s} + t_\eta \frac{\partial}{\partial t} = (\lambda_3 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial s}$, из уравнения (16) получим новое уравнение в виде $\left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial s^2 \partial t^2} = F_3$ , где $F_3 = F_2 \Big/ \left[ (\lambda_3 - \lambda_2)^3 (\lambda_3 - \lambda_1)^3 \right]$.

**7)** Пусть уравнение (6) имеет два различных, двукратных комплексно-сопряженных и один действительного корня: $t_1 = \alpha + \beta i$, $t_2 = \alpha - \beta i$ и $t_3 = \lambda_3$. Тогда уравнение (5) имеет два различных комплексно-сопряженных и один действительный общие интегралы: $\varphi(x, y) = y - \alpha x - i\beta x = const$, $\varphi * (x, y) = y - \alpha x + i\beta x = const$ и $\psi_3(x, y) = y - \lambda_3 x = const$, где $\alpha, \beta, \lambda_3 \in R$ и $\beta \neq 0$.

Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно писать в виде:

$$A_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F. \tag{17}$$

Из всех возможных замен переменных, рассмотрим замену $\xi = y - \alpha x$, $\eta = \beta x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} == -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (17) имеем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \left[ (\lambda_1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = F_1, \tag{18}$$

где $F_1 = F \big/ A_0 \beta^4$.

Если $\lambda_1 = \alpha$, тогда уравнение (18) имеет вид: $\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = \overline{F}_2$ , где $\overline{F}_2 = F \big/ A_0 \beta^5$.

Пусть $\lambda_1 \neq \alpha$. Для дальнейшего упрощения уравнения (18), аналогично в случае 5), введем замену $s = (\lambda_1 - \alpha)\,\xi + \beta\eta$, $t = \beta\xi - (\lambda_1 - \alpha)\,\eta$ (причем, $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = -(\lambda_1 - \alpha)^2 - \beta^2 \neq 0$) и из уравнения (18) получим новое уравнение в виде: $\left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial s} = F_3$ , где $F_3 = F_2 \Big/ \left[ (\lambda_1 - \alpha)^2 + \beta^2 \right]^5$.

**8)** Пусть уравнение (6) имеет один $t_1 = \lambda_1$ двукратный и три $t_2 = \lambda_2$, $t_3 = \lambda_3$, $t_4 = \lambda_4$ простой (некратный) действительного корня.

Тогда уравнение (5) имеет один $\psi_1(x, y) = y - \lambda_1 x = const$ двух кратный и три простой (некратный) $\psi_2(x, y) = y - \lambda_2 x = const$, $\psi_3(x, y) = y - \lambda_3 x = const$, $\psi_4(x, y) = y - \lambda_4 x = const$ действительный общие интегралы. Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно написать в виде:

$$A_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_4 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F. \tag{19}$$

Рассмотрим замену $\eta = y - \lambda_1 x$, $\xi = y - \lambda_2 x$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} = -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ .

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (19), имеем:

$$\left[ (\lambda_3 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \left[ (\lambda_4 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\lambda_4 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \eta} = F_2, \tag{20}$$

где $F_2 = F_1 \big/ (\lambda_2 - \lambda_1)^3$.

Для дальнейшего упрощения уравнения (20) введем замену $t = (\lambda_3 - \lambda_1)\,\xi$, $s = (\lambda_3 - \lambda_2)\,\eta$, $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi \neq 0$.

Тогда, учитывая $\frac{\partial}{\partial \xi} = s_\xi \frac{\partial}{\partial s} + t_\xi \frac{\partial}{\partial t} = (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = s_\eta \frac{\partial}{\partial s} + t_\eta \frac{\partial}{\partial t} = (\lambda_3 - \lambda_2) \frac{\partial}{\partial s}$, из уравнения (20) получим новое уравнение в виде $\left( \frac{\partial}{\partial s} + a \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^4 u}{\partial s \partial t^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial s^2 \partial t^2} \right) = F_3$, где $a = \frac{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}$,$F_3 = \frac{F_2}{\left[ (\lambda_3 - \lambda_2)^3 (\lambda_3 - \lambda_1)^3 (\lambda_4 - \lambda_1) \right]}$.

**9)** Пусть уравнение (6) имеет один $t_1 = \lambda_1$ двукратный и один $t_2 = \lambda_2$ простой (некратный) действительного корня и два комплексно-сопряженных корней $t_4 = \alpha + \beta i$, $t_5 = \alpha - \beta i$. Тогда уравнение (5) имеет один двукратный $\psi_1(x, y) = y - \lambda_1 x = const$ и один простой (некратный) $\psi_2(x, y) = y - \lambda_2 x = const$

действительный и два различных комплексно-сопряженных $\varphi(x,y) = y - \alpha x - i\beta x = const$, $\varphi * (x,y) = y - \alpha x + i\beta x = const$ общие интегралы. Кроме того, в этом случае, уравнению (8), то есть уравнению (1) можно написать в виде:

$$A_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial y}\right) = F. \tag{21}$$

Рассмотрим замену $\xi = y - \alpha x$, $\eta = \beta x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \eta} = -\alpha\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подставляя эти выражения $\frac{\partial}{\partial x}$и $\frac{\partial}{\partial y}$ в уравнение (11), имеем:

$$\left[(\lambda_1-\alpha)\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial}{\partial \eta}\right]^2\left[(\lambda_2-\alpha)\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial}{\partial \eta}\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = F_1, \tag{22}$$

где $F_1 = F/A_0\beta^2$.

Если $\lambda_1 = \alpha$ или $\lambda_2 = \alpha$, тогда уравнение (22) имеет вид:

$\left(a\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4}\right) = \overline{F}_2$ или $\left(a\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\partial \eta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right) = \overline{F}_2$,

где $a = \frac{(\lambda_2-\alpha)}{\beta}$ или $a = \frac{(\lambda_1-\alpha)}{\beta}$, $\overline{F}_2 = F_1/\beta^3$.

Пусть $\lambda_1 \neq \alpha$. Для дальнейшего упрощения уравнения (22) введем замену переменных $s = s(\xi,\eta)$, $t = t(\xi,\eta)$, причем $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi \neq 0$, тогда $\frac{\partial}{\partial \xi} = s_\xi\frac{\partial}{\partial s} + t_\xi\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = s_\eta\frac{\partial}{\partial s} + t_\eta\frac{\partial}{\partial t}$. Учитывая это, из уравнения (22) получим

$$\left[\left((\lambda_1-\alpha)s_\xi + \beta s_\eta\right)\frac{\partial}{\partial s} + \left((\lambda_1-\alpha)t_\xi + \beta t_\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]^2\left[\left((\lambda_2-\alpha)s_\xi + \beta s_\eta\right)\frac{\partial}{\partial s} + \left((\lambda_2-\alpha)t_\xi + \beta t_\eta\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]$$

$$\left[(s_\xi^2+s_\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2(s_\xi t_\xi + s_\eta t_\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + (t_\xi^2+t_\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = F_2. \tag{23}$$

Если, в качестве замену переменных берем $s = (\lambda_1-\alpha)\xi + \beta\eta$, $t = \beta\xi - (\lambda_1-\alpha)\eta$ (причем, $J = s_\xi t_\eta - s_\eta t_\xi = -(\lambda_1-\alpha)^2 - \beta^2 \neq 0$), тогда, уравнение (22) имеет вид $\left(a\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}\right) = F_3$, где $a = \frac{\left((\lambda_2-\alpha)(\lambda_1-\alpha)+\beta^2\right)}{\beta(\lambda_2-\lambda_1)}$, $F_3 = F_2\Big/\left[\left((\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2\right)^3\beta(\lambda_2-\lambda_1)\right]$.

Теорема 2.1 доказано. □

# Список литератур


1. Urinov A., Abduqodirov A. On canonical forms of fifth-order partial differential equations with non-multiple characteristics. Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, No 2, pp. 156-165.
2. Уринов А., Абдукодиров А. О приведении к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными n-ого порядка. Тезисы докладов международной науч. конфер. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, 2020. С.15-20.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 1968. Москва: Наука.

Beshinchi tartibli karrali xarakteristikali xususiy hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishlari

**Abduqodirov Abdurashid**

Ushbu maqolada karrali xarakteristikalarga ega bo'lgan ikki o'zgaruvchili beshinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishlari keltirilgan.

**Kalit so'zlar:** Kanonik ko'rinish; xususiy hosilali differensial tenglamalar; xarakteristika; xarakteristik tenglama.

Canonical forms of fifth-order partial differential equations with multiple characteristics

**Abdukodirov Abdurashid**

In this work, we present canonical forms of differential equations of the fifth order with two independent variables with multiple characteristics.

**Keywords:** canonical form; partial differential equations; characteristics; characteristic equation.

**Получено: 18/08/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Abdukodirov A. Canonical forms of fifth-order partial differential equations with multiple characteristics. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 101-107

# 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ ОКУБО

**Алламбергенов Аллаяр Хасанбаевич**
Факультет математики
Каракалпакский государственный университет
Нукус, Узбекистан
Каракалпакское отделение
Института Математики
им. В.И.Романовского АН РУз
Нукус, Узбекистан
allayar2010@mail.ru

**Аннотация**

Настоящее исследование посвящено к изучению 2-локальных дифференцирований на алгебре Окубо. Доказано, что любое 2-локальное дифференцирование алгебры Окубо является дифференцированием.

**Ключевые слова:** Алгебра Окубо; дифференцирование; 2-локальное дифференцирование.

**MSC 2020:** 17A35, 17A36

## 1. Введение

В 1997 г. П. Шемрл [12] ввел понятия 2-локального дифференцирования и 2-локального автоморфизма. Отображение $\Delta : L \to L$ (не обязательно линейное) на алгебре $L$ называется 2-локальным дифференцированием, если для всяких $x, y \in L$ существует дифференцирование $D_{x,y} : L \to L$ такое, что $D_{x,y}(x) = \Delta(x)$ и $D_{x,y}(y) = \Delta(y)$. Понятие 2-локального автоморфизма определяется аналогичным образом. Для данной алгебры $L$ основная задача, связанная с этими понятиями, состоит в том, чтобы доказать, что они автоматически являются дифференцированиями (соответственно, автоморфизмами) или привести примеры 2-локальных дифференцировании или автоморфизмов на $L$, которые не являются дифференцированиями или автоморфизмами, соответственно.

Решение этой задачи для конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики было получено в работах [1, 3, 11]. В частности, в работе [3] доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на полупростой алгебре Ли является дифференцированием и что каждая конечномерная нильпотентная алгебра Ли с размерностью больше чем 2, содержит 2-локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированием. Для 2-локальных автоморфизмов в работе [11] авторы доказали, что если $L$ – простая алгебра Ли типа $A_l$, $D_l$ или $E_k, (k = 6, 7, 8)$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, то каждый 2-локальный автоморфизм $L$ является автоморфизмом. Аналогичные результаты относительно 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов на простых алгебрах Лейбница были получены в [2]. А в работе [1] Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов обобщили результат, полученный в работе [11], и доказали, что каждый 2-локальный автоморфизм конечномерной полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является автоморфизмом. Более того, они показали, что каждая нильпотентная алгебра Ли конечной размерности больше чем 2, содержит 2-локальные автоморфизмы, которые не являются автоморфизмами.

В работах [5, 6, 13] были изучены 2-локальные дифференцирования бесконечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики и доказано, что все 2-локальные дифференцирования алгебры Витта являются (глобальными) дифференцированиями и что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре Вирасоро является дифференцированием. В работе [4] авторы доказали, что каждое 2-локальное дифференцирование обобщенной алгебры Витта $W(F)$ над векторным пространством $F_n$ является дифференцированием, где $F$ – поле нулевой характеристики.

Последние годы внимание были обращены к изучению локальных и 2-локальных дифференцировании композиционных алгебр и симметричных композиционных алгебр.

В работе [7] были изучены локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры октонионов. Приведен общий вид локальных дифференцирований на вещественной алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$. Из этого описания следует, что пространство всех локальных дифференцирований на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$, снабженное скобкой Ли, изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R})$ всех вещественных кососимметрических $7 \times 7$-матриц. А также рассмотрены 2-локальные дифференцирования на алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является дифференцированием. Далее были применены эти результаты к аналогичным задачам для простой 7-мерной алгебры Мальцева. В качестве следствия получено, что вещественная алгебра октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ и алгебра Мальцева $M_7(\mathbb{R})$ являются простыми неассоциативными алгебрами, допускающими чисто локальные дифференцирования, т. е. локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.

В работе [14] были изучены локальные дифференцирования алгебры Окубо и доказано, что каждое локальное дифференцирования алгебры Окубо над полем характеристики отличного от 2, 3 является дифференцированием.

В настоящей работе изучаются 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо.

## 2. Предварительные сведения

В этом разделе приведем необходимые определения и некоторые известные результаты.

**Определение 2.1.** Композиционная алгебра $\mathcal{S}$ с умножением $*$ и нормой $n$ называется *симметричной*, если полярная форма нормы ассоциативна:

$$n(x * y, z) = n(x, y * z) \tag{1}$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{S}$.

**Определение 2.2.** Симметричная композиционная алгебра $(\mathcal{O}, *, n)$ называется *алгеброй Окубо* над $\mathbb{F}$ (характеристики $\neq 3$).

Для приведения необходимых свойств симметричных композиционных алгебр нам сначала понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.1 [9].** *Пусть $(\mathcal{S}, *, n)$ – алгебра, снабженная невырожденной квадратичной формой $n$. Тогда $n$ мультипликативна, а ее полярная форма ассоциативна тогда и только тогда, когда он удовлетворяет*

$$(x * y) * x = n(x)y = x * (y * x) \tag{2}$$

*для любых $x, y \in \mathcal{S}$.*

Приведем конструкцию алгебры Окубо над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 3$, более близкую к исходному определению из [10]. Рассмотрим алгебру $3 \times 3$ матриц $\mathcal{R} = M_3(\mathbb{F})$ и предположим, что $\mathbb{F}$ содержит примитивные кубические корни $\omega, \omega^2$ из 1. Определим на $\mathfrak{sl}_3$ умножение по правилу

$$x * y = \omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3} tr(xy)1. \tag{3}$$

Другими словами, $x * y$ – это проекция $\omega xy - \omega^2 yx$ на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ относительно разложения $\mathcal{R} = \mathbb{F}1 \oplus \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$.

Произвольный элемент $x \in \mathcal{R}$ удовлетворяет уравнению Кэли–Гамильтона

$$x^3 - tr(x)x^2 + s(x)x - det(x)1 = 0,$$

где $s(x)$ – квадратичная форма. Если char $\mathbb{F} \neq 2$, то $s(x) = \frac{1}{2}\left(tr(x)^2 - tr\left(x^2\right)\right)$, так что если $s(x, y)$ является полярной формой $s(x)$, т. е. $s(x, y) = s(x + y) - s(x) - s(y)$, то $s(x, y) = tr(x)tr(y) - tr(xy)$. Это справедливо даже для характеристики 2. В частности, $s(x, y) = -tr(xy)$ для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$. Так как форма следа невырождена на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, то квадратичная форма $s(x)$ невырождено.

Тогда для любых $x, y \in \mathcal{R}$ выражение $(x * y) * x$ является проекцией на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ $\omega(x * y)x -$ $\omega^2 x(x * y)$, т. е. проекция

$$\omega\left(\omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3} tr(xy)1\right) x - \omega^2 x\left(\omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3} tr(xy)1\right) =$$

$$= \left(\omega + \omega^2\right) xyx - yx^2 - x^2 y - \frac{\left(\omega - \omega^2\right)^2}{3} tr(xy)x = -\left(x^2 y + xyx + yx^2\right) - tr(xy)x.$$

Но для любого $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, $x^3 + s(x) - det(x)1 = 0$, поэтому для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, в силу линеаризацией получаем $x^2y + xyx + yx^2 + s(x,y)x + s(x)y \in \mathbb{F}1$. Так как $s(x,y) = -tr(xy)$, то заключаем

$$(x * y) * x = s(x)y,$$

и также $x * (y * x) = s(x)y$. Поэтому, по лемме 2.1 $(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}), *, s)$ является симметричной композиционной алгеброй. С другой стороны, для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ мы имеем $x * y = y * x$ тогда и только тогда, когда $\omega xy - \omega^2 yx = \omega yx - \omega^2 xy$, и это выполняется тогда и только тогда, когда $xy = yx$. Но $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ имеет тривиальный центр (мы предполагаем, что char $\mathbb{F} \neq 3$ ), поэтому $(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}), *, s)$ – восьмимерная симметрическая композиционная алгебра с тривиальным коммутативным центром, а значит, алгебра Окубо.

Уравнение (2) показывает, что всякое дифференцирование $d$ алгебры Окубо $(\mathcal{O}, *)$ принадлежит ортогональной алгебре Ли относительно ее нормы $n$. Если характеристика $\mathbb{F}$ отлично от 2, 3, то $n(x,y) = -tr(xy)$ для любого $x, y \in \mathcal{O} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$. Тогда из (3) следует, что, если мы расширим $d$ до $M_3(\mathbb{F})$ с помощью $d(1) = 0$, то получим дифференцирование $M_3(\mathbb{F})$, и наоборот. Всякое дифференцирование $M_3(\mathbb{F})$ имеет вид $\mathrm{ad}_x : y \mapsto [x,y] = xy - yx$ для элемента $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$.

**Теорема 2.1 [8].** *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики отличной от 2, 3. Тогда $Der(\mathcal{O}, *)$ изоморфно алгебре $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$:*

$$Der(\mathcal{O}, *) = \{\mathrm{ad}^*_x (: y \mapsto x * y - y * x) : x \in \mathcal{O}\}.$$

**Теорема 2.2 [14].** *Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2, 3$. Тогда всякое локальное дифференцирование алгебры $\mathcal{O}$ является дифференцированием.*

## 3. 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо

В этом разделе мы изучим 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо.

Если характеристика поле $\mathbb{F}$ отлично от 3, то билинейное форма имеет вид

$$n(x,y) = tr(x * y)$$

для всякого $x, y \in \mathcal{O} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$.

Возьмем элементы $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда билинейная форма

$$n(x,y) = tr\left(x^T y\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} tr(x * y) &= tr\left(\frac{1}{6}(3 + \sqrt{-3})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &+ \frac{1}{6}(3 - \sqrt{-3})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} - \\ &- \left.\frac{1}{3}\left(tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= tr\left(\frac{1}{6}(3 + \sqrt{-3})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}(3 - \sqrt{-3})\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ &- \left.\frac{1}{3}\left(tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0. \end{aligned}$$

**Лемма 3.1.** *Пусть $\Delta$– 2-локальное дифференцирование на алгебре Окубо. Тогда $\Delta$ является линейным.*

Доказательство. Сначала покажем $tr(\Delta(x) * y) = -tr(x * \Delta(y))$. Действительно

$$
\begin{aligned}
tr(\Delta(x) * y + x * \Delta(y)) &= tr((x * a - a * x) * y + x * (y * a - a * y)) \\
&= tr((x * a) * y - (a * x) * y + x * (y * a) - x * (a * y)) \\
&= tr(x * (a * y) - (a * x) * y + x * (y * a) - x * (a * y)) \\
&= tr(x * (y * a) - (a * x) * y) = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $tr\left(\Delta\left(x\right) * y\right) = -tr\left(x * \Delta\left(y\right)\right)$.

Для произвольных $a, b, c \in \mathcal{O}$ обозначим $x = a + b$, $y = c$. Мы имеем, что

$$
\begin{aligned}
tr\left(\Delta\left(a + b\right) * c\right) &= -tr\left(\left(a + b\right) * \Delta\left(c\right)\right) \\
&= -tr\left(a * \Delta\left(c\right)\right) - tr\left(b * \Delta\left(c\right)\right) \\
&= tr\left(\Delta\left(a\right) * c\right) + tr\left(\Delta\left(b\right) * c\right) \\
&= tr\left(\left(\Delta\left(a\right) + \Delta\left(b\right)\right) * c\right).
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
tr\left(\Delta\left(a + b\right) * c\right) = tr\left(\left(\Delta\left(a\right) + \Delta\left(b\right)\right) * c\right).
$$

Так как $c \in \mathcal{O}$ произвольный элемент, то отсюда получим, что $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$, т.е. $\Delta$ является аддитивным.

Теперь покажем, что $\Delta$ однородно. Действительно, для каждого $x \in \mathcal{O}$ и для $\lambda \in \mathbb{C}$ существует дифференцирования $D_{x,\lambda x}$ такой, что $\Delta\left(x\right) = D_{x,\lambda x}\left(x\right)$ и $\Delta\left(\lambda x\right) = D_{x,\lambda x}\left(\lambda x\right)$. Тогда

$$
\Delta\left(\lambda x\right) = D_{x,\lambda x}\left(\lambda x\right) = \lambda D_{x,\lambda x}\left(x\right) = \lambda \Delta\left(x\right).
$$

Следовательно, $\Delta$ однородным. Таким образом, $\Delta$ является линейным оператором. Лемма 3.1 доказана. □

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\mathcal{O}$ алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2, 3$. Тогда каждое 2-локальное дифференцирование $\Delta : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ является дифференцированием.*

Доказательство. В силу Леммы 3.1 2-локальное дифференцирование $\Delta$ является линейным. Тогда в силу Теорема 2.2 $\Delta$ является дифференцированием. Теорема 3.1 доказана. □

# Список литератур


1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. 2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 507, pp. 121–131
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Omirov B.A. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. 2020. Vol. 43, pp. 2199–2234.
3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S. 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 474, pp. 1–11.
4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Yusupov B.B. 2-Local derivations on generalized Witt algebras. Linear Multilinear Algebra. 2021. Vol. 69, Issue 16, pp. 3130–3140.
5. Ayupov Sh.A., Yusupov B.B. 2-local derivations on Virasoro algebras. Bulletin ofNational University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences: 2019. Vol.2, Issue 4, pp. 217–230.
6. Ayupov Sh.A., Yusupov B.B. 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras. Journal of Algebra and Its Applications. 2020. Volume 19, Issue 05, 2050100.
7. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Allambergenov A.X. Local and 2-local derivations on octonion algebras. Journal of Algebra and its Applications. 2023. Vol. 22, No. 7, 2350147
8. Elduque A. Okubo Algebras: Automorphisms, Derivations and Idempotents. Lie Algebras and Related Topics, Contemporary Mathematics. 2015. Vol.652, pp. 65–66.
9. Okubo S, Osborn J.M. Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear forms permitting composition. Communications in Algebra. 1981. Vol. 9, Issue 12, pp. 1233-1261.

