Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №10, с. 22–35 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Д.К. ДУРДИЕВ, Ж.Ж. ЖУМАЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. Исследуется обратная задача определения ядра в одномерном интегро-дифференциальном уравнении диффузии с дробной производной по времени с начально-краевыми условиями и условиями переопределения. Сначала вводится эквивалентная этой задаче вспомогательная задача. Методом Фурье вспомогательная задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям. Затем, используя оценки функции Миттаг–Леффлера и метод последовательных приближений, находится оценка решения прямой задачи через норму неизвестного ядра, эта оценка будет использоваться при исследовании обратной задачи. Обратная задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Для решения этого уравнения применяется принцип сжимающего отображения. Доказаны результаты о локальном существовании и глобальной единственности.

Ключевые слова: дробная производная, обратная задача, интегральное уравнение, ряд Фурье, функция Миттаг–Леффлера, теорема о неподвижной точке.

УДК: 517.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-22-35

1. Введение и постановка задачи

В настоящее время уравнения с дробными и целыми производными привлекают много внимания среди исследователей, их широко используют при описании физических явлений, таких как звук, тепло, упругость, гравитация, диффузия, а также в гидроаэродинамике, электростатике, электродинамике, квантовая механике (см., например, [1]–[8] и библиографию в этих источниках).

Прямая и обратная задачи для дифференциального уравнения в частных производных и интегро-дифференциального уравнения целого порядка были достаточно изучены. В литературе чаще всего можно найти нелинейные прямую и обратную задачи с различного рода условиями переопределения (см., например, [9]–[14] и библиографию в этих источниках). В этих работах авторы изучают единственность решения и оценки его устойчивости, а также численные подходы к решению таких задач.

Что касается математической теории дифференциальных уравнений дробного порядка, нынешняя ситуация для случая обыкновенных дифференциальных уравнений отличается от таковой для случая дифференциальных уравнений в частных производных. Прямые задачи для уравнений дробной диффузии, такие как задачи с начальными или краевыми условиями, широко изучались в [15]–[19] (и в библиографии к этим источникам). В работе [20] рассматривается эволюция уравнения с регуляризованной дробной производной по

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 10.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

времени и равномерно эллиптический оператор с переменными коэффициентами, действующий на пространственных переменных. Построено и изучено фундаментальное решение задачи Коши. В работе [21] исследовано существование решения краевой задачи дробного порядка с производной Капуто.

Обратные задачи для дробных дифференциальных уравнений теплопроводности до сих пор мало изучены. В литературе чаще встречаются задачи определения линейного источника и обратные задачи к задаче Коши с различного рода условиями переопределения (см., например, [21]–[28] и библиографию в этих источниках). Основные результаты этих работ касаются теорем существования и единственности, а также оценок устойчивости решения задачи нахождения коэффициента реакции в дробном по времени уравнении диффузии. Линейное уравнение теплопроводности с дробной производной по времени и нелокальным краевым условием рассмотрено в [29]. В работе находится источник, не зависящий от пространственных переменных, и изучается распределение температуры для задачи с условием переопределения интегрального типа. Помимо существования и единственности решения, доказана его непрерывная зависимость от данных задачи. В статье [29] рассматривается начально-краевая задача для уравнения диффузии в ограниченной области с производной Капуто дробного порядка ($0 < a < 2, a \neq 1$). Рассмотрена обратная задача нахождения пространственного коэффициента и/или порядка дробной производной. Доказаны результаты, касающиеся существования и глобальной единственности. Доказательство осуществлено с помощью преобразования решения прямой задачи к решению волнового уравнения. Задача “реакция-диффузия” с неизвестной функцией нелинейного источника изучалась в [2]. Использованная при этом модель имела форму дробного по времени уравнения “реакция-диффузия”, статья обобщает некоторые известные результаты для обратных проблем, сформулированных для дифференциальных уравнений параболического типа в частных производных. Для такой задачи доказан результат о единственности и в одномерном случае предложен численный алгоритм с некоторыми теоретическими обоснованиями. Основную роль и для результата о единственности, и для численного алгоритма играет принцип максимума, применимость которого была недавно доказана для уравнения дробной диффузии. Чтобы показать эффективность предложенного метода, представлены результаты численных расчетов.

В настоящей работе изучается существование и единственность в обратной задаче определения зависящего от времени ядра в интегро-дифференциальном уравнении дробной по времени диффузии с начально-краевыми условиями и условиями переопределения.