10. Okubo S. Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras, Hadronic J. 1978. No. 4, pp. 1250–1278.
11. Chen Z., Wang D. 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras. Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 486, pp. 335-344.
12. Semrl P. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 125, No.9, pp. 2677–2680.
13. Yusupov B. B. 2-Local derivations on Witt algebras. Uzbek Mathematical Journal. 2018, No 2, pp.160-166.
14. Алламбергенов А. Х. Локальные дифференцирования алгебры Окубо. Бюллетень института математики. 2022. Vol.5, pp. 87–97.

## Okubo algebrasini 2-lokal differensiallashlari

**Allambergenov Allayar**

Ushbu maqolada Okubo algebrasini 2-lokal differensiallashlari oʻrganilgan. Okubo algebrasining ixtiyoriy 2-lokal differensiallashi differensiallash ekanligi koʻrsatilgan.

**Kalit soʻzlar:** Okubo algebrasi; differensiallash; 2-lokal differensiallash.

## 2-local derivations of Okubo algebras

**Allambergenov Allayar**

This paper is devoted to the study of 2-local derivations on Okubo algebra. It is proved that every 2-local derivation of the Okubo algebra is a derivation.

**Keywords:** Okubo algebras; derivation; 2-local derivation.

**Получено: 11/04/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Allambergenov A. 2-local derivations of Okubo algebras. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 108-112

# Об одной задаче типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

**Бахтиёр Кадиркулов**
Кафедра «Математика и общеэкономические дисциплины»
Ташкентский государственный университет востоковедения
Ташкент, Узбекистан
kadirkulovbj@gmail.com

**Эргашев Окилжон**
Кафедра «Высшая математика»
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
Ташкент, Узбекистан
okiljonergashev@gmail.com

## Аннотация

В работе исследуются спектральные вопросы одной несамосопряженной задачи типа Бицадзе-Самарского. Найдены собственные значения, соответствующие собственные функции, а также найдены условия существования присоединенных функций. Также изучаются спектральные вопросы сопряженной задачи. Далее, доказывается полнота, а также базисность Рисса систем корневых функций этих задач.

**Ключевые слова:** задачи типа Бицадзе-Самарского; несамосопряженная задача; собственные и присоединенные функции; полнота; базис Рисса

**MSC 2020:** 34B05, 34L10

## 1. Введение и постановка задачи

Как известно, применение метода Фурье в решении краевых задач для уравнений в частных производных приводит к задаче на собственные значения и основное место в этом занимает вопрос о разложимости произвольной функции в биортогональный ряд по системе собственных (и присоединенных) функций этой задачи. Известно, что в случае самосопряженного оператора система собственных функций всегда образует ортонормированный базис и в этом случае вышеуказанная проблема теоретически решена [1]. А что касается несамосопряженных операторов, то решение вышеуказанной проблемы, неоднозначно (см., например [2]). Как известно, система собственных функций в этом случае может оказаться даже неполной и возникает проблема их дополнять так называемыми присоединенными функциями.

Надо отметить, что система собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов определяется неоднозначно, то есть существуют различные подходы построения систем собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов. Отметим известные работы [3], [4] М.В.Келдыша, где была построена теория присоединенных функций и доказана полнота системы собственных и присоединенных функций широкого класса несамосопряженных дифференциальных уравнений. Также отметим работу [5] Н.И. Ионкина, где предложен другой способ построения присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора. В.А. Ильиным указан конструктивный метод построения так называемой приведенной системы собственных и присоединенных функций общего несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора, а также доказаны необходимые и достаточные условия ее базисности [6]-[7].

Отметим работы [8]-[10] М.Садибекова и С.Сарсенби, где предлагаются и обосновываются новые формулы построения цепочек присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных операторов.

В предлагаемой работе исследуются спектральные вопросы одной нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского. Задача такого типа для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, впервые была сформулирована и исследована А.В.Бицадзе и А.А.Самарским [11].

В процессе исследования данной задачи, найдены собственные числа, построены соответствующие собственные функции этой задачи, а также сопряженной задачи, исследована их полнота и базисность. Отметим также работы [12], [13], где исследовались аналогичные задачи.

Рассмотрим спектральную задачу:

$$-X''(x) = \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$X'0) = 0,\ X(1) = X(x_0), \tag{2}$$

где $\lambda$ - спектральный параметр, $x_0$ - действительное число из интервала $0 < x_0 < 1$.

Необходимость изучения таких задач возникает при исследовании краевых задач для уравнений в частных производных спектральным методом, когда относительно одной из пространственной переменной задаются условия вида (2).

## 2. Исследование задачи (1)-(2)

Находим собственные значения $\lambda$ и собственные функции $X(x)$ задачи (1)-(2). При $\lambda < 0$ задача (1)-(2) имеет только тривиальное решение, поэтому рассмотрим случай $\lambda \geq 0$. В этом случае получим, что рассматриваемая задача имеет собственные значения вида

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{n1} = \left(\frac{2n\pi}{1+x_0}\right)^2, \lambda_{k2} = \left(\frac{2k\pi}{1-x_0}\right)^2,\ n, k \in N, \tag{3}$$

которым соответствуют собственные функции

$$X_{n1}(x) = 1, X_{n1}(x) = \cos\sqrt{\lambda_{n1}}x, X_{k2}(x) = \cos\sqrt{\lambda_{k2}}x, n, k \in N, \tag{4}$$

причем, нетрудно видеть, что эти собственные функции не являются ортогональными.

Далее, попробуем ответить на следующие вопросы:

1) Существует ли значения $k$ и $n$ при котором собственные значения из (3) совпадают?

2) Что мы можем сказать о полноте полученной системы?

Ответ на первый вопрос положительный. Действительно, приравнивая последние два выражения из (3), получим, что собственные значения могут совпадать при следующих условиях на $k$ и $n$:

$$\Delta_{k,n} = x_0, \Delta_{k,n} = \frac{n-k}{n+k}, n > k, k, n \in N. \tag{5}$$

Ответ на второй вопрос, в общем, отрицательный. Потому что, из предыдущего пункта, следует, что система (4) не будет полной при выполнении условия (5), так как, в этом случае уменьшается количество собственных функций и здесь возникает проблема нехватки собственных функций. Поэтому выясним, когда корневое пространство (пространство собственных и присоединенных функций) дифференциального оператора $-X''$, соответствующее задаче (1)-(2) состоит только из собственных функций, или когда существуют присоединенные функции этого оператора.

**Лемма 2.1.** *У системы (4) существуют присоединенные функции только для тех собственных значений $\lambda_{n_1}, \lambda_{k_2}, n, k \in N$ задачи (1), (2), для которых имеет место соотношение (5). Для каждой такой паре $(n, k)$ существует только одна присоединенная функция.*

Доказательство. Построим резольвенту оператора $-X''$, соответствующей задаче (1), (2), т.е. находим решение следующей задачи

$$-X''(x) = \lambda X(x) + f(x), \tag{6}$$

$$X'(0) = 0,\ X(1) = X(x_0),\ 0 < x_0 < 1, \tag{7}$$

где $\lambda$ - комплексный параметр.

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующее (6) имеет вид

$$X(x) = C_1X_1(x) + C_2X_2(x),$$

где $C_1, C_2$ - произвольные действительные числа, $\mu = \sqrt{-\lambda}$, $X_1(x) = \frac{1}{\mu}sh\mu x$, $X_2(x) = ch\mu x$ - фундаментальная система решений уравнения (6).

Отметим, что мы фундаментальную систему решений подбирали специально таким образом, чтобы учитывать и случай $\lambda = 0$, так как имеет место $\lim\limits_{\mu\to 0} X_1(x) = x$, $\lim\limits_{\mu\to 0} X_2(x) = 1$.

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (6), мы применим метод вариации постоянных, где $C_1(x), C_2(x)$ - функции аргумента $x$. Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cdot \frac{sh\mu x}{\mu} + C_1 \cdot ch\mu x - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f(t) sh\mu(x-t)dt. \tag{8}$$

Далее, удовлетворяя формулой (8) краевые условия (7), нетрудно получить резольвенту в виде

$$X(x) = F_1(1,\lambda) - F_1(x_0,\lambda) - F_2(x,\lambda), \tag{9}$$

где

$$F_1(x,\lambda) = \frac{ch\mu x}{\mu(ch\mu x - ch\mu x_0)}\int\limits_0^x f(t) sh\mu(x-t)dt,$$

$$F_2(x,\lambda) = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f(t) sh\mu(x-t)dt.$$

Определим особые точки резольвенты (9) как функции комплексного переменного $\lambda$ и определим тип этих точек.

Функция $F_2(x,\lambda)$ не имеет особых точек, кроме $\lambda = 0$. Разлагая функцию $sh\mu(x-t)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки, получим, что точка $\lambda = 0$ является устранимой особой точкой функции $F_2(x,\lambda)$.

Рассмотрим функцию $F_1(1,\lambda)$. Как и в случае $F_2(x,\lambda)$, разлагая функцию $ch\mu x - ch\mu x_0$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda = 0$ нетрудно увидеть, что точка $\lambda = 0$ является полюсом первого порядка функции $F_1(1,\lambda)$. Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Тогда, учитывая формулы

$$\sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda}, shiz = i\sin z, chiz = \cos z,$$

находим, что в этом случае особыми точками функции $F_1(1,\lambda)$ являются вещественные положительные числа вида $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}$, $n \in N$ из (3), при этом:

1) число $\lambda_0 = 0$ является полюсом резольвенты первого порядка.

2) числа $\lambda_{n1}, \lambda_{k2}, n, k \in N$, для которых $\Delta_{k,n} \neq x_0$, являются полюсами резольвенты первого порядка.

3) числа $\lambda_{n1}, \lambda_{k2}, n, k \in N$, для которых имеет место соотношение (5), являются полюсами резольвенты второго порядка.

Отсюда следует, что в первых двух случаях собственные числа являются простыми, каждому из них соответствует только одна собственная функция, а в третьем случае существуют присоединенные функции, причем количество таких функций для каждой фиксированной паре $(n,k)$ равно 1 [3].

Переходим к исследованию полноты собственных и присоединенных функций задачи (1)-(2). Для этого рассмотрим следующую задачу

$$-X''(x) = f(x), X'0) = 0,\ X(1) = X(x_0), \tag{10}$$

где $x_0 \in (0,1), f(x) \in L_2(0,1)$.

Далее, ведём оператор $L_0$, определенный равенством $L_0 X = -X''$, с областью определением $D(L_0) = \{X(x) \in C^\infty[0,1] : X'0) = 0,\ X(1) = X(x_0)\}$. Пусть $L$ - оператор, полученный замыканием оператора $L_0$, в норме $L_2(0,1)$.

Имеет место:

**Теорема 2.1.** *Система корневых функций оператора $L$ полна в $L_2(0,1)$.*

При доказательстве этой теоремы используем следующий критерий о базисности, полученной в работе [14]:

**Теорема 2.2 [14].** *Пусть $A$ - замкнутый линейный оператор, заданный на всюду плотном линеале в гильбертовом пространстве $H$, резольвента которого $R_\lambda$ вполне непрерывен, и пусть существует плотное множество $S$ пространство $H$ и последовательность окружностей $\Gamma_n$ с центром в начале координат, обладающих следующими свойствами:*

*1) на $\Gamma_n$ нет собственных значений оператора $A$.*

*2) радиусы окружностей $\Gamma_n$ неограниченно возрастает при $\lambda \to \infty$.*

*3) для любого вектора $f \in S$ резольвента $R_\lambda$ удовлетворяет условию: $\max\limits_{\lambda \in \Gamma_n} \|R_\lambda f\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

*Тогда система собственных и присоединенных векторов оператора $A$ полна в $H$.*

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим задачу (10) и построим резольвенту $R(L, \lambda)$ этого оператора в явном виде. Нетрудно увидеть, что её ядро можно представить в виде

$$(R_\lambda f)(x) = (R_1 f)(x) + (R_2 f)(x), \tag{11}$$

где ядра операторов в правой части (11) имеют вид

$$R_1(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda), R_2(x,t,\lambda) = \frac{ch\mu x}{[ch\mu x - ch\mu x_0]} \cdot G(x_0,t,\lambda). \tag{12}$$

Здесь $\mu^2 = -\lambda$, $\lambda$ - комплексное число,

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\mu \cdot ch\mu x} \begin{cases} ch\mu x \cdot sh\mu(1-t), \, 0 \le x \le t, \\ ch\mu t \cdot sh\mu(1-x), t \le x \le 1. \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим случай $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Из (12), (13) непосредственным вычислением получим, что функция $R_1(x,t,\lambda)$ является резольвентой следующей самосопряженной задачи

$$-y'' = \lambda y(x) + f(x), y'(0) = 0, \, y(1) = 0. \tag{14}$$

Тогда для $R_1$ из [15] следует следующая оценка

$$\|R_1\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{|r \sin\varphi|}, \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

где $r = |\lambda|, \varphi = \arg\lambda$.

Так как $\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \sin\varphi \neq 0$, из этой оценки следует, что $\max\limits_{\lambda\in\Gamma_n} \|R_1\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$, и при этом в качестве окружности, упомянутой в теореме 2.2 можно взять любую окружность.

Пусть теперь $\operatorname{Im}\lambda = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = r, \mu = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow |\mu| = \sqrt{r}$. Учитывая (12) и (13), оценим норму $R_1$

$$||R_1||^2_{L_2(\Omega)} \le \iint\limits_{\Omega} |G(x,t,\lambda)|^2 dxdt.$$

Интеграл в правый части вычисляется в явном виде. Действительно, учитывая, что $\mu$ - мнимое число, а также формулы

$$shz = -i \sin iz, chz = i \cos iz,$$

после некоторых несложных вычислений, получим, что

$$\iint\limits_{\Omega} |G(x,t,\lambda)|^2 dxdt = \frac{1}{4r\cos^2\sqrt{r}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{r}}\right).$$

Таким образом для $R_1$ получим оценку

$$||R_1 f||_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{2|\cos\sqrt{r}|} \sqrt{\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{r}}\right)}.$$

Так как число нулей функции $\cos\sqrt{r}$ счетно, то всегда существует последовательность чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}, r_n \to \infty$, для которой значение правой части последнего неравенства стремится к нулю, и значит $||R_1||_{L_2(\Omega)} \to 0$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$.

Аналогичным образом получим следующую оценку для нормы оператора $R_2$:

$$||R_2||_{L_2(\Omega)} \leq \frac{}{\sqrt{r}} \Leftrightarrow |R_2||_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}},$$

где $\lambda \in \Gamma_n$ - достаточно большое по модулю число, $C > 0$ - конечное число, зависящее от $\lambda$ и $x_0$. И в этом случае $||R_{2\lambda}||_{L(\Omega)} \to 0, \lambda \to \infty$, $\lambda \in \Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$.

Таким образом, последовательность окружностей $\Gamma_n$, обладающих свойствами, приведенной в теореме 2.2 существует, при этом $\|R_\lambda(L)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда следует, что система корневых функций оператора $L$ полна в $L_2(0,1)$.

Теорема 2.1 доказана. □

Теперь находим те значения $x_0$, при которых соотношение (5) имеет место. Пусть $x_0$ рациональное число из интервала $(0,1)$, т.е. $x_0 = \frac{p}{q} \in (0,1)$ и $(p,q) = 1$. Отсюда легко следует такой тривиальный факт, что $q+p$ и $q-p$ одновременно либо четное или нечетное. Учитывая всё это, легко доказать, что имеет место:

**Лемма 2.2.** *Пусть $x_0$ рациональное число из (0, 1), то есть $x_0 = \frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ взаимно простые натуральные числа, причем $p < q$. Тогда существует счетное число значений $n$ и $k$, такие, что двух серий собственных чисел из (3) имеет место $\lambda_{n1} = \lambda_{k2}$, причем $k$ и $n$ имеют вид $k = s(q-p)$ и $n = s(q+p)$. Здесь $s \in N$, когда $q-p$ нечетное и $2s \in N$, когда $q-p$ четное.*

Из этой леммы, а также теоремы 2.1 следует, что

**Следствие 2.1.** Пусть $x_0$ иррациональное число из (0,1). Тогда собственные значения задачи (1)-(2) простые, имеющие вид (3), а система собственных функций (4) полна в $L_2(0,1)$.

**Следствие 2.2.** Пусть $x_0$ рациональное число из (0, 1), то есть $x_0 = \frac{p}{q}$, где $(p,q) = 1$ и $q-p = 1,2$. Тогда для двух множеств собственных чисел $\{\lambda_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{k2}\}_{k=1}^{\infty}$ из (3) имеет место следующее включение $\{\lambda_{k2}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\lambda_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. множество собственных чисел $\{\lambda_{k2}\}_{k=1}^{\infty}$ содержится во множестве $\{\lambda_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Наряду с задачей (1)-(2), также рассмотрим задачу, сопряженную к этой задаче. Нетрудно определить, что сопряженной к ней будет следующая задача

$$-Y''(x) = \lambda Y(x),\, x \in (0,x_0) \cup (x_0,1), \tag{15}$$

$$Y'(0) = 0,\, Y(1) = 0, \tag{16}$$

$$Y(x_0+0) = Y(x_0-0),\, Y'(1) = Y'(x_0+0) - Y'(x_0-0). \tag{17}$$

Отметим, что решение уравнения (15), удовлетворяющее условиям (16), (17), находится однозначно, т. е. рассматриваемая задача не имеет дополнительных условий. Эту задачу можно рассматривать как две краевые задачи с условиями склеивания вида (17).

Теперь, учитывая лемму 2.1 и следствия 2.1 и 2.2 находим корневые функции этих задач.

Рассмотрим случай, когда $x_0$ иррациональное число из (0, 1). В этом случае получим две серии собственных чисел вида (3), которым соответствуют собственные функции вида (4), причём все эти функции разные и не ортогональные.

Задача (15)-(17) также имеет собственные числа вида (3). Решая эту задачу, нетрудно видеть, что собственные функции имеют вид

$$\{Y_0(x); Y_{n1}(x); Y_{n2}(x)\}, n \in N, \tag{18}$$

где

$$Y_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x_0}, x \in [0,x_0], \\ \dfrac{2}{1-x_0^2}(1-x),\, x \in [x_0,1], \end{cases},$$

$$Y_{n1}(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{1+x_0}\cos\sqrt{\lambda_{n1}}x, x \in [0,x_0], \\ \dfrac{2}{(1+x_0)\sin\sqrt{\lambda_{n1}}}\sin\sqrt{\lambda_{n1}}(1-x),\, x \in [x_0,1], \end{cases},$$

$$Y_{n2}(x)=\begin{cases} 0, x\in[0,x_0], \\ \dfrac{2}{(1-x_0)\sin\sqrt{\lambda_{n2}}}\sin\sqrt{\lambda_{n2}}x,\ x\in[x_0,1], \end{cases}.$$

Имеет место

**Лемма 2.3.** *Системы функций (4) и (18) являются биортогональными, то есть имеет место*

$$(X_0(x),Y_0(x))_{L_2(0,1)}=1,(X_{ni}(x),Y_0(x))_{L_2(0,1)}=(X_0(x),Y_{ni}(x))_{L_2(0,1)}=0, i=1,2,$$

$$(X_{k1}(x),Y_{nj}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases} 1,\ k=n, j=1, \\ 0, k\neq n, j=1,2, \end{cases}, (X_{k2}(x),Y_{nj}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases} 1,\ k=n, j=2, \\ 0, k\neq n, j=1,2, \end{cases}.$$

Доказательство леммы 2.3 проводится непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов.

Перейдем к изучению базисности систем (4) и (18). Имеет место:

**Лемма 2.4.** *Пусть $x_0$ иррациональное число. Тогда существуют последовательности $n_{1m}$ и $n_{2m}$, для которых $\|Y_{n_{im}}(x)\|_{L_2(0,1)}\to\infty, i=1,2$.*

При доказательстве леммы используем следующую теорему о приближении иррациональных чисел с рациональными числами [16, 17].

**Теорема Дирихле.** *Пусть $\alpha$-действительное число, а $t$-натуральное число. Тогда существуют целые числа $p$ и $q$ такие, что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qt}, 0<q\leq t.$$

*Так как $q\leq t$, отсюда также следует, что*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \tag{19}$$

Доказательство леммы. Докажем лемму при $i=2$. Для удобства записи, вместо $n_2$ используем $n$. Пусть $r=\dfrac{1-x_0}{2}$, где $x_0$- иррациональное число, тогда $\lambda_n=\lambda_{n_2}=\left(\dfrac{\pi n}{r}\right)^2$. Как следует из (19), неравенство $\left|r-\dfrac{n}{s}\right|<\dfrac{1}{s^2}$ имеет бесконечно много решений, которые обозначим через $n_m$ и $s_m$. Таким образом $\left|r-\frac{n_m}{s_m}\right|<\frac{1}{s_m^2}$. Отсюда

$$\left|\frac{n_m\pi}{r}-\pi s_m\right|=\frac{\pi s_m}{r}\left|r-\frac{n_m}{s_m}\right|<\frac{\pi s_m}{r}\frac{1}{s_m^2}=\frac{\pi}{rs_m}.$$

Учитывая это получим

$$\sin^2\frac{\pi n_m}{r}<\sin^2\frac{\pi}{rs_m}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\frac{\pi n_m}{r}}>\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{rs_m}}\to\infty, m\to\infty.$$

Так как

$$\|Y_{n_{2s}}(x)\|_{L_2(0,1)}=\frac{4}{\sin^2\frac{\pi n_m}{r}},$$

отсюда и следует доказательство леммы в случае $i=2$. Аналогичным образом получим доказательство леммы при $i=1$. □

Из этой леммы следует

**Следствие 2.3.** Пусть $x_0$ – любое иррациональное число из интервала $(0,1)$. Тогда системы корневых (собственных) функций задач (1)-(2) и (15)-(17) не образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Отметим, что более подробную информацию о базисах Рисса можно найти в работе [18].

Рассмотрим теперь случай, когда $x_0$ рациональное число из (0, 1). С учетом леммы 2.1 и следствия 2.2 изучаем случай $q-p=1$. Случай $q-p\geq 2$ исследуется аналогично.