Пусть $T > 0$, $\;l > 0$ — фиксированные числа и $D_{Tl} := \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Рассмотрим уравнение дробной по времени диффузии

$$\partial^{\alpha}_{0+,t} u - u_{xx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t-\tau) d\tau, \quad (x,t) \in D_{Tl}, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

краевыми условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, t \in [0,T], \tag{3}$$

где $\partial^{\alpha}_{0+,t}$ — дробная производная Капуто по времени порядка $0 < \alpha \leq 1$ (см. определение 2.1), $\varphi(x)$ — начальная температура.

Опишем обратную задачу следующим образом: найти функцию $k(t)$ из (1), если решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условию

$$u_x(x,t)|_{x=0} = h(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$h(t)$ — данная функция от $t \in [0, T]$.

Дополнительное условие (4) соответствует заданному потоку тепла в левом конце стержня длины l.

Определение 1. *Функция $u(x,t)$ называется классическим решением начально-краевой задачи* (1)–(3), *если*

1) *$u(x,t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по x при любом $t > 0$;*
2) *для любого $x \in (0, l)$ $u(x,t)$ является непрерывной по t на $[0, T]$, и ее дробный интеграл*

$$\left(I_{0+,t}^{1-\alpha} u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

является непрерывно дифференцируемым по t при $t > 0$;

3) *$u(x,t)$ удовлетворяет* (1)–(3).

Функции φ и h удовлетворяют следующим предположениям:

(A1) $\varphi(x) \in C_\gamma^4[0,l]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$,
(A2) $h(t) \in C_\gamma^1[0,T]$ *и* $\varphi'(0) = h(0) > 0$.

В следующем разделе изложены некоторые полезные нам определения и результаты из дробного анализа (см. [1], с. 96–99), использующиеся в дальнейшем.

2. Предварительные сведения

Пусть $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ — конечный интервал и $\gamma \in \mathbb{C}$ $(0 \le \Re(\gamma) < 1)$. Рассмотрим взвешенное пространство $C_\gamma[a,b]$ функций f, заданных на $(a,b]$ и таких, что $(x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b]$, причем

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x-a)^\gamma f(x)\|_C, \quad C_0[a,b] = C[a,b].$$

Для $n \in N$ обозначим через $C_\gamma^n[a,b]$ банахово пространство функций $f(x)$, являющихся непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$ вплоть до порядка $n-1$ и имеющих производную $f^{(n)}(x)$ порядка n на $(a,b]$, причем $f^{(n)}(x) \in C_\gamma[a,b]$:

$$C_\gamma^n[a,b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma} \right\}, \ \ C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma[a,b].$$

Определение 2. Дробная производная Капуто по времени порядка $0 < \alpha < 1$ от интегрируемой функции u задается формулой

$$\partial_{0+,t}^\alpha u(x,t) = I_{0+,t}^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} u(x,\tau) d\tau,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 3. Дробная производная Римана–Лиувилля по времени порядка $0 < \alpha < 1$ от интегрируемой функции u задается формулой

$$D_{0+,t}^\alpha u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0+,t}^{1-\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(x,\tau) d\tau,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера. Двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ задается следующим рядом:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

где $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ и $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\alpha)$ — вещественная часть комплексного числа α. Функция Миттаг–Леффлера изучалась многими авторами, для нее были предложены различные обобщения и приложения.

Доказательство следующих предложений следуют из определения дробной производной Капуто и диференцирования двухпараметрической функции Миттаг–Леффлера (см. [1], с. 40–45).

Предложение 1. *Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Предположим, что κ таково, что $\pi\alpha/2 < \kappa < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Тогда существует константа $C = C(\alpha, \beta, \kappa) > 0$ такая, что*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad \kappa \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

Предложение 2. *Для чисел $0 < \alpha < 1$ и $t > 0$ имеем $0 < E_{\alpha,1}(-t) < 1$. Более того, $E_{\alpha,1}(-t)$ является вполне монотонной, т. е.*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,1}(-t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Предложение 3. *Для чисел $0 < \alpha < 1$ и $\eta > 0$ имеем $0 \leq E_{\alpha,\alpha}(-\eta) \leq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Более того, $E_{\alpha,\alpha}(-\eta)$ является монотонно убывающей функцией при $\eta > 0$.*