Пусть $q-p=1$. В этом случае, решая задачу (1)-(2), получаем, что собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_0=0,\ \lambda_{n_1}=\left(\frac{2nq\pi}{p+q}\right)^2,\ \lambda_{k_2}=(2kq\pi)^2, n,k\in N, n\neq k(q+p),$$

им соответствуют собственные функции (4), а также для каждого значения $\lambda_{k_2}$ существуют присоединенные функции вида $\tilde{X}_{k2}(x)=x\sin\sqrt{\lambda_{k2}}x$. Таким же образом находим собственные и присоединенные функции сопряженной задачи (15)-(17) в случае $q-p=1$. Полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

| **No.** | **Собственные числа** | **Собственные и присоединенные функции основной задачи** | **Собственные и присоединенные функции сопряженной задачи** |
|---|---|---|---|
| **1** | $\lambda_0=0$ | $X_0(x)=1,\ x\in[0,1]$ | $Y_0(x)=\begin{cases}\frac{2}{1+x_0}, x\in[0,x_0]\\ \frac{2(1-x)}{1-x_0^2}, x\in[x_0,1]\end{cases}$ |
| **2** | $\lambda_{n1}=\left(\frac{2q\pi n}{q+p}\right)^2$ $n\neq k(q+p),\ k,n\in N$ | $X_{n1}(x)=\cos\sqrt{\lambda_{n1}}x,\ x\in[0,1]$ | $Y_{n1}(x)=\begin{cases}\frac{4\cos\sqrt{\lambda_{n1}}x}{1+x_0}, x\in[0,x_0]\\ \frac{2\sin\sqrt{\lambda_{n1}}(1-x)}{(1+x_0)\sin\sqrt{\lambda_{n1}}}, x\in[x_0,1]\end{cases}$ |
| **3** | $\lambda_{n2}=(2qn\pi)^2,\ n\in N$ | $X_{n2}(x)=\cos\sqrt{\lambda_{n2}}x,\ x\in[0,1]$ | $\tilde{Y}_{n2}=\begin{cases}\frac{4\cos\sqrt{\lambda_{n2}}x}{1+x_0}, x\in[0,x_0]\\ \frac{4(1-x)\cos\sqrt{\lambda_{n2}}x}{1-x_0^2}, x\in[x_0,1]\end{cases}$ |
| **4** | $\lambda_{n2}=(2qn\pi)^2,\ n\in N$ | $\tilde{X}_{n2}(x)=x\sin\sqrt{\lambda_{n2}}x,\ x\in[0,1]$ | $Y_{n2}(x)=\begin{cases}0, x\in[0,x_0]\\ \frac{4\sin\sqrt{\lambda_{n2}}x}{1-x_0^2}, x\in[x_0,1]\end{cases}$ |

Теперь изучаем базисность найденных систем корневых функций.

**Лемма 2.5.** *Пусть $x_0$ любое рациональное число из интервала $(0,1)$, такое что $q-p=1$. Тогда системы корневых функций задач (1)-(2) и (15)-(17) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.*

При доказательстве леммы воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 2.3 [19].** *Пусть $H$ - гильбертово пространство. Следующие три утверждения эквивалентны:*

*1) система $\{\varphi_j\}_1^\infty$ образует базис Рисса в $H$;*

*2) система $\{\varphi_j\}_1^\infty$ минимальна и полна в $H$, система $\{\varphi_j\}_1^\infty$ и биортогоналная система $\{\psi_j\}_1^\infty$ бесселева в $H$;*

*3) система $\{\varphi_j\}_1^\infty$ равномерно минимальна, бесселева и гильбертова в $H$.*

Доказательство леммы 2.5. Как следует из п.2 теоремы 2.3, для доказательства базисности Рисса систем $\{X_0(x); X_{ni}(x); \tilde{X}_{n2}(x)\}$ и $\{Y_0(x); Y_{ni}(x); \tilde{Y}_{n2}(x)\}$, $i=1,2$ достаточно установить минимальность и полноту системы $\{X_0(x); X_{ni}(x); \tilde{X}_{n2}(x)\}$, $i=1,2$, а также бесселевость обеих систем. Полнота системы следует из теоремы 2.1, а минимальность следует из той же теоремы и леммы 2.3. Бесселевость этих систем следует из бесселевости систем типа $\{\sin(an+b)x\}$ и $\{\cos(an+b)x\}$ на любом конечном интервале для любого вещественного $a\neq 0, b$ ([19], стр.36). Аналогично доказывается базисность корневых функций задач (1)-(2) и (15)-(17) в случае $q-p\geq 2$. □

## Список литератур


1. М.А.Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. 1969. Москва: Наука.
2. В.А.Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка. Дифференциальные Уравнения. 1986. Том 22, No 12, стр.2059–2071.
3. М.В.Келдыш. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. УМН. 1971. Том 26, Выпуск 4(160), стр.15–41.
4. М.В.Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР. 1951. Том 77, No 1, стр.11–14.

5. Н.И.Ионкин. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Диффереициальные уравнения. 1977. Том 13, No 2, стр.294-304
6. В.А.Ильин. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора. Тр. МИАН СССР. 1976. Том 142, стр. 148-155.
7. В.А.Ильин. О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора. Дифференциальные уравнения. 1994. Том 30, No 9, стр.1516-1529.
8. M. Sadybekov, G. Dildabek, A. Tengayeva. Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem. Filomat. 2017. Vol.31, Issue 4, pp.981–987.
9. М.А.Садыбеков, А.М.Сарсенби. Об одном необходимом условии базисности системы нормированных элементов в гильбертовом пространстве. Вестник Томского государственного университета. Серия «Математика и механика». 2011. No 1(13), стр.44-46.
10. М.А.Садыбеков, А.М.Серсенби. Новое определение присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных операторов. Доклады НАН РК. 2006. стр.13-17.
11. A.V.Bitsadze, A.A.Samarskii. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1969. Vol.185, pp.739–740. [Engl. Transl. from Russian Soviet Math.Dokl. 1969. Vol.10, pp.398–400.
12. Б.Ж.Кадиркулов, О.Т.Эргашев. Об одной обратной задаче типа Бицадзе-Самарского для дробного параболического уравнения с вырождением. Сб. тезисов межд. конф. «Традиционная апрельская математическая конференция», Алматы, Казахстан. 2023, стр.88.
13. Р.Р.Ашуров, Б.Ж.Кадиркулов, М.А.Жалилов. Об одной обратной задаче типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося параболического уравнения дробного порядка. Сб. тез. межд. научно-практической конф. «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», Нукус, Узбекистан. 2023, стр.250-251.
14. М.А.Наймарк. О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве. Доклады АН СССР. 1954. Том 98, No 5, стр.727-730.
15. Н.Данфорд и Дж.Т.Шварц. Линейные операторы (Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве). Часть 2. 1966. Москва: МИР.
16. А.А.Бухштаб. Теория чисел. 1966. Москва: Просвещение.
17. L.V.Kritskov, A.M.Sarsenbi. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution. Differential Equations. 2015. Vol.51, pp.984–990.
18. Н.К.Бари. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Уч. Зап. МГУ. 1951. Том 148, Выпуск 4, стр.69-107.
19. В.Д.Будаев. Ортогональные и биортогональные базисы. Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2005. Том 5, No 13, стр.7-38.


## Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi masala

**Kadirkulov Baxtiyor, Ergashev Okiljon**

Maqolada Bitsadze-Samarskiy turidagi oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan masalaning spektral muammolari oʻrganilgan. Qaralayotgan masalaning xos qiymatlari, ularga mos xos funksiyalari topilib, ergashuvchi funksiyalarning mavjudligi shartlari aniqlangan. Shu bilan birga qoʻshma masala ham oʻrganilib, topilgan oʻzak funksiyalar tizimlarining toʻliqligi va Riss bazisi boʻlishligi isbotlangan.

**Kalit soʻzlar:** Bitsadze-Samarskiy turidagi masala; oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan masala; xos va ergashuvchi funksiyalar; toʻlalik; Riss bazisi.

On a problem of the Bitsadze-Samarskii type for a second-order ordinary differential equation

**Kadirkulov Baxtiyor, Ergashev Okiljon**

The paper investigates the spectral questions of a non-self-adjoint problem of the Bitsadze-Samarskii type. Eigenvalues corresponding to eigenfunctions are found, and conditions for the existence of associated functions are found. Spectral questions of the adjoint problem are also studied. Next, we prove the completeness and also the Riesz basis property of the systems of root functions of these problems.

**Keywords:** Bitsadze-Samarskii type problem; non-self-adjoint problem; eigenfunctions and associated functions; completeness; Riesz basis.

**Получено: 22/03/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Kadirkulov B., Ergashev O. On a problem of the Bitsadze-Samarskii type for a second-order ordinary differential equation *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 113-121

# Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми

**Рахмонов Зарулло**
Института математики им. А. Джураева
г. Душанбе,Таджикистана
zarullo-r@rambler.ru

**Аллаков Исмаил**
Факультет физики и математики
Термезский государственный университитет
Термез, Узбекистан
iallakov@mail.ru

**Абраев Бахром**
Факультет физики и математики
Термезский государственный университитет
Термез, Узбекистан
babrayev@mail.ru

## Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального $N$ в виде $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ с условиями

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \qquad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

где $b_i$ — натуральные числа, $b_1$, $b_2$ $b_3$, $N$ попарно взаимно простые, $B_i$ — произвольные фиксированные положительные числа.

**Ключевые слова:** тернарная проблема Гольдбаха; почти равные слагаемые; короткая тригонометрическая сумма с простыми числами; малая окрестность центров больших дуг.

**MSC 2020:** 11D85

## 1. Введение

*Обозначения.* $N > N_0$ – натуральное число, $\varepsilon$ — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $ord_p(n)$ — наибольшая степень простого числа $p$, делящего целое число $n$, то есть $p^{ord_p(n)}\|n$;

$$S(a,q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right), \gamma_n(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right) du.$$

По теореме Дирихле, каждое $\alpha$ из отрезка $[0,\ 1]$ можно представить в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leq q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

С помощью $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа $\alpha$, для которых выполняется условие $q \leq P$, $P < Q$, а с помощью $\mathfrak{m}(P)$ обозначим остальные $\alpha$. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно будем называть большими и малыми дугами.

И.М. Виноградов [1, 2] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. В частности он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \leq N} \Lambda(m) e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного $N$ в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха. Короткую линейную тригонометрическую сумму Германа Вейля с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М. Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. К.В. Хазелгров [3] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ при условии

$$y \geq x^\theta, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Пользуясь этими результатами ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq N^\theta, \tag{1}$$

нашёл асимптотическую формулу.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4] на базе метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей $L$-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, разработали новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ при условии

$$y \geq x^\theta, \qquad \theta = \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т. Жан [5], используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценку М. Ютилы [6] о четвёртом моменте $L$-функций Дирихле, заменил показатель $\theta$ на

$$\frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа [7]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

A. Baker [8] доказал: *если $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$— ненулевые действительные числа, не одного знака, причем хотя бы одно из отношений $\lambda_i/\lambda_j$ иррационально, тогда для любого натурального $n$ существует бесконечно много простых чисел $p_1$, $p_2$, $p_3$, удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leq (\ln p)^{-n}, \qquad p = \max(p_1, p_2, p_3).$$

Он в процессе доказательства этого результата воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм вида

$$\mathcal{S}_1(b_i\alpha, N) = \sum_{p \leq N} e(b_i \alpha p)$$

как в больших так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \tag{2}$$

в простых числах $p_1$, $p_2$, $p_3$, где $b_1$, $b_2$, $b_3$ и $N$ — целые числа.

Основным результатом этой работы является теорема 1.1 об асимптотической формуле для количества решений диофантово уравнение (2) при условии, что слагаемые $b_i p_i$ почти равны, а коэффициенты $b_1$, $b_2$, $b_3$ не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа $N$.

**Теорема 1.1.** *Пусть $b_1$, $b_2$, $b_3$, $N$ попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leq (\ln N)^{B_i}$, $I(N, H)$ число решений диофантового уравнения*

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \qquad \left|b_i p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H,$$

в простых числах $p_1$, $p_2$ и $p_3$. Тогда при $H \geq (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)\ H^2}{b_1b_2b_3\ (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1b_2b_3(\ln N)^4}\right),$$

$$\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N) = \prod_p \left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1b_2b_3N} \left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right).$$

С помощью кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова доказательство теоремы 1.1 сведено к трём следующим задачам, которые решены в теоремах 1.2 и 1.3 и заключаются в следующем:

- исследования поведения специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида
$$S_1(b\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(b\alpha n),$$
в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$;
- нахождение нетривиальных оценок этих коротких тригонометрических сумм в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$ кроме малых окрестностей их центров;
- получение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^{c_1})$.

**Теорема 1.2.** *Пусть $x \geq x_0$, $A$, $B$, $c_1$ и $c_2$ — абсолютные постоянные числа, $c_2 \leq c_1$, $b$ — натуральное число, $b \leq (\ln x)^B$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \qquad 1 \leq q \leq h, \qquad h = (\ln x)^{c_1}, \qquad \tau = \frac{y^2}{x(\ln x)^{c_2}}.$$

*Тогда при $y \geq x^{\frac{5}{8}} bh(\ln x)^{2{,}25A+81}$ справедливо равенство*

$$S_1(b\alpha;x,y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b,q)}\right)} \frac{\sin \pi b\lambda y}{\pi b\lambda} e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y(\ln x)^{-A}\right).$$

**Теорема 1.3.** *Пусть $x \geq x_0$, $A$ — абсолютная постоянная, $y \geq bx^{\frac{2}{3}} (\ln x)^{\frac{8}{3}A+52}$, $b$ — натуральное число,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad b(\ln x)^{4A+82} < q \leq \frac{y^2}{x}(\ln x)^{-4A-82}, \qquad |\theta| \leq 1.$$

*Тогда справедлива оценка*

$$S_1(b\alpha;x,y) \ll \frac{y}{(\ln x)^A}.$$

## 2. Вспомагательные леммы

**Лемма 2.1.** [9]. *Пусть $\chi_q$ — примитивный характер по модулю $q$. Тогда*

$$\tau(\bar{\chi}_q)\chi_q(n) = \sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}_q(m) e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

*где*

$$\tau(\chi_q) = \sum_{m=1}^{q} \chi_q(m) e\left(\frac{m}{q}\right), \qquad |\tau(\chi_q)| = \sqrt{q}.$$

**Лемма 2.2.** [10]. *Пусть $2 \leq T_0 \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma|\leq T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x,T_0,\chi), \quad R(x,T_0,\chi) \ll \frac{x(\ln x)^2}{T_0},$$

*где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.*

**Лемма 2.3.** [9]. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $c = c(\varepsilon)$ *такое, что если* $\chi_1$ *— действительный характер по модулю* $q$ *и* $\beta_1$ *— действительный нуль* $L(s, \chi_1)$, *то*

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}.$$

**Лемма 2.4.** [11]. *Пусть действительная функция —* $f(u)$, *и монотонная функция —* $g(u)$ *удовлетворяют условиям:* $f'(u)$ *— монотонна,* $|f'(u)| \geq m_1 >$ *и* $|g(u)| \leq M$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

**Лемма 2.5.**[12]. *При подходящем* $c > 0$ *функция* $L(s, \chi)$, $s = \sigma + it$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geq 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

*для всех характеров* $\chi$ *по* $\mod q$, *за исключением, быть может простого действительного нуля* $\beta_1$ *у* $L$*–функции, определенной исключительным характером* $\chi_1$.

**Лемма 2.6.** *Пусть* $\varepsilon$ *сколь угодна малая положительная постоянная,* $A$ *— произвольное фиксированное положительные число,* $T^{\frac{7}{22}+\varepsilon} \leq H \leq T$ *и* $q \leq \ln^A T$, *тогда справедливы оценки*

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll (qH)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33},$$

*где* $c = 2,4$, *если* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ *или* $\frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1$; *и* $c = \frac{8}{3}$, *если* $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Эта лемма доказывается методом работы [13]

**Лемма 2.7.**[14]. *При* $x \geq 2$ *имеем*

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^k(n) \ll x\,(\ln x)^{r^k - 1}, \qquad k = 1, 2.$$

**Лемма 2.8.** [15]. *При вещественном* $\alpha$, *подчинённом условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leq q \leq N, \quad |\theta| \leq 1,$$

*а) для суммы*

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q' < q, \qquad U > 0$$

*имеем неравенство*

$$V_g \ll U + q \ln q,$$

*б) а для суммы*

$$V = \sum_{0 < z \leq 0,5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

*имеем неравенство*

$$V \ll q \ln q.$$

**Лемма 2.9.** [16]. *Пусть* $f(n)$ *— произвольная комплекснозначная функция,* $u_1 \leq x$, $r \geq 1$,

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d \backslash n,\, d \leq u_1} \mu(n).$$

*Тогда имеет место тождество:*

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) f(n) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \sum_{m_1 \leq u_1} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{m_k \leq u_1 \\ m_1 \cdots m_k n_1 \cdots n_k \leq x}} \mu(m_k) \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_k} \ln n_1 f(m_1 n_1 \cdots m_k m_k) +$$

$$+(-1)^r\sum_{n_1\ge u_1}\lambda(n_1)\cdots\sum_{\substack{n_r\ge u_1\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x}}\lambda(n_r)\sum_m\Lambda(m)f(n_1\cdots n_r m).$$

**Лемма 2.10.** *Пусть* $y\ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, *тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x)-\pi(x-y)=\frac{y}{\ln x}+O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

## 3. Поведение специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах

В этом пункте докажем теорему о поведении тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(b\alpha n),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln x)^{c_1})$, $\tau=y^2x^{-1}(\ln x)^{-c_2}$, где $c_1$, $c_2$ — произвольные фиксированные положительные числа.

Доказательство теоремы 1.2.

Не ограничивая общности будем считать, что

$$y=x^{\frac{5}{8}}bh(\ln x)^{2{,}25A+81}. \tag{3}$$

Для удобства с помощью обозначений $q_1=\dfrac{q}{(b,q)}$ и $b_1=\dfrac{b}{(b,q)}$ чисел $q$ и $b$ представим в виде

$$b=b_1(b,q),\qquad q=q_1(b,q),\qquad 1\le q_1\le q,\qquad (b_1,q_1)=1.$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, затем леммой 2.1, находим

$$\begin{aligned}
S_1(b\alpha;x,y)&=\sum_{k=1}^{q_1}e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e\left(b\lambda n\right)\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\overline{\chi}(k)\chi(n)+O((\ln x)^2)=\\
&=\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{k=1}^{q_1}\overline{\chi}(k)e\left(\frac{ab_1k}{q_1}\right)\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)+O((\ln x)^2)=\\
&=\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\chi(ab_1)\tau(\overline{\chi})\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)+O((\ln x)^2)
\end{aligned}\tag{4}$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)$$

Пользуясь леммой 2.2 при $T_0=\left(xy^{-1}+|b\lambda|x\right)q_1^{\frac12}(\ln x)^{A+3}$, найдем

$$\begin{aligned}
\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)&=-\int_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(b\lambda u)+\\
&+e(b\lambda x)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-e(b\lambda(x-y))\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\le T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)\\
&-\int_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi ib\lambda e(b\lambda u)du+e(b\lambda x)R(x,T_0)-e(b\lambda(x-y))R(x-y,T_0).
\end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, пользуясь оценкой для $R(u,T_0)$ из леммы 2.2, находим

$$\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\chi(n)e(b\lambda n)=E_0\int_{x-y}^{x}e(b\lambda u)du-\sum_{|\gamma|\le T_0}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\rho-1}}{\rho}e(b\lambda u)du+O\left(\frac{y}{q^{\frac12}(\ln x)^{A+1}}\right)=$$

$$= E_0\frac{\sin\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-\sum_{|\gamma|\le T_0}I(\rho,b\lambda)+O\left(\frac{y}{q_1^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{A+1}}\right),$$

$$I(\rho,b\lambda)=\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(b\lambda u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Отсюда и из (4) для $S_1(b\alpha;x,y)$, найдем следующее выражение:

$$S_1(b\alpha;x,y)=\frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)}\frac{\sin\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-W(b\alpha;x,y)-E_1W_1(b\alpha;x,y)+O(y(\ln x)^{-A}),\tag{5}$$

$$W(b\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\chi(ab_1)\tau(\overline{\chi})\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}I(\rho,b\lambda),$$

$$W_1(b\alpha;x,y)=\frac{\chi_1(ab)\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}I(\beta_1,b\lambda),$$

где $E_1=1$, если по модулю $q_1$ существует действительный характер $\chi_1$ такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1$,

$$\beta_1\ge 1-\frac{c}{\ln q},$$

и $E_1=0$ в противном случае.