Замечание 1 (см. [1], с. 83)**.** Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$ и $\alpha + \beta < \dfrac{1}{p}$. Если $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$, то выполняется тождество

$$\left(I^{\alpha}_{0+,x} I^{\beta}_{0+,x} f\right)(x) = \left(I^{\alpha+\beta}_{0+,x} f\right)(x).$$

Замечание 2 (см. [1], с. 71)**.** Пусть $\alpha \geq 0$ и $\beta \in \mathbb{C}(\Re(\beta) > 0)$, тогда

$$\left(I^{\alpha}_{0+} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\beta+\alpha-1}.$$

Теорема 1 (см. [1], с. 135–140)**.** Решение $y(t) \in L[0, T]$ линейной неоднородной дробной задачи

$$D^{\alpha}_{0+} y(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad \lambda > 0,$$

$$I^{1-\alpha}_{0+,t} y(0+) = c,$$

где $0 < \alpha < 1$, $f \in L[0, T]$, представимо интегральным выражением

$$y(t) = ct^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda t^{\alpha}] + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda (t-\tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau.$$

Следующий раздел содержит сведение обратной задачи к эквивалентной.

3. Вспомогательная задача

Пусть $u(x,t), k(t)$ — классическое решение задачи (1)–(4) и φ, h — достаточно гладкие функции. Следующее утверждение содержит вспомогательную эквивалентную задачу.

Лемма 1. *Задача* (1)–(4) *эквивалентна вспомогательной задаче нахождения функций* $\vartheta(x;t), k(t)$ *из следующих уравнений:*

$$D^{\alpha}_{0+,t}\vartheta - \vartheta_{xx} = k(t)\varphi''(x) + \int_0^t k(\tau)\vartheta(x,t-\tau), \quad (x,t)\in D_{Tl}, \tag{5}$$

$$I^{1-\alpha}_{0+,t}\vartheta(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi^{(IV)}(x), \quad x\in[0,l], \tag{6}$$

$$\vartheta(x,t)\Big|_{x=0} = \vartheta(x,t)\Big|_{x=l} = 0, t\in[0,T], \tag{7}$$

$$\vartheta_x(x,t)\Big|_{x=0} = D^{\alpha}_{0+,t}h'(t) - k(t)\varphi'(0) - \int_0^t k(\tau)h'(t-\tau)d\tau. \tag{8}$$

где $\vartheta(x,t) := u_{txx}(x,t)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\vartheta^{(1)}(x,t) = u_t(x,t)$ и продифференцируем равенства (1), (3) и (4) по t. Для этого используем равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\partial^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\vartheta^{(1)}(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = D^{\alpha}_{0+,t}\vartheta^1(x,t).$$

В итоге получаем задачу нахождения функций $\vartheta^{(1)}(x,t), k(t)$ из следующих уравнений:

$$D^{\alpha}_{0+,t}\vartheta^{(1)} - \vartheta^{(1)}_{xx} = k(t)\varphi(x) + \int_0^t k(\tau)\vartheta^{(1)}(x,t-\tau), \quad (x,t)\in D_{Tl}, \tag{9}$$

$$I^{1-\alpha}_{0+,t}\vartheta^{(1)}(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi''(x), \quad x\in[0,l], \tag{10}$$

$$\vartheta^{(1)}(x,t)\Big|_{x=0} = \vartheta^{(1)}(x,t)\Big|_{x=l} = 0, \tag{11}$$

$$\vartheta^{(1)}_x(x,t)\Big|_{x=0} = h'(t). \tag{12}$$

Здесь начальное условие (10) получено из равенства (1) при $t=0$.

Обозначим теперь через $\vartheta(x,t)$ функцию $\vartheta^{(1)}_{xx}(x,t)$. Дифференцируя (10) и (11) дважды по x, получаем уравнения (5) и (6). Учитывая (11) и подставляя в (9) $x=0$ и $x=l$, после некоторых вычислений получаем краевое условие (7). Чтобы вывести дополнительное условие на функцию $\vartheta(x,t)$, учитывая условие (12), продифференцируем уравнение (9) единожды по x и, положив $x=0$, получаем (8). Таким образом, задача (1)–(4) сведена к задаче (5)–(8). Несложно показать, что эквивалентность верна и в обратную сторону. □

Для начала покажем единственность решения прямой задачи.