### 3.1. Оценка $|W_1(b\alpha;x,y)|$

Воспользовавшись тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1)$ и интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, найдем

$$|W_1(b\alpha;x,y)|=\left|\frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(b\lambda u)du\right|\ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 2.3, имея в виду, что $q_1<q\le(\ln x)^{c_1}$, при $\varepsilon=(2c_1)^{-1}$, имеем

$$x^{\beta_1-1}=\exp\left((\beta_1-1)\ln x\right)\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\ln x}{q^{\varepsilon}}\right)\le\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\ln x}{(\ln x)^{b\varepsilon}}\right)=\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\ln x}).$$

Следовательно

$$|W_1(b\alpha;x,y)|\ll y\exp\left(-c(\varepsilon)\sqrt{\ln x}\right)\ll y(\ln x)^{-A}.\tag{6}$$

### 3.2.Преобразование $|W(b\alpha;x,y)|$

Переходя к оценкам, имеем

$$|W(b\alpha;x,y)|\le\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}|\tau(\bar\chi)||w(b\lambda,\chi)|,\qquad w(b\lambda,\chi)=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}|I(\rho,b\lambda)|,\tag{7}$$

где $\beta_1$ — действительный нуль, если по модулю $q_1$ существует действительный характер $\chi_1$ такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1\ge 1-\frac{c}{\ln q}$. Сумму $|W(\alpha;x,y)|$ оценим в случае $\lambda\ge 0$. Случай $\lambda\le 0$, сводится к случаю $\lambda\ge 0$ с помощью соотношения

$$w(b\lambda,\chi)=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}\left|\overline{I(\rho,b\lambda)}\right|=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}\left|\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(-b\lambda u-\frac{1}{2\pi}\gamma\ln u\right)du\right|=$$

$$=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}|I(\bar\rho,-b\lambda)|=\sum_{\substack{|\gamma|\le T_0\\ \rho\ne\beta_1}}|I(\rho,-b\lambda)|=w(-b\lambda,\chi),$$

Воспользовавшись леммой 2.4, при $M=x^{\beta-1}$, $f(u)=b\lambda u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1=\min f'(u)$, оценим тригонометрический интеграл $I(\rho,b\lambda)$. Найдем

$$|I(\rho,\lambda)|\le\frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|}=\frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|},\qquad f'(u)=b\lambda+\frac{\gamma}{2\pi u}=\frac{\gamma+2\pi kb\lambda u}{2\pi u}.$$

Отсюда и из тривиальной оценки

$$|I(\rho, b\lambda)| \le \int_{x-y}^{x} u^{\beta-1} du \le yx^{\beta-1},$$

получим

$$|I(\rho, b\lambda)| \le x^{\beta} \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|xf'(u)|}\right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношением

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi kb\lambda u|\frac{x}{2\pi u} \ge \frac{1}{2\pi}|\gamma + 2\pi kb\lambda u|,$$

представим в виде

$$|I(\rho, b\lambda)| \ll x^{\beta} \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 2\pi kb\lambda u|}\right). \tag{8}$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы $\tau(\chi)$ в (7), а затем пользуясь соотношением $q_1/\varphi(q_1) \ll \ln\ln q_1$, получим

$$|W(b\alpha; x, y)| \ll \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} w(b\lambda, \chi) \ll \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{q_1}} \sum_{\chi \bmod q_1} w(b\lambda, \chi). \tag{9}$$

Все нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием $|\gamma| \le T_0$ разобьём на множества

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 \le \gamma < -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y}\right\},$$

$$D_2 = \left\{\rho:\ -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \le \gamma \le -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y}\right\},$$

$$D_3 = \left\{\rho:\ -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma \le T_0\right\}.$$

Через $w_j(b\lambda, \chi)$, $j = 1,\ 2,\ 3$ обозначая интеграл $I(\rho, b\lambda)$ по нулям $\rho$, принадлежащим множеству $D_j$ и представим сумму $w(b\lambda, \chi)$ в (7) в виде:

$$w(b\lambda, \chi) = w_1(b\lambda, \chi) + w_2(b\lambda, \chi) + w_3(\chi, b\lambda). \tag{10}$$

### 3.2.1.Преобразование $w_1(b\lambda, \chi)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество $D_1$, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x - y \le u \le x$, получим

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 + 2\pi b\lambda u \le \gamma + 2\pi b\lambda u < -2\pi b\lambda x + 2\pi b\lambda u - \frac{x}{y}\right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в интервале $x-y \le u \le x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множество $D_1$, имеем

$$-2\pi b\lambda x + 2\pi b\lambda u - \frac{x}{y} \le -\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если $\rho \in D_1$, то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u < -\frac{x}{y}$, поэтому в интервале $x - y \le u \le x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma + 2\pi b\lambda u| = -\max(\gamma + 2\pi b\lambda u) = -\gamma - 2\pi b\lambda x \ge \frac{x}{y}, \quad \text{если} \quad \rho \in D_1.$$

Отсюда и из второй оценки (8), найдем

$$w_1(b\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^{\beta}}{-\gamma - 2\pi b\lambda x}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 \le \gamma < -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \le -\gamma - 2\pi b\lambda x < T_0 - 2\pi b\lambda x\right\},$$

разобьём на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$, в класс $D_{1n}$ отнесём те нули $\rho$, для которых выполняется условие:

$$nH < -\gamma - 2\pi b\lambda x \leq (n+1)H, \qquad H = \frac{bhx}{q_1 y}, \qquad 1 \leq n \leq r.$$

Следовательно

$$w_1(b\lambda, \chi) \ll \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi b\lambda x} \leq \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq$$

$$\leq \frac{(\ln x)}{H} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{(\ln x)}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H<\gamma \leq T} x^\beta.$$

### 3.2.2.Преобразование $w_3(\chi, b\lambda)$

Ко всем членам неравенства, с помощью которых определяется множество $D_3$, прибавляя слагаемое $2\pi b\lambda u$, $x - y \leq u \leq x$, получим

$$D_3 = \left\{ \rho : \ 2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi b\lambda u \leq T_0 + 2\pi b\lambda u \right\}.$$

Функция $2\pi b\lambda u$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ монотонно возрастает, поэтому на левой границы множества $D_3$, имеет место неравенство

$$2\pi b\lambda u - 2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}.$$

Отсюда следует, что если $\rho \in D_3$, то имеет место неравенство $\gamma + 2\pi b\lambda u > \frac{x}{y}$. Следовательно в отрезке $x - y \leq u \leq x$ для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi b\lambda u$ справедливо неравенство

$$\min|\gamma + 2\pi b\lambda u| = \min(\gamma + 2\pi b\lambda u) = \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \geq \frac{x}{y}, \quad \text{при} \quad \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (8), находим

$$w_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \left\{ \rho : \ \frac{x}{y} \leq \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) < T_0 + 2\pi b\lambda(x-y) \right\},$$

разобьём на классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3r}$, $r \ll T_0 H^{-1}$, в класс $D_{3n}$ отнесём те нули $\rho$, для которых выполняется условие:

$$nH < \gamma + 2\pi b\lambda(x-y) \leq (n+1)H, \qquad H = \frac{bhx}{q_1 y}, \qquad 1 \leq n \leq r.$$

Следовательно

$$w_3(\chi, b\lambda) \ll \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi b\lambda(x-y)} \leq \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{(\ln x)}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H<\gamma \leq T} x^\beta.$$

### 3.2.3. Преобразование $w_2(b\lambda, \chi)$

Представляя множество $D_2$ в виде

$$D_2 = \left\{ \rho : \ -2\pi b\lambda x - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -2\pi b\lambda(x-y) + \frac{x}{y} \right\} =$$

$$= \left\{ \rho : \ T_1 - 2\pi b\lambda y - \frac{2x}{y} \leq -\gamma \leq T_1 \right\}, \qquad T_1 = 2\pi b\lambda x + \frac{x}{y} \leq T_0,$$

и имея в виду, что для длины множества $D_2$ при $|\lambda| \leq \dfrac{1}{q_1 \tau}$, $\tau = \dfrac{y^2}{x(\ln x)^{c_2}}$ и $c_2 \leq c_1$, выполняется неравенство

$$2\pi b\lambda y + \frac{2x}{y} \leq \frac{2\pi by}{q_1 \tau} + \frac{2x}{y} = \frac{2\pi bhx}{q_1 y} \cdot \frac{(\ln x)^{c_2}}{h} + \frac{2x}{y} \ll \frac{bxh}{q_1 y} = H,$$

и пользуясь тривиальной оценкой тригонометрического интеграла $I(\rho, b\lambda)$, то есть первой оценкой (8), получим

$$w_2(b\lambda,\chi) \leq \sum_{\rho\in D_2} |I(\rho,b\lambda)| \ll \frac{y}{x}\sum_{\rho\in D_2} x^{\beta} \leq \frac{y}{x}\max_{|T|\leq T_0}\sum_{T-H\leq -\gamma\leq T} x^{\beta} \ll \frac{y}{x}\max_{|T|\leq T_0}\sum_{T-H\leq \gamma\leq T} x^{\beta}.$$

### 3.3. Сведение оценки $W(b\alpha; x, y)$ к минимизации $A_1$ и $A_2$

Подставляя полученные оценки для $w_1(b\lambda,\chi)$, $w_2(\chi, b\lambda)$ и $w_3(\chi, b\lambda)$ в (10), а потом в (9), а затем воспользовавшись соотношением

$$\frac{\ln\ln x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\ln x}{H}+\frac{y}{x}\right) = \frac{\ln\ln x}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{q_1\ln x}{bh}+1\right)\frac{y}{x} \ll \frac{y(\ln x)^2}{x},$$

находим

$$|W(b\alpha;x,y)| \ll \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{q_1}}\left(\frac{\ln x}{H}+\frac{y}{x}\right) w(b\lambda,\chi) \ll \frac{y(\ln x)^2}{x}\max_{|T|\leq T_0} v_{q_1}(T,H)\,, \tag{11}$$

$$v_{q_1}(T,U) = \sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-U<\gamma\leq T} x^{\beta}, \qquad U\leq T.$$

Сумму $v_{q_1} = v_{q_1}(T,U)$ оценим, воспользовавшись теоремой о плотности нулей нулей $L$-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$v_{q_1} = \sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-U<\gamma\leq T}\left(\ln x\int_0^{\beta} x^u du + 1\right) = \ln x\int_0^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{\substack{T-U<\gamma\leq T\\ \beta\geq u}} du + \sum_{\chi \bmod q_1}\sum_{T-U<\gamma\leq T} 1 =$$

$$= \ln x\int_0^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du + \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right).$$

Нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma = 0.5$. Воспользовавшись этим свойством нулей, правую часть последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned} v_{q_1}(T,U) &\leq \ln x\int_{0,5}^1 x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right) \leq \\ &\leq \ln x\max_{u\geq 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right) + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{2}+1\right)\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(T,\chi)-N(T-U,\chi)\right) \leq \\ &\leq 2\ln x\max_{u\geq 0,5} x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 2.5 функция $L(u+it,\chi)$ не имеет нулей в области

$$u \geq 1-\delta(q_1,t), \qquad \delta(q_1,t) = \frac{c_3}{\max\left(\ln q_1,\ (\ln(t+3)\ln\ln(t+3))^{\frac{3}{4}}\right)},$$

для всех характеров $\chi \mod q_1$, за исключением, быть может простого действительного нуля $\beta_1$ у $L$-функции, определенной исключительным характером $\chi_1$. Поэтому имея в виду, что $\delta(q_1,T) \geq \delta(q_1,T_0)$, найдём

$$v_{q_1}(T,U) \leq 2\ln x\max_{0,5\leq u\leq 1-\delta} x^u \sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right). \tag{12}$$

Подставляя правую часть этого неравенства при $U=H$ в (11), имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y(\ln x)^3}{x}\max_{|T|\le T_0}\max_{0,5\le u\le 1-\delta}x^u\sum_{\chi \bmod q_1}\left(N(u,T,\chi)-N\left(u,T-H,\chi\right)\right).$$

Из определения параметра $T_0$, условия $|\lambda|\le\frac{1}{q_1\tau}$, $\tau=\frac{y^2}{x(\ln x)^{c_2}}$ и (3), находим

$$\frac{T}{H^3}\le\frac{T_0(q_1y)^3}{(bxh)^3}=\frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12}+bq_1^{\frac12}|\lambda|x\right)(\ln x)^{A+3}\le\frac{(q_1y)^3}{(bxh)^3}\left(\frac{x}{y}q_1^{\frac12}+\frac{bx}{q_1^{\frac12}\tau}\right)(\ln x)^{A+3}=$$

$$=\left(\frac{q_1^{3,5}y^2}{b^3x^2h^3}+\frac{q_1^{2,5}y(\ln x)^{c_2}}{b^2xh^3}\right)(\ln x)^{A+3}\le\left(\frac{h^{0,5}y^2}{b^3x^2}+\frac{y(\ln x)^{c_2}}{b^2xh^{0,5}}\right)(\ln x)^{A+3}\le 1.$$

Таким образом, в последней сумме по $\chi \bmod q_1$ выполняется условие $\frac{x}{y}\ge T^{\frac13}$, и к этой сумме можно применить теорему о плотности нулей в узких прямоугольных критической полосы (лемму 2.6). Согласно этой леммы, имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y(\ln x)^3}{x}\max_{0,5\le u\le 1-\delta}x^u(q_1H)^{c(1-u)}(\ln qH)^{33}\ll\frac{y(\ln x)^{36}}{x}\max_{0,5\le u\le 1-\delta}x^u\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c(1-u)}=$$

$$=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{c-1}\max_{0,5\le u\le 1-\delta}x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{cu}\ll A_1+A_2+A_3, \tag{13}$$

$$A_1=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4}\max_{0,5\le u\le \frac23}f_1(u),\qquad f_1(u)=x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{2,4u}>0,$$

$$A_2=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac53}\max_{\frac23\le u\le \frac56}f_2(u),\qquad f_2(u)=x^u\left(\frac{y}{bhx}\right)^{\frac83u}>0,$$

$$A_3=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4}\max_{\frac56\le u\le 1-\delta}f_1(u).$$

### 3.4. Оценка $A_1$

Воспользовавшись условиями $q_1\le h$, $h=(\ln c)^{c_2}$, $1\le b\le(\ln x)^B$ и (3), имеем

$$f_1'(u)=f_1(u)\left(\ln x+2,4\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right)=2,4f_1(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac{7}{12}}}\right)>0,$$

то есть $f_1(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь опять условием (3), имеем

$$A_1=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4}f_1\left(\frac23\right)=y\left(\frac{x^{\frac58}bh(\ln x)^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac45}x^{-\frac{1}{30}}(\ln x)^{-1,8A-28,8}\ll y(\ln x)^{-A}.$$

### 3.5. Оценка $A_3$

Пользуясь как в случае оценки $A_1$, монотонностью функции $f_1(u)$, а затем условиями $b\le(\ln x)^B$, $h=(\ln x)^{c_2}$ и (3), находим

$$A_3=bh(\ln x)^{36}\left(\frac{bhx}{y}\right)^{1,4}f_1(1-\delta)=y\left(\frac{x^{\frac58}bh(\ln x)^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac{12}{5}\delta}x^{-0,1\delta}(\ln x)^{36-54A\delta-194,4\delta}\ll$$

$$\ll yx^{-0,1\delta}(\ln x)^{36}.$$

Воспользовавшись условиями $|\lambda|\le\frac{1}{q_1\tau}$, $\tau=\frac{y^2}{xh}$, $b\le(\ln x)^B$, $h=(\ln x)^{c_1}$ и (3), имеем

$$T_0=\left(\frac{x}{y}+b\lambda x\right)q^{\frac12}(\ln x)^{A+3}\le\left(\frac{q^{\frac12}x}{y}+\frac{hx^2}{q^{\frac12}y^2}\right)(\ln x)^{A+3}\le\left(\frac{x(\ln x)^{c_1}}{y}+\frac{hx^2}{y^2}\right)(\ln x)^{A+3}\le x,$$

Пользуясь этим неравенством оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$. Имеем

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_3}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq \frac{c_3}{\max\left(b\ln(\ln x),\ \left((\ln x)\ln(\ln x)\right)^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_4(\ln x)^{-0,76}.$$

Поэтому

$$A_3 \ll y\exp(-0,1\delta(\ln x))\cdot(\ln x)^{36} \ll y\exp(-0,1c_4(\ln x)^{0,24})\cdot(\ln x)^{36} \ll y(\ln x)^{-A}.$$

### 3.6. Оценка $A_2$

Воспользовавшись условиями $q_1 \leq h$, $h = (\ln c)^{c_1}$, $1 \leq b \leq (\ln x)^B$ и (3), имеем

$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac{8}{3}\ln\left(\frac{y}{bhx}\right)\right) = \frac{8}{3}f_2(u)\ln\left(\frac{y}{bhx^{\frac{5}{8}}}\right) \geq \frac{8}{3}f_2(u)\ln\left(\frac{y}{x^{\frac{5}{8}}(\ln x)^{B+c_1}}\right) > 0,$$

то есть $f_1(u)$ монотонно возрастающая функция, поэтому пользуясь условием (3), имеем

$$A_2 = bh\left(\frac{bhx}{y}\right)^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{36}f_1\left(\frac{5}{6}\right)y\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}bh(\ln x)^{2,25A+81}}{y}\right)^{\frac{4}{9}}(\ln x)^{-A} \leq y(\ln x)^{-A}.$$

Подставляя найденных оценок для сумм $A_1$, $A_2$ и $A_3$ в (13), находим

$$|W(b\alpha;x,y)| \ll y(\ln x)^{-A}.$$

Из полученной оценки и оценки(6) имея в виду (5) получим утверждение теоремы. □

## 4.Оценка специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых дугах

Оценим сначала специальных коротких линейных двойных тригонометрических сумм с "близкими" по порядку суммами, которые возникают при оценке специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах .

### 4.1. Оценка специальных коротких линейных двойных тригонометрических сумм с "близкими" по порядку суммами

**Лемма 4.1.** *Пусть $f(m)$ и $g(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, $b$ — натуральное число, $c$ — абсолютная постоянная, $|f(m)| \leq \tau_r(m)$, $|g(n)| \leq \tau_k(n)$, $y < x(\ln x)^{-1}$,*

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \qquad |\theta| \leq 1.$$

*Тогда при*

$$\begin{aligned} &b(\ln x)^{4c+2r^2+2k^2+4k-2} \leq q \leq \frac{y^2}{x}(\ln x)^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \\ &\frac{bx}{y}(\ln x)^{2c+r^2+k^2+2k-1} \leq N \leq \frac{y}{b}(\ln x)^{-4c-2r^2-2k^2-4k+2}, \end{aligned} \tag{14}$$

*справедлива оценка*

$$|W| \ll y(\ln x)^{-c}.$$

Доказательство. Далее для удобства не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$. Возводя сумму $W$ в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 2.7 , получим

$$|W|^2 \ll \sum_{M<m\leq 2M}|f(m)|^2 \sum_{M<m\leq 2M}\left|\sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn)\right|^2 \ll$$

$$\ll \sum_{M<m\leq 2M}\tau_r^2(m)\sum_{M<m\leq 2M}\sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ x-y<mn_1,mn_2\leq x}}\overline{g(n_1)}g(n_2)e(b\alpha m(n_2-n_1)) \ll$$

$$\ll M(lnx)^{r^2-1}\sum_{N<n_1,n_2\le 2N}\overline{g(n_1)}g(n_2)\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ x-y<mn_1,mn_2\le x}}(b\alpha m(n_2-n_1)).$$

Разбивая двойную сумму по $n_1$ и $n_2$ на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1<n_2$,$n_1=n_2$, $n_1>n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\le 2M}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}|g(n)|^2\ll\sum_{x-y<t\le x}\sum_{\substack{mn=t\\ M<m\le 2M\\ N<n\le 2N}}\tau_k^2(n)\le\sum_{x-y<t\le x}\tau_{k+1}^2(t)\ll y(lnx)^{k(k+2)},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1<n_2$ и $n_1>n_2$ равны, получим

$$|W|^2\ll M(lnx)^{r^2-1}\left|\sum_{N<n_1\le 2N}\overline{g(n_1)}\sum_{0<n_2-n_1\le 2N-n_1}g(n_2)\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ x-y<mn_1,mn_2\le x}}e(b\alpha m(n_2-n_1))\right|+yM(lnx)^{r^2+k^2+2k-1}.$$

Положим $t=n_2-n_1$ и $n_1=n$, тогда правая часть последнего неравенства принимает вид

$$|W|^2\ll M(\ln x)^{r^2-1}W_1+yM(\ln x)^{r^2+k^2+2k-1}\tag{15}$$

$$W_1=\sum_{N<n\le 2N}\tau_k(n)\sum_{0<t\le 2N-n}\tau_k(n+t)\left|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+t}}}e(b\alpha tm)\right|.$$

Из условия $\frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+t}$ находим

$$t\le\frac{x}{m}-n<\frac{x}{m}-\frac{x-y}{m}=\frac{y}{m}<\frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по $n$, найдем

$$W_1\ll\sum_{N<n\le 2N}\tau_k(n)\sum_{0<t\le\frac{y}{M}}\tau_k(n+t)\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right).$$

Применяя дважды неравенство Коши и лемму 2.7, найдём

$$W_1^2\ll N(\ln x)^{k^2-1}\sum_{N<n\le 2N}\left(\sum_{0<t\le\frac{y}{M}}\tau_k(n+t)\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)\right)^2\ll$$

$$\ll\frac{yN}{M}(\ln x)^{2k^2-2}\sum_{N<n\le 2N}\sum_{0<t\le\frac{y}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)^2\ll$$

$$\ll\frac{y^2N}{M}(\ln x)^{2k^2-2}\sum_{0<t\le\frac{y}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha bt\|}\right)\ll\frac{y^2N}{M}(\ln x)^{2k^2-2}\sum_{0<t\le\frac{by}{M}}\min\left(\frac{y}{N},\frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

### 4.1.1. Оценка $W_1^2$ при $\dfrac{by}{M}>0.5q$

Разбивая интервал изменения $t$ на $\ll\dfrac{by}{qM}$ интервалов вида $g\le h\le g+q'$, $q'<q$, применяя утверждение а) леммы 8, найдем

$$W_1^2\ll\frac{y^2N}{M}(\ln x)^{2k^2-2}\cdot\frac{by}{qM}\left(\frac{y}{N}+q\ln q\right)\ll\left(\frac{by^4}{qM^2}+\frac{by^3N}{M^2}\right)(\ln x)^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (15) и воспользовавшись соотношением $MN\asymp x$, а также неравенством $4k^2-24k+69>2k^2+2k$, а затем условиями (14), получим

$$|W|^4\ll M^2(\ln x)^{2r^2-2}W_1^2+y^2M^2(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$

$$\ll M^2(\ln x)^{2r^2-2}\left(\frac{by^4}{qM^2}+\frac{by^3N}{M^2}\right)(\ln x)^{2k^2-1}+y^2M^2(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$
$$\ll \left(\frac{by^4}{q}+by^3N\right)(\ln x)^{2r^2+2k^2-3}+\frac{y^2x^2}{N^2}M(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{b}{q}+\frac{bN}{y}+\frac{x^2}{y^2N^2}\right)(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll y^4(\ln x)^{-4c}.$$

### 4.1.2. Оценка $W_1^2$ при $\dfrac{by}{M}\leq 0.5q$

Применяя утверждение б) лемма 2.8, найдем

$$W_1^2\ll\frac{y^2N}{M}(\ln x)^{2k^2-2}\cdot q\ln q\ll\frac{y^2Nq}{M}(\ln x)^{2k^2-1}.$$

Подставляя эту оценку в (15) и воспользовавшись соотношением $MN\asymp x$, а затем условиями (14), получим

$$|W|^4\ll M^2(\ln x)^{2r^2-2}W_1^2+y^2M^2(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$
$$\ll M^2(\ln x)^{2r^2-2}\cdot\frac{y^2Nq}{M}(\ln x)^{2k^2-1}+y^2M^2(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$
$$\ll y^2xq(\ln x)^{2r^2+2k^2-3}+\frac{y^2x^2}{N^2}(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll$$
$$\ll y^4\left(\frac{xq}{y^2}+\frac{x^2}{y^2N^2}\right)(\ln x)^{2r^2+2k^2+4k-2}\ll y^4(\ln x)^{-4c}.$$

Лемма доказана. □

Теперь пользуясь этой леммой, найдем нетривиальную оценку тригонометрической суммы

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(b\alpha n),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}\left(b(\ln x)^{4A+82}\right)$, $\tau=y^2x^{-1}(\ln x)^{-4A-82}$, где $A$ — произвольное фиксированное положительное число.