4. Исследование задачи (5)–(7)

Будем искать решение задачи (5)–(7) в виде

$$\vartheta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(t)\sin(\lambda_n x),\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{l},\tag{13}$$

где

$$\vartheta_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \vartheta(x,t)\sin(\lambda_n x)dx.$$

В силу равенства (13) из (5) имеем

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}\vartheta_n\right)(t)+\lambda_n^2\vartheta_n(t)=F_n(t;\vartheta,k,\varphi),\quad n=1,2,\ldots,\tag{14}$$

где

$$F_n(t;\vartheta,k,\varphi):=k(t)\varphi_n+\int_0^t k(\tau)\vartheta_n(t-\tau)d\tau,$$

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)dx.$$

Начальное условие (6) дает нам

$$I^{1-\alpha}_{0+,t}\vartheta_n(0)=\int\limits_0^l \vartheta(x,0)\sin(\lambda_n x)dx=-\lambda_n^2\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)dx=-\lambda_n^2\varphi_n.\tag{15}$$

Согласно теореме 1 начально-краевая задача (14), (15) эквивалентна в пространстве $C[0,T]$ интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\vartheta_n(t)=-\lambda_n^2\varphi_n t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2t^{\alpha})+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^{\alpha}\right)k(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^{\alpha}\right)\int_0^{\tau}k(\alpha)\vartheta_n(\tau-\alpha)d\alpha d\tau.\tag{16}$$

Докажем существование решения интегрального уравнения (16) пространстве $C_\gamma[0,T]$, используя метод последовательных приближений. Обозначим сумму первых двух слагаемых справа в (16) через $F_n(t)$. Для данного уравнения рассмотрим в области $[0,T]$ последовательность функций

$$t^{\gamma}(\vartheta_n)_m(t)=$$
$$=t^{\gamma}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^{\alpha}\right)\int_0^{\tau}k(\alpha)(\vartheta_n)_{m-1}(\tau-\alpha)d\alpha d\tau,\quad m=1,2,\ldots,$$

где $0<\gamma<1,\ \gamma+\alpha>1,\ (\vartheta_n)_0(t)=F_n(t)$ на $[0,T]$.

Введем обозначение: $\|k\|_\gamma=\max_{t\in[0,T]}|t^{\gamma}k(t)|$. Используя формулу (16), определение 3 и предложение 3, оценим $t^{\gamma}\vartheta_n(t)$ в области $[0,T]$:

$$|t^{\gamma}(\vartheta_n)_0(t)|=|t^{\gamma}F_n(t)|\le\lambda_n^2|\varphi_n|t^{\alpha+\gamma-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2t^{\alpha})+$$
$$+t^{\gamma}\left|\varphi_n\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{-\gamma}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^{\alpha}\right)\tau^{\gamma}k(\tau)d\tau\right|\le$$
$$\le\frac{\lambda_n^2|\varphi_n|t^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}+t^{\gamma}|\varphi_n|\|k\|_\gamma I^{\alpha}_{0+}(t^{-\gamma})=$$

$$= \frac{\lambda_n^2|\varphi_n|t^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{\alpha}|\varphi_n|\|k\|_\gamma \le C_0\lambda_n^2|\varphi_n| = F_n^0,$$

где константа C_0 зависит от $\|k\|_\gamma, \dfrac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}, \Gamma(\alpha), T$; $I^{\alpha}_{0+,t}(t^{-\gamma})$ — дробный интеграл весовой функции $t^{-\gamma}$.

В соответствии с замечанием 1 и замечанием 2 получаем оценки

$$|t^\gamma(\vartheta_n)_1(t)| \le t^\gamma \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right) \times$$

$$\times \int_0^\tau \beta^{-\gamma}(\tau-\beta)^{-\gamma}\Big|\beta^\gamma k(\beta)\Big|\Big|(\tau-\beta)^\gamma(\vartheta_n)_0(\tau-\beta)\Big| d\beta d\tau \le$$

$$\le t^\gamma \|k\|_\gamma F_n^0 \Gamma(1-\gamma) I^{\alpha}_{0+,t}(I^{1-\gamma}_{0+,t}(t^{-\gamma})) = \|k\|_\gamma F_n^0 \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma}.$$

Аналогично

$$|t^\gamma(\vartheta_n)_2(t)| \le t^\gamma \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right) \times$$

$$\times \int_0^\tau \beta^{-\gamma}(\tau-\beta)^{-\gamma}\Big|\beta^\gamma k(\beta)\Big|\Big|(\tau-\beta)^\gamma(\vartheta_n)_1(\tau-\beta)\Big| d\beta d\tau \le$$

$$\le t^\gamma \|k\|^2_\gamma F_n^0 \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} I^{2(1+\alpha-\gamma)}_{0+,t}(t^{-\gamma}) = \|k\|^2_\gamma F_n^0 \frac{\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(3+2\alpha-3\gamma)} t^{2(1+\alpha-\gamma)}.$$