### 4.2. Доказательство теоремы 1.3

Отметим, что оценки суммы вида $S_1$ в общем случае имеются в работе И.Аллакова [18], здесь рассматривая короткие интервалы получаем более точные оценки чем в [18].

Имеем

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(b\alpha n),\qquad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\qquad (a,q)=1,\qquad |\theta|\leq 1.$$

В лемме 9 возьмём $r=3$, $u_1=x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n)=e(b\alpha n)$. Имеем

$$S_1(b\alpha;x,y)=\sum_{k=1}^{3}(-1)^kC_3^kS_1(b\alpha;x,y,k),$$
$$S_1(b\alpha;x,y,k)=\sum_{m_1\leq u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\leq u_1\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leq x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k)\tag{16}$$

Разобьём в $S_1(b\alpha;x,y,k)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $(\ln x)$ интервалов вида $M_j<m_j\leq 2M_j$, $N_j<n_j\leq 2N_j$, $j=1,\cdots,k$. Получим

$$S_1(b\alpha;x,y,k)=\sum^{(\ln x)^{2k}}\mathcal{S}_k(M,N),\tag{17}$$
$$\mathcal{S}_k(M,N)=\sum_{M_1<m_1\leq 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leq 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\leq x}}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\ln n_1\,e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k)=$$

$$= \int_1^{2N_1} \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\le 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\le x}} \mu(m_k) \sum_{\max(u,N_1)<n_1\le 2N_1} \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k)d\ln u.$$

Через $U_1 = \max(u, N_1)$ обозначим такое число $u$, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\mathcal{S}_k(M,N)| \ll (\ln x)|\mathcal{S}_k(M,N)|, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{S}_k(M,N) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1)\cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\le 2M_k\\ x-y<m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\le x}} \mu(m_k) \sum_{U_1<n_1\le 2N_1} \cdots \sum_{U_k<n_k\le 2N_k} e(b\alpha m_1n_1\cdots m_kn_k), \qquad N_j \le U_j < 2N_j.$$

Подставляя (18) в (17), а затем и (16), получим

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll (\ln x)^7 \sum_{k=1}^{3} \max |\mathcal{S}_k(M,N)|, \tag{19}$$

Суммы $\mathcal{S}_k(M,N)$, $k = 1,2,3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $\mathcal{S}_3(M,N)$ и, не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$x^{\frac{1}{3}} > M_1 \ge M_2 \ge M_3, \qquad N_1 \ge N_2 \ge N_3, \qquad M_1M_2M_3N_1N_2N_3 \asymp x. \tag{20}$$

**Оценка** $\mathcal{S}_1(M,N)$. Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра $N_1$:

1. $N_1 > 4bxq^{-1}$;
2. $bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39} < N_1 \le 4bxq^{-1}$;
3. $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2B+37}$, $M_1M_2 \le yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$;
4. $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$;
5. $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37} < N_1N_2N_3 \le yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$;
6. $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$.

Для рассмотрения случаев 1 и 2 сумму $\mathcal{S}_3(M,N)$ несколько преобразуем. Для этого, вводя обозначения

$$f(m) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2<m_2\le 2M_2} \mu(m_2) \sum_{\substack{M_3<m_3\le 2M_3\\ m_1m_2m_3n_2n_3=m}} \mu(m_3) \sum_{U_2<n_2\le 2N_2} \sum_{U_3<n_3\le 2N_3} 1, \quad |f(m)| \le \tau_5(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1M_2M_3U_2U_3 < m \le 2^5M_1M_2M_3N_2N_3$ на интервалы вида $M < m \le 2M$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ x-y<mn\le x}} e(\alpha mn),$$

и представим эти суммы в виде

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(b\alpha mn),$$

$$x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{m}, U_1\right) \le \frac{y}{m}. \tag{21}$$

Из условия $MN_1 < x$ и $4MN_1 < x - y$ следует, что

$$\frac{x}{5N_1} < \frac{x-y}{4N_1} \le M \le \frac{x}{N_1} \tag{22}$$

В $W$ суммируя внутреннюю сумму по $n$, воспользовавшись условиями (21) и (22), найдем

$$W \ll \sum_{M<m\le 2M} \tau_5(m)\min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\le \frac{2x}{N_1}} \tau_5(m)\min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 2.7, найдём

$$|W|^2 \ll \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leq\frac{2x}{N_1}} \tau_5^2(n) \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leq\frac{2x}{N_1}} \min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right)^2 \ll$$

$$\ll y(\ln x)^{24} \sum_{\frac{x}{N_1}<m\leq\frac{2x}{N_1}} \min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha bm\|}\right) \ll y(\ln x)^{24} \sum_{\frac{bx}{N_1}<m\leq\frac{2bx}{N_1}} \min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha m\|}\right).$$

**Случай 1.** $N_1 > 4bxq^{-1}$**.**

Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} < 0,5q.$$

Применим утверждение б) леммы 2.8, затем воспользовавшись условием $q \leq y^2x^{-1}(\ln x)^{-4A-82}$, найдем

$$|W|^2 \ll y(\ln x)^{24} \sum_{m\leq 0,5q} \frac{1}{\|\alpha m\|} \ll y(\ln x)^{24}q\ln q \ll yq(\ln x)^{25} \ll y(\ln x)^{25} \cdot \frac{y^2}{x(\ln x)^{4A+82}} =$$

$$= \frac{y^2}{(\ln x)^{2A+14}} \cdot \frac{y}{x(\ln x)^{2A+43}} \ll \frac{y^2}{(\ln x)^{2A+14}}.$$

**Случай 2.** $bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39} < N_1 \leq 4bxq^{-1}$**.**

Из условия рассматриваемого случая, имеем

$$\frac{2bx}{N_1} \geq 0,5q.$$

Разбивая интервал изменения $m$ на $\ll bx(qN_1)^{-1}$ интервалов вида $g \leq h \leq g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2.8 , воспользовавшись условиями рассматриваемого случая, а именно условием

$$N_1 \geq bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}, \qquad q \geq b(\ln x)^{4A+82},$$

найдем

$$|W|^2 \ll y(\ln x)^{24} \cdot \frac{bx}{qN_1} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{yN_1}{x}, \frac{1}{\|\alpha m\|}\right) \ll \frac{bxy(\ln x)^{24}}{qN_1}\left(\frac{yN_1}{x} + q\ln q\right) \ll$$

$$\ll y^2\left(\frac{b}{q} + \frac{bxy^{-1}}{N_1}\right)(\ln x)^{25} \ll \frac{y^2}{(\ln x)^{2A+14}}.$$

**Случай 3.** $N_1 \leq bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$**,** $N_1N_2N_3 \leq bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37}$**,** $M_1M_2 \leq yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$**.**

Из (20) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1M_2 \geq (M_1M_2M_3)^{\frac{2}{3}} \gg \left(\frac{x}{N_1N_2N_3}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \left(\frac{y}{b(\ln x)^{2A+37}}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+37} \cdot \left(\frac{y}{bx^{\frac{3}{5}}(\ln x)^{2A+37}}\right)^{\frac{5}{3}} \geq \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+37}.$$

В сумме $\mathcal{S}_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1m_2 = n$ и $m_3n_1n_2n_3 = m$, а затем разбивая интервал суммирования по $m$ и $n$ соответственно на интервалы вида $M < m \leq 2M$ и $N < n \leq 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ x-y<mn\leq x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)| \leq \tau_4(m), \qquad |g(n)| \leq \tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняется неравенства

$$bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37} < N \leq yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}, \qquad b(\ln x)^{4B+74} < q \leq \frac{y^2}{x}(\ln x)^{-4A-74}, \tag{23}$$

являющиеся условиями (14) леммы 4.1 при $r=4$, $k=2$, $c=A+7$, и согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{(\ln x)^{B+7}}.$$

**Случай 4.** $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37}$, $M_1M_2 > yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$.

Из (20) и условия рассматриваемого случая, находим

$$M_1 \ge \sqrt{M_1M_2} \ge y^{\frac12}b^{-\frac12}(\ln x)^{-2A-37} = \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+41}\cdot\left(\frac{y}{bx^{\frac23}(\ln x)^{\frac83 A+52}}\right)^{\frac32} \ge \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+41},$$

$$M_1 \le x^{\frac13} = \frac{y}{b(\ln x)^{4A+82}}\cdot\frac{x^{\frac13}b(\ln x)^{4A+82}}{y} \le \frac{y}{b(\ln x)^{4A+82}}.$$

В сумме $\mathcal{S}_3(M,N)$ вводя обозначения $m_1=n$ и $m_2m_3n_1n_2n_3=m$, а затем разбивая интервал суммирования по $m$ и $n$ соответственно на интервалы вида $M<m\le 2M$ и $N<n\le 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}} \mu(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)|\le \tau_5(m).$$

Для этой суммы выполняется следующие два неравенства

$$bxy^{-1}(\ln x)^{2A+41} < N \le yb^{-1}(\ln x)^{-4A-82}, \qquad b(\ln x)^{4A+82} < q \le \frac{y^2}{x}(\ln x)^{-4A-82},$$

которые являются условиями (14) леммы 4.1 при $r=5$, $k=1$, $c=A+7$. Согласно этой лемме имеем

$$W \ll \frac{y}{(\ln x)^{A+7}}.$$

**Случай 5.** $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $bxy^{-1}(\ln x)^{2A+37} < N_1N_2N_3 \le yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$.

Сумму $\mathcal{S}_3(M,N)$ преобразуем. Для этого, вводя обозначения $m_1m_2m_3=m$ и $n_1n_2n_3=n$, а затем разбивая интервал суммирования по $m$ и $n$ соответственно на интервалы вида $M<m\le 2M$ и $N<n\le 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)|\le\tau_3(m), \qquad |g(n)|\le\tau_3(m).$$

Для этой суммы выполняется соотношения (23) являющиеся при $r=3$, $k=3$, $c=A+7$ условиями (14) леммы 4.1, согласно которой получим

$$W \ll \frac{y}{(\ln x)^{A+7}}.$$

**Случай 6.** $N_1 \le bxy^{-1}(\ln x)^{2A+39}$, $N_1N_2N_3 > yb^{-1}(\ln x)^{-4A-74}$.

Из (20) и условия рассматриваемого случая, находим

$$N_1N_2 \ge (N_1N_2N_3)^{\frac23} \ge \left(\frac{y}{b(\ln x)^{4A+74}}\right)^{\frac23} = \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+37}\left(\frac{y}{bx^{\frac35}(\ln x)^{2,8A+51,8}}\right)^{\frac53} \ge \frac{bx}{y}(\ln x)^{2A+37},$$

$$N_1N_2 \le N_1^2 \le b^2x^2y^{-2}(\ln x)^{4A+78} = \frac{y}{b(\ln x)^{4A+74}}\left(\frac{bx^{\frac23}(\ln x)^{\frac{8A+152}{3}}}{y}\right)^3 \le \frac{y}{b(\ln x)^{4A+74}}.$$

Сумму $\mathcal{S}_3(M,N)$ преобразуем, для этого вводя обозначения $n_1n_2=n$ и $m_2m_2m_3n_3=m$, и разбивая интервалы суммирования по $m$ и $n$ соответственно на интервалы вида $M<m\le 2M$ и $N<n\le 2N$, получим конечное число сумм вида

$$W = \sum_{M<m\le 2M} f(m) \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}} g(n)e(b\alpha mn), \qquad |f(m)|\le\tau_4(m), \qquad |g(n)|\le\tau_2(m).$$

Для этой суммы выполняется соотношения (23) являющиеся при $r = 4$, $k = 2$, $c = A + 7$ условиями (14) леммы 4.1, согласно которой имеем

$$W \ll \frac{y}{(\ln x)^{A+7}}.$$

Отсюда и из всех оценок, полученных в предыдущих случаях найдем

$$|\mathcal{S}_3(M,N)| \ll y(\ln x)^{-A-7}.$$

Из полученных оценок $\mathcal{S}_k(M,N)$, $k = 1,2,3$, ввиду неравенства (19), получим утверждение теоремы 1.3.

□

## 5. Асимптотическая формула в обобщение тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми

Докажем сначала две вспомогательные леммы, которыми воспользуемся при доказательстве теоремы 1.1.

**Лемма 5.1.** *Пусть $b$ — натуральное число, $N$ — достаточно большое натуральное число,*

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \sum_{\left|bp_1 - \frac{N}{3}\right| \le H} e(b\alpha p), \qquad S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(b\alpha n).$$

*Тогда при $\sqrt{bN}\left(\ln \frac{N}{3b}\right)^2 \le H \le N^{1-\frac{1}{30}}$, имеет место соотношение*

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln \frac{N}{3b}} S_1\left(b\alpha; \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}, \frac{2H}{b}\right) + O\left(\frac{H^2}{bN \ln \frac{N}{3b}}\right).$$

Доказательство. Отрезок суммирования $\left|bp - \frac{N}{3}\right| \le H$ в сумме $\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H)$ заменим на интервал вида $x - y < p \le x$. Имеем

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \sum_{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \le \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}} e(b\alpha p) + O(1).$$

Логарифмируя неравенство $\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \le \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}$, и воспользовавшись формулой

$$\ln\left(\frac{N}{3b} \pm \frac{H}{b}\right) = \ln \frac{N}{3b} + \ln\left(1 \pm \frac{3H}{N}\right) = \ln \frac{N}{3b} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

получим, что при $\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p \le \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}$, выполняется соотношение

$$\ln p = \ln \frac{N}{3b} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

Пользуясь формулой сумму $\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H)$ выражаем через сумму вида $S_1(b\alpha; x, y)$. Имеем

$$\mathcal{S}_1(b\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln \frac{N}{3b}} S_1\left(b\alpha; \frac{N}{3b} + \frac{H}{b}, \frac{2H}{b}\right) - \sum_{\substack{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p^k \le \frac{N}{3b} + \frac{H}{b} \\ k \ge 2}} \frac{\ln p}{\ln \frac{N}{3b}} e(b\alpha p^k) + O\left(\frac{H^2}{bN \ln \frac{N}{3b}}\right).$$

Обозначая последнюю сумму через $R_1$ и оценивая тривиально числом слагаемых, и воспользовавшись формулой

$$(1 \pm u)^\mu = 1 \pm \mu u + O(u^2), \qquad |u| < 0,5,$$

имеем

$$R_1 \ll \sum_{\substack{\frac{N}{3b} - \frac{H}{b} < p^k \le \frac{N}{3b} + \frac{H}{b} \\ k \ge 2}} 1 \ll \ln \frac{N}{3b}\left(\left(\frac{N}{3b} + \frac{H}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{N}{3b} - \frac{H}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right) \ll \frac{H}{\sqrt{bN}} \ln \frac{N}{3b} \ll \frac{H^2}{bN \ln \frac{N}{3b}}.$$

□

**Лемма 5.2.** *Пусть $p$ — нечетное простое число, $p^{ord_p(N)} \| N$, тогда для суммы Рамануджана*

$$c_{p^k}(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^k} e\left(\frac{Na}{p^k}\right),$$

*справедлива формула*

$$c_{p^k}(N)=\begin{cases}\varphi(p^k), & \text{если } k\le ord_p(N);\\ p^{ord_p(N)}\mu(p^{k-ord_p(N)}), & \text{если } k\ge ord_p(N)+1.\end{cases}$$

Доказательство. При $k\le ord_p(N)$ утверждение леммы тривиально и следует из определения суммы Рамануджана

$$c_{p^k}(N)=\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^k}1=\varphi(p^k).$$

При $k\ge ord_p(N)+1$ пользуясь представлением $N_1=Np^{-ord_p(N)}$, а затем подстановкой

$$a=a_1+a_2p^{k-ord_p(N)},$$

где $a_1$ и $a_2$ независимо пробегают значения $a_1=1,2,\ldots,p^{k-ord_p(N)}$, $a_2=0,1,\ldots,p^{ord_p(N)}-1$, получим

$$c_{p^k}(N)=\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^k}e\left(\frac{N_1a}{p^{k-ord_p(N)}}\right)=\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^{k-ord_p(N)}}\sum_{a_2=0}^{p^{ord_p(N)}-1}e\left(\frac{N_1(a_1+a_2p^{k-ord_p(N)})}{p^{k-ord_p(N)}}\right)=$$

$$=p^{ord_p(N)}\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p^{k-ord_p(N)}}e\left(\frac{N_1a_1}{p^{k-ord_p(N)}}\right)=p^{ord_p(N)}\mu(p^{k-ord_p(N)}).$$

□

## Доказательство теоремы 1.1

Для удобства введём следующие обозначения:

$$\mathcal{L}=\ln\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right),\qquad \mathcal{L}_i=\ln\frac{N}{3b_i}\qquad \mathcal{L}\ll\mathcal{L}_i\ll\mathcal{L}. \tag{24}$$

Не ограничивая общности будем считать, что выполняются следующие условия

$$H=(b_1b_2b_3)^{\frac43}N^{\frac23}\mathcal{L}^{60},\qquad b_1<b_2<b_3, \tag{25}$$

а также пусть $\iota=\tau^{-1}$, где

$$\tau=\frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathcal{L}^{c_2}},\qquad \mathcal{L}^{c_2}=b_1^2b_2^2\mathcal{L}^{94},\qquad c_2=94+\frac{2\ln b_1+2\ln b_2}{\ln\mathcal{L}}. \tag{26}$$

Имеем

$$I(N,H)=\int_{-\iota}^{1-\iota}\mathbb{F}(\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha,$$

где

$$\mathbb{F}(\alpha)=\mathbb{F}(\alpha;N,H)=\prod_{i=1}^{3}\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H),\qquad \mathcal{S}_1(b_k\alpha;N,H)=\sum_{\left|b_ip-\frac{N}{3}\right|\le H}e(b_i\alpha p).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое $\alpha$ из промежутка $[-\iota,1-\iota]$ представим в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\qquad (a,q)=1,\qquad 1\le q\le\tau,\qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau}. \tag{27}$$

В этом представлении $0\le a\le q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те $\alpha$, для которых

$$q\le h,\qquad h=\mathcal{L}^{c_1}=b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94},\qquad c_1=94+\frac{2\ln b_1+2\ln b_2+\ln b_3}{\ln\mathcal{L}}, \tag{28}$$

в представлении (27), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся $\alpha$. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha: \quad \alpha\in\mathfrak{M}, \qquad \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \le \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3}{Hb_3^{-1}}\right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha: \quad \alpha\in\mathfrak{M}, \qquad \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3}{Hb_3^{-1}} < \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}). \tag{29}$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

## 5.1.Преобразование интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int\limits_{\mathfrak{M}_1} \mathbb{F}(\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha = \sum_{q\le h}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} I(a,q), \tag{30}$$

$$I(a,q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3H^{-1}} \mathbb{F}\left(\frac{a}{q}+\lambda;N,H\right)e(-\lambda N)d\lambda. \tag{31}$$

К суммам $\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H)$, $i=1;2;3$ применяя лемму 5.1, и пользуясь формулой (24), получим

$$\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H) = \frac{1}{\mathcal{L}_i}S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)+O\left(\frac{H^2}{b_iN\mathcal{L}}\right). \tag{32}$$

А теперь к суммам $S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right)$, $i=1,2,3$ в применим теорему 1.3, полагая,

$$x=\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i}, \qquad y=\frac{2H}{b_i}, \qquad \mathcal{L}^A = b_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3\mathcal{L}^{192}. \tag{33}$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров $h$ и $A$, затем соотношением $H\ge(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}$, имеем

$$\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8}} b_3h\mathcal{L}^{2,25A+81} = \frac{1}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_3^{\frac{3}{8}}\cdot b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94}\cdot\left(b_1^{\frac{9}{2}}b_2^{\frac{9}{2}}b_3^3\mathcal{L}^{192}\right)^{\frac{9}{4}}N^{\frac{5}{8}} =$$

$$= \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_1^{\frac{259}{24}}b_2^{\frac{259}{24}}b_3^{\frac{163}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathcal{L}^{466} \le \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}}{2b_3} = \frac{H}{2b_3}.$$

Таким образом условие теоремы 1.3 выполняется, следовательно согласно этой теореме, и формуле (24), находим

$$S_1\left(b_i\alpha;\frac{N}{3b_i}+\frac{H}{b_i},\frac{2H}{b_i}\right) = \mathfrak{B}_i(q)\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H\mathcal{L}^{-192}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}\right), \quad \mathfrak{B}_i(q) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_i,q)}\right)}.$$

Из этой формулы и (32) и имея в виду, что $H\le Nb_1^{-4,5}b_2^{-4,5}b_3^{-3}\mathcal{L}^{-192}$, найдём

$$\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H) = \frac{\mathfrak{B}_i(q)}{b_i\mathcal{L}_i}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{1i}, \qquad \mathbb{R}_{1i} \ll \frac{H\mathcal{L}^{-193}}{b_ib_1^{4,5}b_2^{4,5}b_3^3}. \tag{34}$$

Воспользовавшись формулой (34), а также соотношением (24), и имея виду, что

$$\left|\mathfrak{B}_i(q)\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi b_i\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right| \le \frac{H}{b_i}, \qquad |\mathfrak{S}_1(\alpha;\mu_iN,H)| \ll \frac{H}{b_i\mathcal{L}}, \tag{35}$$

найдём

$$\mathcal{S}_1(b_1\alpha;N,H)\mathcal{S}_1(b_2\alpha;N,H)=\left(\frac{\mathfrak{B}_1(q)}{b_1\pounds_1}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{11}\right)\mathcal{S}_1(b_2\alpha;N,H)=$$

$$=\frac{\mathfrak{B}_1(q)}{b_1\pounds_1}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\left(\frac{\mathfrak{B}_2(q)}{b_2\pounds_1}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+\mathbb{R}_{12}\right)+O\left(\frac{H^2\pounds^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right)=$$

$$=\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)}{b_1b_2\pounds_1\pounds_1}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{H^2\pounds^{-194}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^3}\right).$$

Умножая полученное неравенство на $\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)$, и имея в виду, что $\mathbb{F}(\alpha)=\prod\limits_{i=1}^{3}\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H)$, а затем воспользовавшись формулами (34) и (35), находим

$$\mathbb{F}(\alpha)=\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)}{b_1b_2\pounds_1\pounds_1}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2\lambda^2}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\cdot\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)+\mathbb{R}_2=$$

$$=\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}\cdot\frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2,\qquad \mathbb{R}_2\ll\frac{H^3\pounds^{-195}}{b_1^{5,5}b_2^{5,5}b_3^4}.$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (31), найдём

$$I(a,q)=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int\limits_{|\lambda|\le\sqrt{b_1b_2}b_3\pounds^3H^{-1}}\left(\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}\cdot\frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}e(\lambda N)+\mathbb{R}_2\right)e(-\lambda N)d\lambda=$$

$$=e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3,$$

$$J(H)=\int\limits_{|\lambda|\le\sqrt{b_1b_2}b_3\pounds^3H^{-1}}\frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3}d\lambda,\qquad \mathbb{R}_3\ll\mathbb{R}_2\cdot\frac{\sqrt{b_1b_2}\pounds^3}{Hb_3^{-1}}\ll\frac{H^2\pounds^{-192}}{b_1^5b_2^5b_3^3}.$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a,q)$ в (30), а затем воспользовавшись явным значением параметров $h$ и $A$ соответственно из формул (28) и (33), получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\sum_{q\le h}\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\left(e\left(-\frac{aN}{q}\right)\frac{\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}\cdot J(H)+\mathbb{R}_3\right)=$$

$$=\frac{J(H)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}\cdot\sum_{q\le h}\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)+\mathbb{R}_4,\tag{36}$$

$$\mathbb{R}_4\ll h^2\mathbb{R}_3\ll b_1^4b_2^4b_3^2\pounds^{188}\cdot\frac{H^2}{b_1^5b_2^5b_3^3\pounds^{192}}=\frac{H^2}{b_1b_2b_3\pounds^4},$$

где $c_q(-N)$ — сумма Рамануджана. Сумму по $q$ в (36) заменяя близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от $h$, то есть

$$\sum_{q\le h}\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)=\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N),$$

$$\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q=1}^{\infty}\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N),\tag{37}$$

$$R(b_1,b_2,b_3,N)=\sum_{q>h}\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N),$$

получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\left(\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)-R(b_1,b_2,b_3,N)\right)J(H)}{b_1b_2b_3\pounds_1\pounds_1\pounds_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\pounds^4}\right).\tag{38}$$

## 5.2. Вычисление интеграла $J(H)$

Воспользовавшись четностью подинтегральной функции и сделав замену переменных найдем

$$J(H) = 2 \int\limits_0^{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3 H^{-1}} \frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3\lambda^3} d\lambda = \frac{8H^2}{\pi} \int\limits_{|u|\le 2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3} \frac{\sin^3 u}{u^3} du.$$

Заменим последний интеграл по $u$ близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathcal{L}$, и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du \ll \frac{1}{(b_1b_2)^{1,5}\, b_3^3\mathcal{L}^9},$$

получим

$$J(H) = \frac{8H^2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int\limits_{2\pi\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du\right) = \frac{8H^2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}\, b_3^3\mathcal{L}^9}\right).$$

Воспользовавшись формулой ( см. [19] стр. 174 )

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^n mu}{u^n} du = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1} - \frac{n}{1!}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} + \ldots\right].$$

при $m = 1$ и $n = 3$, найдём

$$J(H) = \frac{8H^2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{8} + O\left(\frac{H^2}{(b_1b_2)^{1,5}\, b_3^3\mathcal{L}^9}\right) = 3H^2 + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}}\right). \tag{39}$$

## 5.3. Исследование особого ряда $\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N)$

Функции $\mathfrak{B}_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, в формуле (37) являвшиеся произведениями мультипликативных функций

$$\mu\left(\frac{q}{(b_i, q)}\right), \qquad \left(\varphi\left(\frac{q}{(b_i, q)}\right)\right)^{-1},$$

сами являются мультипликативными, мультипликативной является и сумма Рамануджана $c_q(-N)$. Найдем значение этих функций при $q = p^\nu$. Согласно лемме 5.2, имеем

$$c_{p^\nu}(-N) = \begin{cases} \varphi(p^\nu), & \text{если } \nu \le ord_p(N); \\ p^{ord_p(N)}\mu(p^{\nu - ord_p(N)}), & \text{если } \nu \ge ord_p(N) + 1. \end{cases} \tag{40}$$

Отсюда в частности следует, что

$$c_{p^\nu}(-N) = 0, \qquad \text{если} \qquad \nu \ge ord_p(N) + 2. \tag{41}$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\mathfrak{B}_i(p^\nu) = \frac{\mu\left(\frac{p^\nu}{(b_i, p^\nu)}\right)}{\varphi\left(\frac{p^\nu}{(b_i, p^\nu)}\right)}, \qquad (b_i, p^\nu) = \begin{cases} p^\nu, & \text{если } \nu \le ord_p(b_i); \\ p^{ord_p(b_i)}, & \text{если } \nu \ge ord_p(b_i), \end{cases}$$

найдём точное значение функции $\mathfrak{B}_i(p^\nu)$. Имеем

$$\mathfrak{B}_i(p^\nu) = \frac{\mu(1)}{\varphi(1)} = 1, \qquad \text{если} \qquad \nu \le ord_p(b_i); \tag{42}$$

$$\mathfrak{B}_i(p^\nu) = \frac{\mu\left(p^{\nu - ord(b_i)}\right)}{\varphi\left(p^{\nu - ord(b_i)}\right)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } \nu = ord_p(b_i) + 1; \\ 0, & \text{если } \nu \ge ord_p(b_i) + 2. \end{cases} \tag{43}$$

Для вычисление значение $\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)$ при $q=p^\nu$ с помощью формул (40), (41), (42) и (43) множество $\mathcal{P}$ — множество всех простых чисел в зависимости от простых чисел являющиеся делителями числа $b_i$ $i=1,2,3$, с учётом условия

$$(b_i,b_j)=1, \qquad (b_i,N)=1, \qquad 1\le i\le j\le 3, \tag{44}$$

разобьём на взаимно непересекающихся подмножеств следующим образом

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}(b_1)\cup\mathcal{P}(b_2)\cup\mathcal{P}(b_3)\cup\mathcal{P}(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3), \tag{45}$$

где $\mathcal{P}(b_i)$ — множество простых чисел являющиеся делителями числа $b_i$, $\mathcal{P}(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3)$ — множество простых чисел не являющиеся делителями чисел $b_1$, $b_2$ и $b_3$. Из условия $(b_i,N)=1$, $1\le i\le 3$ следует, что

$$\mathcal{P}(b_i)\cap\mathcal{P}(N)=\varnothing, \tag{46}$$

здесь $\mathcal{P}(N)$ — множество простых чисел являющиеся делителями числа $N$. Такое равенство для множество $\mathcal{P}(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3)$ не выполняется, то есть оно может иметь с $\mathcal{P}(N)$ непустое пересечение.

### 5.3.1. Вычисление $\mathfrak{B}_i(p^\nu)\mathfrak{B}_j(p^\nu)\mathfrak{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p\in\mathcal{P}(b_i)$

Если $p\in\mathcal{P}(b_i)$, то из определения этого множество и из формулы (46), имеем

$$ord_p(b_i)\ge 1, \qquad ord_p(b_j)=0, \qquad ord_p(b_k)=0, \qquad ord_p(N)=0,$$

а из формул(42), (43) и (40), находим, что

$$\mathfrak{B}_i(p)=1, \qquad \mathfrak{B}_j(p^\nu)=\mathfrak{B}_k(p^\nu)=\frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_{p^\nu}(-N)=\mu(p^\nu).$$

Поэтому

$$\mathfrak{B}_i(p^\nu)\mathfrak{B}_j(p^\nu)\mathfrak{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu=1;\\ 0, & \text{если } \nu\ge 2.\end{cases} \tag{47}$$

### 5.3.2. Вычисление $\mathfrak{B}_i(p^\nu)\mathfrak{B}_j(p^\nu)\mathfrak{B}_k(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)$ при $p\in\mathcal{P}(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3)$

Если $p\in\mathcal{P}((\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3)$, то согласно определению, имеем

$$ord_p(b_1)=ord_p(b_2)=ord_p(b_3)=0,$$

а из формул(42), (43) и (40), находим, что

$$\mathfrak{B}_1(p^\nu)=\mathfrak{B}_2(p^\nu)=\mathfrak{B}_3(p^\nu)=\frac{\mu(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)}, \qquad c_p(-N)=\begin{cases}\mu(p), & \text{если } (N,p)=1;\\ \varphi(p), & \text{если } (N,p)=p.\end{cases}$$

Поэтому

$$\mathfrak{B}_1(p^\nu)\mathfrak{B}_2(p^\nu)\mathfrak{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=\begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } \nu=1 \text{ и } (N,p)=1;\\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } \nu=1 \text{ и } (N,p)=p;\\ 0, & \text{если } \nu\ge 2.\end{cases} \tag{48}$$

### 5.3.3. Точная формула для особого ряда $\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)$

Таким образом из найденных формул (47) и (48) следует, что

$$\mathfrak{B}_1(p^\nu)\mathfrak{B}_2(p^\nu)\mathfrak{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=0, \qquad \text{при} \qquad \nu\ge 2, \tag{49}$$

$$\mathfrak{B}_1(p^\nu)\mathfrak{B}_2(p^\nu)\mathfrak{B}_3(p^\nu)c_{p^\nu}(-N)=\begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)^3}, & \text{если } (b_1b_2b_3N,p)=1;\\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } (N,p)=p \text{ и } (b_1b_2b_3,p)=1,\\ & \text{или } (b_i,p)=p \text{ и } (b_jb_k,p)=1.\end{cases} \tag{50}$$

Следовательно

$$\mathfrak{S}(N,b_1,b_2,b_3)=\sum_{q=1}^{\infty}\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)=\prod_p\left(1+\mathfrak{B}_1(p)\mathfrak{B}_2(p)\mathfrak{B}_3(p)c_p(-N)\right)=$$
$$=\prod_{(p,b_1b_2b_3N)=1}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|b_1b_2b_3N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=$$
$$=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|b_1b_2b_3N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right). \tag{51}$$

## 5.4. Оценка остаточного члена $R(N)$

Из формул (37), (49) и (50) следует, что в $R(N,b_1,b_2,b_3)$ состоит из суммы слагаемых $\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)$ имеющих вид

$$\mathfrak{B}_1(q)\mathfrak{B}_2(q)\mathfrak{B}_3(q)c_q(-N)=\prod_{\substack{p|q\\(p,b_1b_2b_3N)=1}}\frac{1}{(p-1)^3}\prod_{\substack{p|q\\(p,b_1b_2b_3N)=p}}\frac{-1}{(p-1)^2},$$

причём $q$ – число свободное от квадратов, поэтому

$$R(N,b_1,b_2,b_3)=\sum_{q>h}\mu^2(q)\prod_{\substack{p|q\\(p,b_1b_2b_3N)=1}}\frac{1}{(p-1)^3}\prod_{\substack{p|q\\(p,b_1b_2b_3N)=p}}\frac{-1}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оценкам, найдем

$$R(N,b_1,b_2,b_3)\le\sum_{q>h}\mu^2(q)\prod_{p|q}\frac{1}{(p-1)^2}=\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}\prod_{p|q}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\le$$
$$\le\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}4^{\omega(q)}=\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}q^{\frac{\omega(q)\ln 4}{\ln q}},$$

где $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа $q$, и воспользовавшись известным неравенством

$$\omega(q)\le\frac{c_\omega\ln q}{\ln\ln q}$$

получим

$$R(N,b_1,b_2,b_3)\le\sum_{q>h}\frac{\mu^2(q)}{q^2}q^{\frac{c_\omega\ln 4}{\ln\ln q}}\le\sum_{q>h}q^{-2+\frac{c_\omega\ln 4}{\ln\ln q}}\ll\frac{1}{h^{1-\varepsilon}}=\frac{1}{(b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94})^{1-\varepsilon}}\ll\frac{1}{\mathcal{L}}, \tag{52}$$

где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное постоянное.

## 5.5. Вывод асимптотической формулы для $I(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя значение $J(H)$ и $\mathfrak{S}(N)$ соответственно из формул (39) и (51), а также оценку (52) в (38), найдем

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{1}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3}\left(\mathfrak{S}(N)+O\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\right)\right)\left(3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}}\right)\right)+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^4}\right)=$$
$$=\frac{3\mathfrak{S}(N)\,H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^4}\right). \tag{53}$$

## 5.6. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2)=\int\limits_{\mathfrak{M}_2}\prod_{i=1}^{3}\mathcal{S}_1(b_i\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов находим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)| \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{2} |\mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H)| d\alpha =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)| \prod_{i=1}^{2} \left( \int\limits_0^1 |\mathcal{S}_1(b_i\alpha; N, H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)| \prod_{i=1}^{2} \left( \sum_{\left|p_1 - \frac{N}{3b_i}\right| \le \frac{H}{b_i}} 1 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)| \prod_{i=1}^{2} \left( \pi\left(\frac{N}{3b_i} + \frac{H}{b_i}\right) - \pi\left(\frac{N}{3b_i} - \frac{H}{b_i}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы с учётом соотношения

$$\frac{2H}{b_3} \ge 2(b_1b_2)^{\frac{4}{3}} b_3^{\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{60} = b_3\left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{\frac{8}{3}A+52} \cdot \frac{2\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}}} \ge$$

$$\ge b_3\left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{\frac{8}{3}A+52} \ge \left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{7}{12}+\varepsilon}.$$

лемму 2.10, найдём

$$\pi\left(\frac{N}{3b_i} + \frac{H}{b_i}\right) - \pi\left(\frac{N}{3b_i} - \frac{H}{b_i}\right) \ll \frac{H}{b_i\mathcal{L}}, \qquad i = 1;\ 2.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)|. \tag{54}$$

Применяя к сумме $\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)$ лемму 5.1 выражаем ее через сумм вида $S_1(b_3\alpha; x, y)$, и имея в виду, что $H \le N(b_1b_2)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{-4}$, получим

$$\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H) \ll \frac{1}{\mathcal{L}}\left| S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H^2}{b_3N\mathcal{L}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{\mathcal{L}}\left| S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)\right| + \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^4}. \tag{55}$$

Оценим $\mathcal{S}_1(b_3\alpha; N, H)$ для $\alpha$ из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a, q) = 1, \qquad \frac{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3}{Hb_3^{-1}} < |\lambda| \le \frac{1}{q\tau},$$

$$q \le h = \mathcal{L}^{c_1} = b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94}, \qquad \tau = \frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathcal{L}^{c_2}}, \qquad \mathcal{L}^{c_2} = b_1^2b_2^2\mathcal{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 1.3, полагая

$$b = b_3, \qquad x = \frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}, \qquad y = \frac{2H}{b_3}, \qquad \mathcal{L}^A = b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^3.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Воспользовавшись значениями параметров $h$ и $A$, затем соотношением $H \ge (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}$, имеем

$$\left(\frac{N}{3b_3} + \frac{H}{b_3}\right)^{\frac{5}{8}} b_3h\mathcal{L}^{2,25A+81} = \frac{1}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}} b_3^{\frac{3}{8}} \cdot b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94} \cdot \left(b_1^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^3\right)^{\frac{9}{4}} N^{\frac{5}{8}} =$$

$$= \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}}{2b_3}\cdot\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{5}{8}}b_1^{\frac{41}{24}}b_2^{\frac{41}{24}}b_3^{\frac{1}{24}}N^{-\frac{1}{24}}\mathcal{L}^{\frac{111}{4}} \le \frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}}{2b_3} \le \frac{H}{2b_3}.$$

Таким образом условие теоремы 1.3 выполняется, следовательно согласно этой теоремы, находим

$$S_1\left(b_3\alpha; \frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \frac{2H}{b_3}\right) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b_3,q)}\right)}\frac{\sin\left(\frac{2\pi\lambda H}{b_3}\right)}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3b_3}\right)+O\left(\frac{H}{b_3\mathcal{L}^{3+\frac{\ln b_1+\ln b_2}{2\ln\mathcal{L}}}}\right) \ll$$

$$\ll \lambda^{-1}+\frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3} \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}^3}.$$

Подставляя эту оценку в (58), найдём

$$|\mathcal{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)| \ll \frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathcal{L}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathcal{S}_3(\alpha;\mu_3N,H)|$, $\alpha\in\mathfrak{M}_2$, в (54), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}}\cdot\frac{H}{b_3\sqrt{b_1b_2}\,\mathcal{L}^4} \ll \frac{H^2}{b_1b_2b_3\,\mathcal{L}^5}. \tag{56}$$

## 5.7. Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$

Имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int\limits_{\mathfrak{m}} \mathcal{S}_1(b_1\alpha;N,H)\mathcal{S}_1(b_2\alpha;N,H)\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам и поступая аналогично как при оценке $I(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)|. \tag{57}$$

Сумму $\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)$ при помощи лемму 5.1, выражая через суммы вида $S_3(\alpha;x,y)$, а также имея в виду, что $H\le N(b_1b_2)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{-4}$, получим

$$\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H) \ll \frac{1}{\mathcal{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha;\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3},\frac{2H}{b_3}\right)\right|+\frac{H^2}{b_3N\mathcal{L}}$$

$$\ll \frac{1}{\mathcal{L}}\left|S_1\left(b_3\alpha;\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3},\frac{2H}{b_3}\right)\right|+\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^4}. \tag{58}$$

Оценим $\mathcal{S}_1(b_3\alpha;N,H)$ для $\alpha$ из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha\in\mathfrak{m}$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau}, \qquad h<q\le\tau,$$

$$h=\mathcal{L}^{c_1}=b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94}, \qquad \tau=\frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathcal{L}^{c_2}}, \qquad \mathcal{L}^{c_2}=b_1^2b_2^2\mathcal{L}^{94}.$$

К сумме $S_1\left(b_3\alpha;\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3},\frac{2H}{b_3}\right)$ применим теорему 1.3, полагая

$$b=b_3, \qquad x=\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}, \qquad y=\frac{2H}{b_3}, \quad A=3+\frac{\ln b_1+\ln b_2}{2\ln\mathcal{L}}.$$

Проверим выполнение условий теоремы. Пользовавшись соотношением $H=(b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}$ и значением параметра $A$, имеем

$$b_3\left(\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}\right)^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{\frac{8}{3}A+52} = (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{60}\cdot\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}b_3}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{H}{3^{\frac{2}{3}}b_3}\left(1+\frac{3H}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \le \frac{H}{2b_3},$$

$$b_3\mathcal{L}^{4A+82}=b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94}=\mathcal{L}^{c_1}=h,$$

$$\frac{\left(\frac{2H}{b_3}\right)^2}{\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3}}\mathcal{L}^{-4A-82}=\frac{12H^2}{(N+3H)b_3}\left(b_1^2b_2^2b_3\mathcal{L}^{94}\right)^{-1}=\frac{12H^2}{(N+3H)b_3\mathcal{L}^{c_2}}=\tau.$$

Таким образом условие теоремы 1.1 выполняется и согласно этой теоремы, находим

$$S_1\left(b_3\alpha;\frac{N}{3b_3}+\frac{H}{b_3},\frac{2H}{b_3}\right)\ll\frac{H}{b_3\mathcal{L}^A}=\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^3}.$$

Подставляя полученную оценку в (58), а затем в (57), получим

$$I(\mathfrak{m})\ll\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}\mathcal{L}}\cdot\frac{H}{\sqrt{b_1b_2}b_3\mathcal{L}^4}=\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^5}. \tag{59}$$

### 5.8. Асимптотическая формула для $I(N,H)$

Подставляя найденные оценки для $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно из формул (53), (56) и (59) в (29), а затем воспользовавшись формулой (24) и соотношением

$$\frac{1}{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3}=\frac{1}{(\ln N)^3}\prod_{i=1}^{3}\left(1+\frac{\ln 3b_i}{\ln N-\ln 3b_i}\right)=\frac{1}{\ln^3 N}+O\left(\frac{\ln\ln N}{(\ln N)^4}\right),$$

получим

$$I(N,H)=\frac{3\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)\;H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3}+O\left(\frac{H^2}{b_1b_2b_3\mathcal{L}^4}\right)=\frac{3\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)\;H^2}{b_1b_2b_3(\ln N)^3}+O\left(\frac{H^2\ln\ln N}{b_1b_2b_3(\ln N)^4}\right).$$

Теорема доказана. □

## Список литератур


1. Виноградов И.М. Избранные труды. 1952. М: Изд-во АН СССР.
2. Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77, С.4-30.
3. Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number. J. London Math.Soc. 1951. V.26, pp .273-277.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III). Chinese Ann. of Math. 1990. V.2, pp. 138-147.
5. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes. Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3, pp. 135-170.
6. Jutila M. Mean value estimates for exponential sums with applications to $L$-functions. Acta Arithmetica. 1991. V. 57, Is. 2, pp. 93-114.
7. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII). Acta Mathematica Sinica. New Series 1994. V.10, No 4, pp. 369-387.
8. Baker A. On some diophantine inequalities involving primes. J. Reine Angew. Math. 228 (1967), pp. 166-181.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 1983. М.:, Наука.
10. Дэвенпорт Х. Мультипликативная теория чисел Х.Дэвенпорт 1971. М.: Наука.
11. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков. 1987. М.: Наука.
12. Прахар К. Распределение простых чисел. 1967. М.:Мир.
13. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана. УМН. 1994. Т. 49, Вып. 1, С. 161-162.
14. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы. ДАН СССР. 1939. Т. 22, No 7, С. 391-393.
15. Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм. 1976. М.: Наука.

16. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения. Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т.57, No 4, С. 55-71.
17. Huxley M.N. On the differences between consecutive primes. Invent. math. 15. 1972. pp. 164-170.
18. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. 2021. Термез.Изд. "Сурхан нашр".
19. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа. 1963. М.: Изд. 2–е. Перев. с англ., Физматгиз.