Для произвольного $m = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$|t^\gamma(\vartheta_n)_m(t)| \le t^\gamma \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right) \times$$

$$\times \int_0^\tau \beta^{-\gamma}(\tau-\beta)^{-\gamma}\Big|\beta^\gamma k(\beta)\Big|\Big|(\tau-\beta)^\gamma(\vartheta_n)_{m-1}(\tau-\beta)\Big| d\beta d\tau \le$$

$$\le \Gamma(1-\gamma) F_n^0 \frac{(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) t^{1+\alpha-\gamma})^m}{\Gamma((1+\alpha-\gamma)m+1-\gamma)}.$$

Из последних оценок следует, что ряд

$$t^\gamma \vartheta_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} t^\gamma(\vartheta_n)_m(t)$$

сходится равномерно на $[0, T]$, поскольку он мажорируется на $[0, T]$ сходящимся числовым рядом

$$\Gamma(1-\gamma) F_n^0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) t^{1+\alpha-\gamma})^m}{\Gamma((1+\alpha-\gamma)m+1-\gamma)}.$$

Значит, верна следующая оценка для решения интегрального уравнения (16):

$$|t^\gamma \vartheta_n(t)| \le \Gamma(1-\gamma) F_n^0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) t^{1+\alpha-\gamma})^m}{\Gamma((1+\alpha-\gamma)m+1-\gamma)} =$$

$$= \Gamma(1-\gamma) F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}) \le C_1 \lambda_n^2 |\varphi_n|, \tag{17}$$

$$C_1 = \Gamma(1-\gamma) C_0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}),$$

где $E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\cdot)$ — функция Миттаг–Леффлера от неотрицательного вещественного аргумента.

Далее, используя равенство (14), получаем оценку для $D^{\alpha}_{0+}\vartheta_n(t)$:

$$|t^{\gamma}D^{\alpha}_{0+}\vartheta_n(t)| \leq \left(\lambda_n^2 + \frac{\|k\|_{\gamma}\Gamma^2(1-\gamma)T^{1-\gamma}}{\Gamma(2-2\gamma)}\right)\times$$

$$\times\Gamma(1-\gamma)F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_{\gamma}\Gamma(1-\gamma)T^{1+\alpha-\gamma}) + |\varphi_n|\|k\|_{\gamma} \leq C_2\lambda_n^2|\varphi_n|,$$

где константа C_2 зависит от C_0, C_1, γ, T.

Таким образом, нами доказана

Лемма 2. Для любого $t \in [0,T]$ и для достаточно больших n выполняются оценки

$$|t^{\gamma}\vartheta_n(t)| \leq C_1 n^2|\varphi_n|,$$

$$|t^{\gamma}D^{\alpha}_{0+}\vartheta_n(t)| \leq C_2 n^4|\varphi_n|,$$

где C_i — положительные константы.

Дифференцируя почленно (13), можно формально получить ряд

$$t^{\gamma}D^{\alpha}_{0+,t}\vartheta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{\gamma}D^{\alpha}_{0+}\vartheta_n(t)\sin(\lambda_n x), \tag{18}$$

$$t^{\gamma}\vartheta_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{\gamma}\lambda_n^2\vartheta_n(t)\sin(\lambda_n x). \tag{19}$$

Ввиду леммы 2 функциональные ряды (13), (18) и (19) сходятся для любых $(x,t) \in D_T$, если сходится ряд

$$\overline{C}_3\sum_{n=1}^{\infty} n^4|\varphi_n|.$$

Справедлива вспомогательная

Лемма 3. *Если условия* (A1) *выполнены, то имеем равенство*

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^5}\varphi_n^{(5)}, \tag{20}$$

где

$$\varphi_n^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi^{(5)}(x)\cos(\lambda_n x)dx,$$

со следующей оценкой:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{(5)}\right|^2 \leq \left\|\varphi_n^{(5)}\right\|_{L_2[0,l]}. \tag{21}$$

Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3, то в силу представлений (20) и (21) ряды (13), (18) и (19) сходятся равномерно в области D_{Tl}, следовательно, функция $\vartheta(x,t)$ удовлетворяет соотношениям (5)–(7).

Используя вышеприведенные результаты, получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $k(t) \in C_{\gamma}[0,T]$ *и выполнены условия* (A1), *тогда существует единственное решение прямой задачи* (5)–(7) *такое, что* $\vartheta(x,t) \in C^{2,\alpha}_{\gamma}(D_T)$.

Получим оценку нормы разности решения исходного интегрального уравнения (16) и решения этого уравнения с возмущенными функциями $\widetilde{k}, \widetilde{\varphi}_n$. Пусть $\widetilde{\vartheta}_n(t)$ — решение интегрального уравнения (16), соответствующее функциям $\widetilde{k}, \widetilde{\varphi}_n$, т. е.

$$\widetilde{\vartheta}_n(t) = -\lambda_n^2 t^{\alpha-1}\widetilde{\varphi}_n E_{\alpha,\alpha}\big(-\lambda_n^2 t^\alpha\big) + \widetilde{\varphi}_n \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\widetilde{k}(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\int_0^\tau \widetilde{k}(\alpha)\widetilde{\vartheta}_n(\tau-\alpha)d\alpha d\tau. \quad (22)$$

Составляя разность $\vartheta - \widetilde{\vartheta}$ с помощью уравнений (16), (22) и вводя обозначения $\vartheta - \widetilde{\vartheta} = \overline{\vartheta}_n$, $k - \widetilde{k} = \overline{k}$, $\varphi_n - \widetilde{\varphi}_n = \overline{\varphi}_n$, получаем интегральное уравнение

$$\overline{\vartheta}_n(t) = -\lambda_n^2 t^{\alpha-1}\overline{\varphi}_n E_{\alpha,\alpha}\big(-\lambda_n^2 t^\alpha\big) + \varphi_n \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\overline{k}(\tau)d\tau +$$
$$+\overline{\varphi}_n \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\widetilde{k}(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\int_0^\tau \overline{k}(\beta)\vartheta_n(\tau-\beta)d\beta d\tau +$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha\right)\int_0^\tau \widetilde{k}(\beta)\overline{\vartheta}_n(\tau-\beta)d\beta d\tau,$$

из которого получается линейное интегральное неравенство

$$|t^\gamma \overline{\vartheta}_n(t)| \le \frac{\lambda_n^2|\overline{\varphi}_n| t^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha}\Big(|\varphi_n|\|\overline{k}\|_\gamma + |\overline{\varphi}_n|\|\widetilde{k}\|_\gamma\Big) +$$
$$+\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma}\|\overline{k}\|_\gamma F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}\big) +$$
$$+t^\gamma \|\widetilde{k}\|_\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau (\tau-\beta)^{-\gamma}\beta^{-\gamma}|(\tau-\beta)^\gamma \overline{\vartheta}_n(\tau-\beta)|d\beta d\tau. \quad (23)$$

Применим метод последовательных приближений к неравенству (23) со следующей схемой:

$$|t^\gamma (\overline{\vartheta}_n)_0(t)| \le \frac{\lambda_n^2|\overline{\varphi}_n| t^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha}\Big(|\varphi_n|\|\overline{k}\|_\gamma + |\overline{\varphi}_n|\|\widetilde{k}\|_\gamma\Big) +$$
$$+\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma}\|\overline{k}\|_\gamma F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}\big) \le$$
$$\le \overline{C}_0(|\overline{\varphi}_n| + \|\overline{k}\|_\gamma),$$

где

$$\overline{C}_0 = \max\left\{\frac{\lambda_n^2 t^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha}\|\widetilde{k}\|_\gamma, \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha}|\varphi_n| + \right.$$
$$\left. +\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma} F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}\big)\right\},$$

$$|t^\gamma (\overline{\vartheta}_n)_m(t)| \le t^\gamma \|\widetilde{k}\|_\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau (\tau-\beta)^{-\gamma}\beta^{-\gamma}|(\tau-\beta)^\gamma (\overline{\vartheta}_n(\tau-\beta))_{m-1}|d\beta d\tau.$$

Получаем оценку

$$|t^\gamma \overline{\vartheta}_n(t)| \le \Gamma(1-\gamma) E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|\widetilde{k}\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma})\overline{C}_0(|\overline{\varphi}_n| + \|\overline{k}\|_\gamma). \quad (24)$$

Действительно, выражение (24) является оценкой устойчивости для решения задачи (5)–(7). Единственность этого решения следует из (24).