### Goldbaxning ternar muammosini deyarli teng qo'shiluvchilar bo'yicha umumlashtirish

**Rahmonov Zarullo, Allakov Ismail, Abrayev Baxrom**

Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^{60}, b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

yetarlicha katta natural $N$ sonni $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ ko'rinishda tasvirlashlar soni uchun asimptotik formula olinadi bunda $p_i$ tub sonlar, $b_1$, $b_2$ $b_3$, $N$ – juft-jufti bilan o'zaro tub natural sonlar, $B_i$ — ixtiyoriy fiksirlangan musbat son.

**Kalit so'zlar:** Goldbaxning ternar muammosi; deyarli teng qo'shiluvchilar; tub sonlar bilan qisqa trigonametrik yig'indi; katta yoylar markazlarining kichik aylanasi.

### Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms.

**Rakhmonov Zarullo, Allakov Ismail, Abrayev Baxrom**

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural $N$ in the form $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$ with the conditions

$$\left|b_ip_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}}N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^{60}, b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

where $b_i$ — natural numbers, $b_1$, $b_2$ $b_3$, $N$ are pairwise coprime, $B_i$ — arbitrary fixed positive numbers.

**Keywords:** ternary Goldbach problem; almost equal terms; short exponential sum with primes; small neighborhood of centers of major arcs.

**Получено: 03/07/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Rahmonov Z., Allakov I. and Abrayev B. Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 122-148

# Начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с функцией Бесселя в ядре

**Усмонов Дониёр**
Факультет математики и информатики
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан
dusmonov909@gmail.com

**Аннотация**

В данной работе в прямоугольной области исследуется начально – граничная задача для вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре. При этом, применением метода разделения переменных к изучаемой задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Далее, построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

**Ключевые слова:** вырождающееся уравнение; начально-граничная задача; функция Бесселя; интегро - дифференциальный оператор; спектральный метод; функция Грина; интегральное уравнение.

**MSC 2020:** 35R11

## 1. Введение. Постановка задачи

Известно, что теория дробного интегрирования и дифференцирования является одним из новых разделов математической науки [1], [2], [3]. К настоящему времени дробные интегро-дифференциальные операторы в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, а также дифференциальные уравнения, в которых они участвуют, изучены многими исследователями [4] - [23]. В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах [24], [25], [26]. Изучение краевых задач для таких уравнений имеет большое значение не только с теоретической точки зрения, но и с практической, ибо такие уравнения и задачи для них возникают при математическом моделировании многих задач теории газо-и гидродинамики, теории малых изгибаний поверхностей, математической биологии и других разделов науки.

В данной работе в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) + bu(x,t) + \Big[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}(x,t)\Big]_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ - неизвестная функция,

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int\limits_0^t (t-z)^{1-\delta} \bar{J}_{(1-\delta)/2}\ [\gamma(t-z)] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2\right) u(x,z)\, dz \tag{2}$$

- дробный дифференциальный оператор типа оператора Капуто с функцией Бесселя в ядре [27] от функции $u(x,t)$ по аргументу $t$, $\bar{J}_\nu(z)$- функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствам

$$\overline{J}_v(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k}, \tag{3}$$

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера [28], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка $\nu$ [29], а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $b$ - заданные действительные числа, причем $0 \le \alpha < 2$, $\alpha \ne 1$, $0 \le \beta < 1$, $1 < \delta < 2$, $b \ge 0$. Очевидно, что уравнение вдоль линий $x = 0$ и $x = 1$ вырождается.

Исследуем следующую начально-граничную задачу для уравнения (1).

**Задача** $B$. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, $u_x(x,t) \in C(\Omega \cup \{x=1\})$, $|u_x(0,t)| < \infty$, $x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx} \in C(\Omega \cup \{x=0\})$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x \in C(\Omega \cup \{x=1\})$, $u_t \in C(\Omega \cup \{t=0\})$, ${}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) \in C(\Omega)$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}\right]_{xx} \in C(\Omega)$; 2) в области $\Omega$ удовлетворяет уравнению (1); 3)на границе области $\Omega$ выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), x \in [0,1]; \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), x \in (0,1); \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{c} u(0,t) = 0,\ t \in [0,T],\ u_x(1,t) = 0, t \in (0,T), \\ \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]\Big|_{x=0} = 0,\ \ \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x\Big|_{x=1} = 0,\ t \in (0,T), \end{array}\right\} \tag{5}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции.

## 2. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра $\lambda$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]'' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{c} v(x) \in C[0,1], v'(x) \in C(0,1], |v'(0)| < \infty, x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \in C[0,1), \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]' \in C(0,1]; \\ v(0) = 0,\ v'(1) = 0,\ \ \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]\Big|_{x=0} = 0,\ \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]'\Big|_{x=1} = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

**Лемма 2.1.** *Задача* $\{(6),(7)\}$ *имеет счетное число собственных значений* $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$, *а соответствующие им собственные функции* $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x) \ldots$, *образуют ортонормированную систему в пространстве* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (6) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по $x$ на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям дважды к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (7), имеем

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [v''(x)]^2 dx = \lambda \int_0^1 v^2(x)\, dx.$$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$ следует $\lambda \ge 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует $v''(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = C_0 x + C_1$, $x \in (0,1)$, откуда, в силу условия $v(0) = 0$, $v'(1) = 0$, получим $v(x) \equiv 0$, $0 \le x \le 1$. Следовательно, задача $\{(6), (7)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Существование собственных значений задачи $\{(6), (7)\}$ докажем методом функций Грина. Здесь функция Грина $G(x,s)$ должна обладать следующими свойствами:

1) $G(x,s)$, $G_x(x,s)$, $x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x,s)$ непрерывны для всех $x, s \in [0,1]$;

2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}\left(x,s\right)\right]_{x}$, а при $x=s$ имеет скачок 1, т.е.

$$\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}\left(x,s\right)\right]_{x}\Big|_{x=s+0}-\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}\left(x,s\right)\right]_{x}\Big|_{x=s-0}=1\ ;$$

3) в интервалах $(0,s)$ и $(s,1)$ функция $G\left(x,s\right)$, рассматриваемая как функция от $x$, удовлетворяет уравнению $MG\left(x,s\right)=0$.

4) выполняются граничные условия:

$$G\left(0,s\right)=0,\ \ G_{x}\left(1,s\right)=0,\ \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G\left(x,s\right)\right]\Big|_{x=0}=0,\ \ \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}\left(x,s\right)\right]_{x}\Big|_{x=1}=0,\ s\in(0,1)\,;$$

Пользуясь представлениями общего решения уравнения $MG\left(x,s\right)=0$ в промежутках $(0,s)$ и $(s,1)$, нетрудно убедиться, что функция $G\left(x,s\right)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G\left(x,s\right)=\begin{cases}-\int\limits_{0}^{x}\left(x-z\right)z^{1-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz+xs\int\limits_{s}^{1}z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz+x\int\limits_{0}^{s}z^{1-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz,\ x<s;\\ -\int\limits_{0}^{s}\left(s-z\right)z^{1-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz+xs\int\limits_{x}^{1}z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz+s\int\limits_{0}^{x}z^{1-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz,\ x>s.\end{cases}\tag{8}$$

Очевидно, что $G\left(x,s\right)=G\left(s,x\right)$

Методом, примененным в [30], легко убедиться, что задача $\{(6),(7)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G\left(x,s\right)$:

$$v\left(x\right)=\lambda\int\limits_{0}^{1}G\left(x,s\right)v\left(s\right)ds.\tag{9}$$

Так как ядро $G\left(x,s\right)$ непрерывно, симметрично и положительно (т.е. $\lambda>0$), то в силу эквивалентности уравнения (9) и задачи (6) – (7), согласно теории интегральных уравнений [31], справедливо утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.1 доказана. $\square$

**Лемма 2.2.** *Пусть функция $h\left(x\right)$ удовлетворяет условиям:*

$$h\left(x\right),h'\left(x\right)\in C\left[0,1\right],\tag{10}$$

$$x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''\left(x\right),\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''\left(x\right)\right]'\in C\left[0,1\right],\tag{11}$$

$$h\left(0\right)=0,\ \ h'\left(1\right)=0,\tag{12}$$

$$\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''\left(x\right)\right]\Big|_{x=0}=0,\ \ \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''\left(x\right)\right]'\Big|_{x=1}=0,\tag{13}$$

$Mh\left(x\right)\in L_{2}\left(0,1\right).$ *Тогда, ее можно разложить на отрезке* $[0,1]$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций* $\{v_{k}\left(x\right)\}_{k=1}^{\infty}$, задачи (6)–(7).

Доказательство. В силу свойства функций $G\left(x,s\right)$ и $h\left(x\right)$, справедливы равенства

$$\int\limits_{0}^{1}G\left(x,s\right)Mh\left(s\right)ds=\int\limits_{0}^{1}G\left(x,s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h''\left(s\right)\right]''ds=$$

$$\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h''\left(s\right)\right]'G\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h''\left(s\right)G_{s}\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}+s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'\left(s\right)G_{ss}\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}-$$

$$- h\left(s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}\left(x,s\right)\right]_{s}\Big|_{s=0}^{s=x-0} - h\left(s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}\left(x,s\right)\right]_{s}\Big|_{s=x+0}^{s=1} +$$

$$+\int\limits_{0}^{1} h\left(s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}\left(x,s\right)\right]_{ss} ds = h\left(x\right).$$

Следовательно,

$$h\left(x\right)=\int\limits_{0}^{1} G\left(x,s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h''\left(s\right)\right]'' ds$$

т.е. $h\left(x\right)$ – есть функция, представимая через ядро $G\left(x,s\right)$.

Кроме этого, в силу непрерывности функции $G\left(x,s\right)$ в $\{(x,s):0\le x,s\le 1\}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{0}^{1} G^{2}\left(x,s\right)ds = A\left(x\right)\le C_{2} = const < +\infty.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта – Шмидта [31], справедливо утверждение леммы 2.2.

Лемма 2.2 доказана. □

## 3. Вспомогательные леммы

В этом пункте предполагается, что $\lambda_k$ и $v_k\left(x\right)$, $k\in N$ понимаются собственные значения и собственные функции задачи $\{(6),(7)\}$, а под $h_k$ – коэффициент Фурье заданной функции $h\left(x\right)$ по системе собственных функций $\{v_k\left(x\right)\}_{k=1}^{+\infty}$, т.е. $h_k=\int\limits_0^1 h\left(x\right)v_k\left(x\right)dx$, $k\in N$.

**Лемма 3.1.** (О сходимости билинейных рядов) *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте* $[0,1]$ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[{v_k}^{(\mu)}\left(x\right)\right]^{2}/\lambda_k\ ,\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}{v''}_k\left(x\right)\right]^{(\mu)}\right\}^{2}/\lambda_k^{2}\ ,\mu=\overline{0,1}. \tag{14}$$

Доказательство. Так как ядро $G\left(x,s\right)$ интегрального уравнения (9) симметрично, положительно (т.е. $\lambda>0$) и непрерывно в $\{(x,s):0\le x,s\le 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [31], это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G\left(x,s\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что $G\left(x,x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\le C_3=const<+\infty$, т.е. первый ряд в (14) равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

В силу (9) и (6), имеют место равенства

$${v'}_k\left(x\right)=\lambda_k\int\limits_0^1 G_x\left(x,s\right)v_k\left(s\right)ds=\int\limits_0^1 G_x\left(x,s\right)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}{v''}_k\left(s\right)\right]'' ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза, а затем принимая во внимание условия $\left[s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''\left(s\right)\right]\Big|_{s=0}=0$, $\left[s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''\left(s\right)\right]'\Big|_{s=1}=0$ и $G_x\left(x,0\right)=0$, $G_{xs}\left(x,1\right)=0$, получим

$${v'}_k\left(x\right)=\int\limits_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{xss}\left(x,s\right){v''}_k\left(s\right)ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{{v'}_k\left(x\right)}{\sqrt{\lambda_k}}=\int\limits_0^1 s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}G_{xss}\left(x,s\right)\left\{\frac{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}{v''}_k\left(s\right)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}ds. \tag{15}$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (6), (7), находим

$$\int\limits_0^1 \frac{s^\alpha(1-s)^\beta v''_k(s)\, v''_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\left[s^\alpha(1-s)^\beta v''_k(s)\, v'_l(s)\Big|_0^1 - \left[s^\alpha(1-s)^\beta v''_k(s)\right]' v_l(s)\Big|_0^1\right] +$$

$$+\int\limits_0^1 \frac{\left[s^\alpha(1-s)^\beta v''_k(s)\right]'' v_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}}\int\limits_0^1 v_k(s)\, v_l(s)\, ds = \begin{cases} 1, & k=l\,, \\ 0, & k\neq l\,. \end{cases} \tag{16}$$

Следовательно, $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v''_k(s)\,/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ – ортонормальная система.

Из (15), в силу (16), следует, что $v'_k(x)\,/\sqrt{\lambda_k}$ — есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}G_{xss}(x,s)$ по системе $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v''_k(s)\,/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [31], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[v'_k(x)\right]^2}{\lambda_k} \le \int\limits_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta\left[G_{xss}(x,s)\right]^2 ds. \tag{17}$$

Пользуясь формулой (8), нетрудно убедиться, что интеграл в (17) равномерно ограничен. Поэтому ряд в (17), т.е. второй ряд в (14) сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость остальных рядов.

Лемма 3.1 доказана. □

Ниже докажем ряд лемм о порядке коэффициентов Фурье.

**Лемма 3.2.** *Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (9), (11), $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h''(x)\in L_2(0,1)$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k h_k^2 \le \int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\left[h''(x)\right]^2 dx, \tag{18}$$

*в частности, ряд в левой части сходится.*

Доказательство. Из формулы коэффициента $h_k$, в силу уравнения (6), следует равенство

$$\lambda_k^{1/2}h_k = \lambda_k^{1/2}\int\limits_0^1 h(x)\, v_k(x)\, dx = \lambda_k^{-1/2}\int\limits_0^1 h(x)\left[x^\alpha(1-x)^\beta v''_k(x)\right]'' dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2}h_k = \int\limits_0^1 \left\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h''(x)\right\}\left\{\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v''_k(x)\right\}dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2}h_k$ – есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h''(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v''_k(x)/\sqrt{\lambda_k}\,\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [31], справедливо неравенство (18).

Лемма 3.2 доказана. □

**Лемма 3.3.** *Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 h_k^2 \le \int\limits_0^1 \left[Mh(x)\right]^2 dx, \tag{19}$$

*в частности, ряд в левой части сходится.*

Доказательство. Из формулы коэффициента $h_k$, в силу уравнений (6) и (9), справедливо равенство

$$\lambda_k h_k = \lambda_k \int\limits_0^1 h\left(x\right) v_k\left(x\right) dx = \int\limits_0^1 h\left(x\right) M v_k\left(x\right) dx = \int\limits_0^1 h\left(x\right) \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v''{}_k\left(x\right)\right]'' dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $h\left(x\right)$ и $v_k\left(x\right)$, получим

$$\lambda_k h_k = \int\limits_0^1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} h''\left(x\right)\right]'' v_k\left(x\right) dx = \lambda_k h_k = \int\limits_0^1 \left[M h\left(x\right)\right] v_k\left(x\right) dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k h_k$ – есть коэффициент Фурье функции $Mh\left(x\right)$ по ортонормированной системе функций $\left\{v_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (19). Лемма 3.3 доказана. □

Аналогично леммам 3.2 и 3.3, доказываются следующие лемма.

**Лемма 3.4.** *Если функция $h\left(x\right)$ удовлетворяет условиям (10) – (13), а функция $Mh\left(x\right)$ удовлетворяет условиям (10), (12) и $x^{\alpha/2}\left(1-x\right)^{\beta/2}\left[Mh\left(x\right)\right]'' \in L_2\left(0,1\right)$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \le \int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \left\{\left[Mh\left(x\right)\right]''\right\}^2 dx,$$

*в частности, ряд в левой части сходится.*

## 4. Существование, единственность и устойчивость решения задачи $B$

Формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k\left(t\right) v_k\left(x\right), \tag{20}$$

где

$$u_k\left(t\right) = \varphi_{1k}\mathbb{E}_{\delta,1,(-1/2)}\left[-(\lambda_k+b)t^{\delta};\gamma t\right] + \varphi_{2k} t \mathbb{E}_{\delta,2,1/2}\left[-\left(\lambda_k+b\right)t^{\delta};\gamma t\right] +$$
$$+\int\limits_0^t \left(t-z\right)^{\delta-1}\mathbb{E}_{\delta,\delta,(\delta-1)/2}\left[-\left(\lambda_k+b\right)\left(t-z\right)^{\delta};\gamma\left(t-z\right)\right] f_k\left(z\right) dz, \tag{21}$$

где $\varphi_{1k}$, $\varphi_{2k}$, $f_k\left(t\right)$ - коэффициенты Фурье функций $\varphi_1\left(x\right)$, $\varphi_2\left(x\right)$, $f\left(x,t\right)$ в системе собственных функций $\left\{v_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$,

$$\mathbb{E}_{\alpha_1,\beta_1,\theta}\left[x;y\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\alpha_1 n+\beta_1\right)} \overline{J}_{\alpha n/2+\theta}\left(y\right). \tag{22}$$

Очевидно, что (22) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [32]:

$$E_{\alpha_1,\beta_1}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\alpha_1 k+\beta_1\right)}. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что при $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$, $\theta \ge (-1/2)$ ряд (22) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < x,\ y < +\infty$.

Для функции (22) справедливы следующие равенства

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[x;0\right] = E_{\alpha,\beta}\left(x\right),\quad \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;y\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\bar{J}_{\theta}\left(y\right),\quad \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;0\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)} \tag{24}$$

и следующие формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right] = -\lambda x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right] - \gamma^{2} x\mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right], \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]\right\} = x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right], \beta \neq 1. \quad (26)$$

**Теорема 4.1.** *Если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3.4, а функция $f(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ удовлетворяет условиям леммы 3.4 по аргументу $x$ равномерно по $t$, то сумма ряда (20) определяет единственное решение задачи $B$.*

Доказательство. Для доказательства существования решения достаточно доказать, что ряд (20) и ряды, соответствующие функциям $u_x(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_x$, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$, а ряды ${}_CD_{0t}^{\delta,\gamma}u(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$ сходятся равномерно на любом компакте $D \subset \Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (20). Так как [27]

$$|u_k(t)| \leq C_4|\varphi_{1k}| + C_5|\varphi_{2k}| + C_6\int\limits_0^T |f_k(z)|\,dz, \quad C_j = const > 0, \quad j = 4,5,6, \quad (27)$$

то справедливы неравенства

$$|u(x,t)| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\,v_k(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)|\,|v_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{C_4|\varphi_{1k}| + C_5|\varphi_{2k}| + C_6\int\limits_0^T|f_k(z)|\,dz\right\}|v_k(x)|. \quad (28)$$

На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_{jk}|\,|v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}, j = 1,2,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sqrt{\int\limits_0^T f_k^2(z)\,dz}\,|v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k\int\limits_0^T f_k^2(z)\,dz}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\int\limits_0^T f_k^2(z)\,dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k f_k^2(z)\,dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 3.1 и 3.2, сходятся равномерно по $x$ на $[0,1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по $x$ на $[0,1]$. Отсюда и из (28) следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$. В силу (27), из (20) следует неравенство

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{C_4|\varphi_{1k}| + C_5|\varphi_{2k}| + C_6\int\limits_0^T|f_k(z)|\,dz\right\}\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''_k(x)\right]''\right|. \quad (29)$$

Отсюда, в силу уравнения (6) на любом компакте $D(\subset\Omega)$ имеем

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\left\{C_4|\varphi_{1k}| + C_5|\varphi_{2k}| + C_6\int\limits_0^T|f_k(z)|\,dz\right\}v_k(x)\right|.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\varphi_{jk}v_k(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},\quad j=1,2,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\sqrt{\int_0^T f_k^2(z)\,dz}\,|v_k(x)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k^3\int_0^T f_k^2(z)\,dz}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\int_0^T f_k^2(z)\,dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\int_0^T\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3 f_k^2(z)\,dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 3.1 и 3.4, сходятся равномерно по $x$ на $[0,1]$. Тогда равномерно по $x$ на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (29) сходится абсолютно и равномерно на компакте $D$. Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Пусть функция $u(x,t)$ - есть решение задачи $B$ с однородным уравнением и однородными условиями (4), (5). Рассмотрим его коэффициенты Фурье по системе собственных функций задачи $\{(6),(7)\}$:

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)\,v_k(x)\,dx.$$

Тогда, в силу формулы (21) и $\varphi_{jk}=0,\ j=1,2,\ k\in N$, имеем $u_k(t)=0,\ k\in N$.

Согласно свойствам функции Грина и теореме Мерсера [31], имеют место следующие равенства:

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss}ds=$$

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)\,v_k(s)}{\lambda_k}\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss}ds=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\lambda_k}\int_0^1 v_k(s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss}ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $u(s,t)$, $v_k(s)$ и уравнение (6), получим

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\lambda_k}\int_0^1 u(s,t)\left[s^\alpha(1-s)^\alpha v''_k(s)\right]''ds=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x)\int_0^1 u(s,t)\,v_k(s)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\,v_k(x)=0,$$

поскольку $u_k(t)=0,\ k\in N$. Следовательно, $u(x,t)\equiv 0,\ (x,t)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи $B$.

Теорема 4.1 доказана. □

**Теорема 4.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда для решения задачи B справедливы следующие оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})}\le C_7\|\varphi''_1(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}+C_8\|\varphi''_2(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}+C_9\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\right\|_{L_{2,r}(\Omega)},$$

*где* $\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}=\sup\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|$, $\|g(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}=\left[\int_0^1 r(x)\,[g(x)]^2dx\right]^{1/2}$, $r(x)=x^\alpha(1-x)^\beta$.

Эта теорема доказывается так же, как в [20].