5. Исследование обратной задачи (5)–(8)

В этом разделе изучается обратная задача в виде задачи нахождения функции $k(t)$ из соотношений (5)–(8), используя принцип сжимающего отображения.

Дифференцируя (13) по x, получаем

$$\vartheta_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_n(t) \cos(\lambda_n x). \tag{25}$$

Полагая $x = 0$ в (25) и используя дополнительное условие (8), после некоторых упрощений получаем следующее интегральное уравнение

$$k(t) = k_0(t) - \frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_n(t;k) - \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^t k(\tau) h'(t-\tau)d\tau, \tag{26}$$

где $k_0(t) = \dfrac{D_{0+}^{\alpha} h'(t)}{\varphi'(0)}$, а запись $\vartheta_n(t;k)$ означает, что решение интегрального уравнения (16) зависит от $k(t)$.

Введем оператор B, определяя его как правую часть (26):

$$B[k](t) = k_0(t) - \frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_n(t;k) - \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^t k(\tau) h'(t-\tau)d\tau.$$

Тогда уравнение (26) запишется в более удобном виде

$$k(t) = B[k](t). \tag{27}$$

Пусть $k_{00} := \max_{t\in[0,T]} |k_0(t)|$. Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$\Phi^T(k_0,\rho) := \big\{k(t) : k(t) \in C_\gamma[0,T], \|k - k_0\|_{C_\gamma[0,T]} \le \rho\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A2). *Тогда существует число* $T^* \in (0,T)$ *такое, что существует единственное решение* $k(t) \in C_\gamma[0,T^*]$ *обратной задачи* (5)–(8).

Доказательство. Сначала покажем, что для достаточно малого $T > 0$ оператор B отображает шар $\Phi^T(k_0,\rho)$ в себя. Действительно, для любой непрерывной функции $k(t)$ функция $B[k](t)$, заданная формулой (27), является непрерывной. Более того, согласно оценке (17) оценим норму разности следующим образом:

$$\|t^\gamma(B[k](t) - k_0(t))\| \le \frac{1}{\varphi'(0)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^\gamma \vartheta_n(t;k) \right| + \frac{t^\gamma}{\varphi'(0)} \left| \int_0^t k(\tau) h'(t-\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\varphi'(0)} E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F_n^0 + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)\|k\|_\gamma \|h'\|_\gamma}{\varphi'(0)\Gamma(1-2\gamma)} T^{1-\gamma}.$$

Ввиду лемм 2 и 3 последний ряд сходится. Заметим, что функция в правой части неравенства является монотонно возрастающей по T, а факт принадлежности функции $k(t)$ шару $\Phi^T(k_0,\rho)$ влечет неравенство

$$\|k\| \le \rho + \|k_0\|. \tag{28}$$

Таким образом, мы только усилим неравенство, если заменим $\|k\|_\gamma$ в этом неравенстве выражением $\rho + \|k_0\|$. Выполнив эти замены, получаем

$$\|t^\gamma(B[k](t) - k_0(t))\| \leq \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\varphi'(0)} E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big((\rho + \|k_0\|)\Gamma(1-\gamma)T^{1+\alpha-\gamma}\big) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F_n^0 +$$
$$+ \frac{\Gamma^2(1-\gamma)(\rho + \|k_0\|)\|h'\|_\gamma}{\varphi'(0)\Gamma(1-2\gamma)} T^{1-\gamma}.$$

Пусть T_1 — положительный корень уравнения

$$m_1(T) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\varphi'(0)} E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big((\rho + \|k_0\|)\Gamma(1-\gamma)T^{1+\alpha-\gamma}\big) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F_n^0 +$$
$$+ \frac{\Gamma^2(1-\gamma)(\rho + \|k_0\|)\|h'\|_\gamma}{\varphi'(0)\Gamma(1-2\gamma)} T^{1-\gamma} = \rho.$$

Тогда для $T \in [0, T_1]$ имеем $B[k](t) \in \Phi^T(k_0, \rho)$.