## Список литератур


1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторыих приложения. 1987. Минск: Наука и техника.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. 2003. Москва: Физматлит.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. 2006. Amsterdam, North-Holland: Mathematics Studies 204, Elsevier.
4. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Изв. АН АрмССР. Mat. 1968. Том. 3, Вып 1. с. 3-29.
5. Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма - Лиувилля. Изв. АН АрмССР. Mat. 1970. Том. 5, Вып 2. с. 71-96.
6. Нахушев А. М. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Докл. АН СССР. 1977. Том. 234, Вып 2, с. 308-311.
7. Алероев Т. С. К проблеме о нулях функции Миттаг Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка. Дифференц. уравнения. 2000. Том 36, Вып 9, с. 1278 - 1279.
8. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. 2005. Москва: Наука.
9. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. 2003. Москва: Физматлит.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987. Минск: Наука и техника.
11. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Tricomi type problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with the hyper-bessel fractional differential operator. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2019. Vol. 4, pp. 9-14.
12. Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева - Бицадзе с дробной производной Герасимова - Капуто. Прикладная математика и Физика. 2020. том 52, Вып 4. с. 246-254.
13. Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х. Задачи типа Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдейи-Кобера дробного порядка. Изв. вузов. Математика. 2020. Вып 10, с. 33-46.
14. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области. Изв. вузов. Математика. 2021. Вып 3, с. 29-46.
15. Уринов А. К., Каримов Э. Т., Кербал С. Краевая задача с интегральным условием сопряжения для уравнения в частных производных с дробной производной Римана-Лиувилля, связанная с течением газа в канале, окруженном пористой средой. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2022. Том 210, с. 66-76.
16. Кадиркулов Б. Ж., Каюмова Г. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с инволюцией. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Том 210, с. 55-65.
17. Karimov E.T, Ruzhansky M., Toshtemirov B.Y. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. pp. 1-17.
18. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области. Актуальные вопросы алгебры и анализа. Термез, 18-19 ноября, 2022, с. 187-188.
19. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области. Mathematics, mechanics and intellectual technologies. Тошкент, 28-29 март 2023, с. 163.
20. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Нелокальная начально-граничная задача для вырождающиегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова-Капуто. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Том 42, Вып 1, с. 123-139.

21. Усмонов Д. А. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производный второго порядка смешанного типа вырождающегося внутри и на границе области. Бюллетень Института математики. 2023. Том. 6, Вып 1, с. 155-164.

22. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Том. 33, Вып. 2. с. 312–328.

23. Mamanazarov A. O., Usmonov D. A. A mixed problem for a fourth order equation degenerating on the part of the bound of the domain. Scientific journal of the Fergana State University. Vol. 1, pp. 13-26.

24. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel. 1969.

25. Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. Comparison theorems of tempered fractional differential equations. Eur. Phys. J. Spec. Top. 2022. vol. 231, pp. 2477 – 2485.

26. Уринов А.К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувиляя с помощью функции Бесселя. Бюллетень Института математики. 2022. Том. 5, Вып. 1. с. 108 – 155.

27. Уринов А., Усмонов Д. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро – дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре. Бюллетень Института математики. 2023, Том. 6. Вып 1. с. 138-153.

28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. 1965. Москва: Наука.

29. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. 1966. Москва, Наука, 1966. 296с.

30. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. 1969. Москва: Наука.

31. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. 1959. Москва: Физматлит.

32. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. 1967. Москва: Наука.

## Yadrosida Bessel funksiyasi qatnashgan integro–differensial operatorni o‘z ichiga oluvchi buziladigan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala

**Usmonov Doniyor**

Ushbu maqolada to‘rtburchak sohada yadrosida Bessel funksiyasi qatnashgan integro–differensial operatorni o‘z ichiga oluvchi buziladigan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala tadqiq etilgan. O‘rganilayotgan masalaga o‘zgaruvchilarni ajratish usulini qo‘llash orqali oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalari sistemasinig mavjudligi isbotlangan. Berilgan funksiyani xos funksiyalar sistemasi orqali tekis yaqinlashuvchi qatorga yoyish haqidagi teorema isbotlangan. O‘rganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalar sistemasi orqali Furye qatorining yig‘indisi sifatida yoziladi. Masalaning yechimi uchun baho olingan, undan yechimning berilgan funksiyalarga uzluksiz bog‘liq ekanligi kelib chiqadi.

**Kalit so‘zlar:** buziladigan tenglama; boshlang‘ich chegara masala; Bessel funksiyasi; integro - differensial operator; spektral usul; Green funksiyasi; integral tenglama.

Initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation containing fractional order integral-differential operator with Bessel function in the kernel

**Usmonov Doniyor**

In this work, in a rectangular domain, we study an initial boundary value problem for a degenerate fourth-order differential equation containing an integral-differential operator with a Bessel function in the kernel. Applying the method of separation variables to the considered problem a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. The existence of eigenvalues and the system of eigenfunctions of the spectral problem were proved. A theorem is proved for expanding a given function into a uniformly convergent series with respect to the system of eigenfunctions. The solution of the considered problem is written as the sum of the Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of spectral problem. An estimate for the solution of the problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

**Keywords:** degenerate equation; initial-boundary value problem; Bessel function; integral–differential operator; spectral method; Green's function; integral equation.

**Получено: 22/07/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Usmonov D. Initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation containing fractional order integral-differential operator with Bessel function in the kernel. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 149-159

# Квадратичные стохастические операторы порожденные регулярными разбиениями счетного множества состояний

**Шамсиддинов Насриддин**
Академический лицей ТГТУ имени
И.А. Каримова.Ташкент, Узбекистан
shamsiddinov1974nb@gmail.com

**Аноров Обиджон**
Ташкентский государственный
транспортный университет,
Ташкент, Узбекистан
anorovobidjon6@gmail.com

## Аннотация

В этой статье мы строим квадратичные стохастические операторы, порожденные конечным регулярным разбиением счетного множества состояний, и доказываем, что такие операторы являются регулярными преобразованиями.

**Ключевые слова:** абсолютно-непрерывная мера; распределение Пуассона; конечное регулярное разбиение; регулярное преобразование.

**MSC 2020:** 37N25, 92D10.

## 1. Введение

Понятие квадратичного стохастического оператора (к.с.о.) было введено С.Н.Бернштейном [1], при изучении некоторых математических проблем связанных с теорией наследственности. В [2] понятие к.с.о. было обобщено следующим образом.

Пусть $(E, F)$-измеримое пространство, где - некоторое фиксированное множество и $F$-$\sigma$ - алгебра подмножеств множество $E$. Положим $S(E, F)$-множество всех вероятностных мер определённых на измеримом пространстве $(E, F)$. Пусть $\{P(x, y, A) : x, y \in E, A \in F\}$ семейство функций определённых на $EXEXF$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых фиксированных $x, y \in E$,

$$P(x, y, *) \in S(E, F) \tag{1}$$

2) для любого фиксированного измеримого множества $A \in F$ отображение

$$P(*, *, A) \rightarrow \tag{2}$$

является измеримой функцией двух переменных,

3) для любых фиксированных $x, y \in E$ и $A \in F$

$$P(x, y, A) = P(y, x, A) \tag{3}$$

Из условия (1) следует, что

$$P(x, y, E) = 1, \forall x, y \in E. \tag{4}$$

**Определение 1.1.** Отображение $V : S(E, F) \rightarrow S(E, F)$ называется квадратичным стохастическим оператором (к.с.о.) порожденным семейством переходных вероятностей $\{P(x, y, A) : x, y \in E, A \in F\}$ удовлетворяющих условиям (1)-(3), если для произвольной меры $\lambda \in S(E, F)$, её образ $\lambda' = V\lambda$ определяется равенством

$$\lambda' = \int_E \int_E P(x, y, A) d\lambda(x) d\lambda(y) \tag{5}$$

для произвольного измеримого множества $A \in F$.

Если $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ -конечное множество и $F$- множество всех подмножеств , тогда

$$S(E,F) = S^{(n-1)} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=}^{n} x_i = 1\} \tag{6}$$

и к.с.о. (5) имеет вид

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{i,j,k} x_i x_j \tag{7}$$

где $P_{i,j,k} = P(i,j,k)$. Очевидно $P(i,j,k) = P(j,i,k)$, $P(i,j,k) \geq 0$ и из условия (4) следует, что $\sum_{i,j=1}^{n} P_{i,j,k} = 1$, для любых $i, j, k \in E$.

Таким образом, если - конечное множество, определение к.с.о. данное выше совпадает с определением к.с.о. приведённым в [1].

**Определение 1.2.** Квадратичный стохастический оператор $V$ (5) назовем дискретным, если множество не более чем счетно и в противном случае - непрерывным. Дискретный к.с.о. (5) определяется кубической матрицей $\{P_{i,j,k}\}_{i,j,k=1}^{n}$ или $\{P_{i,j,k}\}_{i,j,k=1}^{\infty}$.

**Определение 1.3.** Дискретный квадратичный стохастический оператор $V$ (5) назовем вольтерровским, если $P_{ij,k} = 0$ при $i \neq k$ и $j \neq k$. В работе [6] введено следующее

**Определение 1.4.** К.с.о. оператор $V$ (5) назовем абсолютно непрерывным, если для любой меры $\lambda \in S(E,F)$, мера $V\lambda$ абсолютно непрерывна относительно меры $\lambda$. т.е. $V\lambda \prec \lambda$. Там же доказана следующая

**Теорема 1.1.** *Дискретный к.с.о. $V$ абсолютно непрерывен тогда и только тогда, когда $V$ является вольтерровским оператором.*

В случае бесконечного $E$ основная проблема при построении ксо – определить семейство переходных вероятностей $\{P(x,y,A) : x, y \in E, A \in F\}$ удовлетворяющих условиям (1)-(3).

В работах [7]-[13] предлагается следующий подход построения семейства переходных вероятностей

$$\{P(x,y,A) : x, y \in E, A \in F\}$$

удовлетворяющих условиям (1)-(3).

Пусть $\xi = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ конечное измеримое разбиение пространства $E$, т.е.$A_i \in F$ для всех $i$,$A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{n} A_i = E$.

На пространстве $E \times E$ определим соответствующее разбиение $\zeta = \{B_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ , где $B_{ii} = A_i \times A_i$ и $B_{ij} = A_i \times A_j \cup A_j \times_i$ при $i \neq j$. Выделим семейства вероятностных мер $\{\mu_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ на $(E, F)$ такое что $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ и определим переходную вероятность $P(x,y,A)$ следующим образом: для произвольного $A \in F$, $P(x,y,A) = \mu_{ij}(A)$ если $(x,y) \in B_{ij}$. В этом случае ксо (5) сводится к ксо с конечным числом состояний [7]-[13]:

$$V\lambda(A) = \int_E \int_E P(x,y,A) d\lambda(x) d\lambda(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{A_i} \int_{A_i} P(x,y,A) d\lambda(x) d\lambda(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij}(A) d\lambda(A_i) d\lambda(A_j).$$

Положим $x_i = \lambda(A_i), i = 1, \cdots, n$, где $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S^{n-1}$ и $p_{ij,k} = \mu_{ij}(A_k)$. Тогда ксо (5) можно переписать как

$$(Wx)_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j. \tag{8}$$

## 2. Дискретные к.с.о. со счетным числом состояний.

Пусть $E = Z_+ = 0, 1, 2, \ldots$- множество неотрицательных целых чисел.

**Определение 2.1.** Разбиение $\xi = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ множества $E$ такое что $A_k = \{x \in Z_+ : x = k(mod n), k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ будем называть регулярным разбиением.

В этой работе мы будем изучать Пуассоновские ксо порожденные регулярными разбиениями.

Напомним что ксо называется Пуассоновским если $\{\mu_{ij} : i,j = 1,\dots,n\}$ является семейством Пуассоновских мер [7].

Для произвольной меры Пуассона $\mu$ с параметром $\lambda$ и регулярного разбиения $\xi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ определим $\mu(A_i)$ для дюбого $i$.

Пусть

$$A_k = \{x = k(mod n), k = 0, 1, \dots, n-1; x \in Z_+\}.$$

Тогда

$$\mu(A_k) = \frac{1}{e^\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{ni+k}}{(ni+k)!} \quad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

Положим $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{ni+k}}{(ni+k)!} = f_k(\lambda)$.

$$f_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{\lambda^{2n+k}}{(2n+k)!} + \frac{\lambda^{3n+k}}{(3n+k)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k}}{(ni+k)!} + ...$$

Тогда производные функции $f_k(\lambda)$ определяются следующим образом

$$f_k'(\lambda) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{n+k-1}}{(n+k-1)!} + \frac{\lambda^{2n+k-1}}{(2n+k-1)!} + \frac{\lambda^{3n+k-1}}{(3n+k-1)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k-1}}{(ni+k-1)!} + ...$$

$$f_k''(\lambda) = \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\lambda^{n+k-2}}{(n+k-2)!} + \frac{\lambda^{2n+k-2}}{(2n+k-2)!} + \frac{\lambda^{3n+k-2}}{(3n+k-2)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k-2}}{(ni+k-2)!} + ...$$

$$...$$

$$f_k^{(k)}(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} + \frac{\lambda^{3n}}{(3n)!} + ... + \frac{\lambda^{ni}}{(ni)!} + ...$$

$$...$$

$$f_k^{(n-1)}(\lambda) = \frac{\lambda^{n+k-n+1}}{(n+k-n+1)!} + \frac{\lambda^{2n+k-n+1}}{(2n+k-n+1)!} + \frac{\lambda^{3n+k-n+1}}{(3n+k-1)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k-1}}{(ni+k-1)!} + ...$$

$$f_k^{(n)}(\lambda) = \frac{\lambda^{n+k-n}}{(n+k-n)!} + \frac{\lambda^{2n+k-n}}{(2n+k-n)!} + \frac{\lambda^{3n+k-n}}{(3n+k-n)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k-n}}{(ni+k-n)!} + ... =$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{\lambda^{2n+k}}{(2n+k)!} + \frac{\lambda^{3n+k}}{(3n+k)!} + ... + \frac{\lambda^{ni+k}}{(ni+k)!} + ... = f_k(\lambda)$$

Последнее равенство определяет однородное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$f_k^{(n)}(\lambda) = f_k(\lambda)$$

с началными условиями $(\lambda = 0)$

$$f_k(0) = 0, f_k'(0) = 0, ..., f_k^{(k)}(0) = 1, ...., f_k^{(n)}(0) = 0.$$

Решая это уравнение находим что

$$\mu(A_k) = \frac{1}{e^\lambda}f_k(\lambda) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

Пусть $n = 2$ . Полагая $f_k''(\lambda) = f_k(\lambda)$, видим $k^2 = 1$ и $k = \pm 1$.

Для $f_1(\lambda) = C_1e^{\lambda} + C_2e^{-\lambda}$ и исходя из начальных условий $f_1(0) = 1$ и $f_1'(0) = 0$ находим значение $C_1$ и $C_2$.

$f_1(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 1$ и $f_1'(0) = C_1e^0 - C_2e^0 = C_1 - C_2 = 0$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Отсюда $f_1(\lambda) = \frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}$

Для $f_2(\lambda) = C_1e^{\lambda} + C_2e^{-\lambda}$ исходя из начальных условий $f_1(0) = 0$ и $f_1'(0) = 1$ находим значение $C_1$ и $C_2$.

$f_1(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 0$ и $f_1'(0) = C_1e^0 - C_2e^0 = C_1 - C_2 = 1$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$$

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Отсюда $f_2 = (\lambda) = \frac{1}{2}e^{\lambda} - \frac{1}{2}e^{-\lambda}$.

Следовательно,

$\mu(A_1) = \frac{1}{e^{\lambda}}f_1(\lambda) = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2e^{\lambda}}$ и $\mu(A_2) = \frac{1}{e^{\lambda}}f_2(\lambda) = \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2e^{\lambda}}$.

В этом случае переходные вероятности $P(i,j,A)$ определяются следующим образом:

$$P(i,j,A_1) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}}{2e^{\lambda_1}} & \text{если } (i,j) \in B_{11)}, \\ \frac{e^{\lambda_2}+e^{-\lambda_2}}{2e^{\lambda_2}} & \text{если } (i,j) \in B_{22}, \\ \frac{e^{\lambda_3}+e^{-\lambda_3}}{2e^{\lambda_3}} & \text{если } (i,j) \in B_{12} \end{cases}$$

и

$$P(i,j,A_2) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1}-e^{-\lambda_1}}{2e^{\lambda_1}} & \text{если } (i,j) \in B_{11)}, \\ \frac{e^{\lambda_2}-e^{-\lambda_2}}{2e^{\lambda_2}} & \text{если } (i,j) \in B_{22}, \\ \frac{e^{\lambda_3}-e^{-\lambda_3}}{2e^{\lambda_3}} & \text{если } (i,j) \in B_{12} \end{cases}$$

В этом случае квадратичный стохастический оператор (7) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}}{2e^{\lambda_1}}x_1^2 + \frac{e^{\lambda_2}+e^{-\lambda_2}}{2e^{\lambda_2}}x_2^2 + \frac{e^{\lambda_3}+e^{-\lambda_3}}{e^{\lambda_3}}x_1x_2 \\ x_2' = \frac{e^{\lambda_1}-e^{-\lambda_1}}{2e^{\lambda_1}}x_1^2 + \frac{e^{\lambda_2}-e^{-\lambda_2}}{2e^{\lambda_2}}x_2^2 + \frac{e^{\lambda_3}-e^{-\lambda_3}}{e^{\lambda_3}}x_1x_2 \end{cases}$$

При $n = 3$ повторяя предыдущие рассуждения можно показать что

$$\mu(A_1) = \frac{1}{e^{\lambda}}f_1(\lambda) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$$

$$\mu(A_2) = \frac{1}{e^{\lambda}}f_2(\lambda) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$$

$$\mu(A_3) = \frac{1}{e^{\lambda}}f_3(\lambda) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$$

В этом случае переходные вероятности $P(i,j,A)$ определяются следующим образом:

$$P(i,j,A_1) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1) & \text{если } (i,j) \in B_{11}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2) & \text{если } (i,j) \in B_{22}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3) & \text{если } (i,j) \in B_{33}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4) & \text{если } (i,j) \in B_{12}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5) & \text{если } (i,j) \in B_{13}, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6) & \text{если } (i,j) \in B_{23}. \end{cases}$$

$P(i,j,A_2)$ и $P(i,j,A_3)$ вычиляется аналогично.

В таком случае квадратичный стохастический оператор (7) имеет следующий вид:

$$x_1' = (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1))x_1^2 + (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2))x_2^2 +$$

$$+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3))x_3^2 + 2(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4))x_1x_2 +$$

$$+2(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5))x_1x_3 + 2(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6))x_2x_3,$$

$$x_2' = (\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1))x_1^2 + (\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2))x_2^2 +$$

$$+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3))x_3^2 + 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4))x_1x_2 +$$

$$+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5))x_1x_3 + 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6))x_2x_3,$$

$$x_3' = (\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_1}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1))x_1^2 + (\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2))x_2^2 +$$

$$+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_3}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3))x_3^2 + 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_4}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_4))x_1x_2 +$$

$$+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_5}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_5))x_1x_3 + 2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6)-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_6}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_6))x_2x_3.$$

Для квадратичных стохастических операторов, построенных таким образом, имеет место следующая теорема:

**Теорема 2.1.** *Для всех* $\lambda_i \geq 3n$*, траектория любой точки симплекса* $S(\Omega, F)$ *сходится к точке* $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$.

В этой работе справедливость этого утверждения проверено применением численных расчетов. В последующих работах будет приведено аналитическое доказательство.

# Список литератур


1. Бернштейн С.Н. Решение математической проблемы связанной с теорией наследственности. Учен, запис.Научно- Иссл.Каф.Укр. Отд. Мат. 1924. 1, С. 83-115.
2. Ганиходжаев Н.Н., Сарымсаков Т.А. Аналитические методы в теории к.с.о. ДАН СССР, 1989, Т.305, №5. С. 1052-1056
3. Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A. On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions. Regular ami Chaotic Dyn. 2006. V.I 1, №4, pp. 467-473.
4. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры. Матем. Сб. 1992. Т.183, No 8, С. 121-140.
5. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.В. Квадратичные автоморфизми симплекса и асимптотическое поведение их траекторий. Владикавк. матем. журнал. 2006. Т.8, вып. 2, С.12-28.
6. Н.Н.Ганиходжаев, О. У. Аноров. Об одном классе непрерывных квадратичных стохастических операторов. Uzbek Mathematical Journal. 2008. 2, С. 26-34.
7. Ganikhodjaev N.N, Hamzah Z. A. On Poisson nonlinear transformations. Scientific World Journal. Vol. 2014, pp. 832-861,
8. Hamzah Z. A., Ganikhodjaev N. N. Nonhomogeneous Poisson Nonlinear Transformations on Countable Infinite Set. Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2016. 10(Special Issue), pp. 143-175.

9. Karim S. N., Hamzah Z. A., Fauzi N. M., Ganikhodjaev N. N. New class of 2-partition Poisson quadratic stochastic operators on countable state space. Journal of Physics. Conference Series. 2021. 1988(1), 012080.
10. Ganikhodjaev N. N., Hamzah Z. A., Geometric quadratic stochastic operator on countable infinite set. AIP Conference Proceedings. 2015. 1643(1), pp. 706-712.
11. Karim S. N., Hamzah Z. A., Ganikhodjaev N. N. (2019). A class of geometric quadratic stochastic operator on countable state space and its regularity. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. 2019. Vol. 15, No. 6 (2019), pp. 872-877.
12. Karim S. N., Hamzah Z. A., Ganikhodjaev N. N. Regularity of Geometric quadratic stochastic operator generated by 2-partition of infinite points. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. 2020. 16(3).
13. Karim S. N., Hamzah Z. A., Ganikhodjaev N. N. On nonhomogeneous geometric quadratic stochastic operators. Turkish Journal of Mathematics. 2022. 46, pp. 1397-1407.

## Sanoqli holatlar to'plamni regulyar parchalanishlardan hosil bo'lgan kvadratik stoxastik operatorlar

**Shamsddinov Nasriddin, Anorov Obidjon**

Ushbu maqolada cheksiz sanoqli to'plamdagi regulyar parchalanishlar orqali kvadratik stoxastik operatorlar qurilgan va ushbu operatorlar regulyar akslantirish ekanligi isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** absolyut uzluksiz o'lchov; Puasson taqsimoti; chekli regulyar parchalanish; regulyar akslantirish.

## Quadratic stochastic operators generated regular partitions of a countable set of states

**Shamsiddinov Nasriddin, Anorov Obidjon**

In this paper, we construct quadratic stochastic operators generated by the finite regular partition of a countable set of states and prove that such operators are regular transformations.

**Keywords:** absolutely continuous measure; Puasson distribution; finite regular partition; regular transformation.

**Получено: 26/03/2023**

**Принято: 02/10/2023**

## Cite this article

Shamsiddinov N., Anorov O. Quadratic stochastic operators generated regular partitions of a countable set of states. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 4, pp. 160-165