Теперь рассмотрим две функции: $k(t)$ и $\widetilde{k}(t)$, принадлежащие шару $\Phi^T(k_0, \rho)$, и оценим расстояние между их образами $B[k](t)$ и $B[\widetilde{k}](t)$ в пространстве $C[0, T]$. Функция $\widetilde{\vartheta}_n(t)$, соответствующая $\widetilde{k}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (22) с функцией $\varphi_n = \widetilde{\varphi}_n$. Составляя разность $B[k](t) - B[\widetilde{k}](t)$ с помощью уравнений (16), (22) и затем оценивая ее норму, получаем

$$\|t^\gamma(B[k](t) - B[\widetilde{k}](t))\| \leq \frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |t^\gamma \overline{\vartheta}_n(t; k)| + \frac{t^\gamma}{\varphi'(0)} \left| \int_0^t \overline{k}(\tau) h'(t-\tau) d\tau \right|.$$

Далее в силу неравенства (17) и оценки (24) с $\varphi_n = \widetilde{\varphi}_n$, имеем

$$\|t^\gamma(B[k](t) - B[\widetilde{k}](t))\| \leq \frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\{ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha} |\varphi_n| \|\overline{k}\|_\gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma} \|\overline{k}\|_\gamma F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}) \right\} \times$$
$$\times \Gamma(1-\gamma) E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\left(\|\widetilde{k}\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}\right) + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\varphi'(0)\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1-\gamma} \|h'\|_\gamma \|\overline{k}\|_\gamma. \tag{29}$$

Функции $k(t)$ и $\widetilde{k}(t)$ принадлежат шару $\Phi^T(k_0, \rho)$, поэтому для каждой из этих функций выполняется неравенство (28). Заметим, что функция в правой части неравенства (29) при множителе $\|\overline{k}\|_\gamma$ монотонно возрастает по $\|k\|_\gamma, \|\widetilde{k}\|_\gamma$ и T. Следовательно, заменив $\|k\|_\gamma$ и $\|\widetilde{k}\|_\gamma$ в неравенстве (29) величиной $\rho + \|k\|_\gamma$, мы только усилим неравенство. Таким образом, имеем

$$\|t^\gamma(B[k](t) - B[\widetilde{k}](t))\| \leq \left[\frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\{ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha} |\varphi_n| + \right. \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma} F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}(\|k\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}) \right\} \times$$
$$\left. \times \Gamma(1-\gamma) E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big(\|\widetilde{k}\|_\gamma \Gamma(1-\gamma) T^{1+\alpha-\gamma}\big) + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\varphi'(0)\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1-\gamma} \|h'\|_\gamma \right] \|\overline{k}\|_\gamma.$$

Пусть T_2 — положительный корень уравнения

$$m_2(T) = \frac{1}{\varphi'(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Bigg\{ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} t^{1+\alpha} |\varphi_n| +$$

$$+ \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1+\alpha-\gamma} F_n^0 E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}\big((\rho + \|k\|_\gamma)\Gamma(1-\gamma)T^{1+\alpha-\gamma}\big) \Bigg\} \times$$

$$\times \Gamma(1-\gamma) E_{1+\alpha-\gamma,1-\gamma}((\rho + \|k\|_\gamma)\Gamma(1-\gamma)T^{1+\alpha-\gamma}) + \frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\varphi'(0)\Gamma(2+\alpha-2\gamma)} t^{1-\gamma} \|h'\|_\gamma = 1.$$

Тогда для $T \in [0, T_2)$ получаем, что расстояние между функциями $B[k](t)$ и $B[\widetilde{k}](t)$ в функциональном пространстве $C_\gamma[0,T]$ не больше, чем расстояние между функциями $\|k\|_\gamma$ и $\|\widetilde{k}\|_\gamma$, умноженное на $m_2(T) < 1$. Следовательно, если взять $T^* < \min(T_1, T_2)$, то оператор B является сжимающим отображением в шаре $\Phi^T(k_0, \rho)$. По теореме Банаха оператор B обладает единственной неподвижной точкой в шаре $\Phi^T(k_0, \rho)$, т. е. существует единственное решение уравнения (27). $\square$

По найденным функциям $\vartheta(x,t), k(t)$ можно найти функцию $u(x,t)$ из равенства $\vartheta(x,t) = u_{txx}$, а именно:

$$u(x,t) = \int_0^x (x-\xi) \int_0^t \vartheta(\xi,\tau) d\tau d\xi + \varphi(x) - x\varphi'(0) + xh(t).$$

Заключение

В данной работе исследована разрешимость нелинейной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения диффузии с начально-краевыми условиями и условиями переопределения. Сначала была представлена вспомогательная задача, эквивалентная исходной. Изучена разрешимость прямой задачи. Спектральным методом доказаны существование и единственность решения прямой задачи. Была рассмотрена обратная задача нахождения функции $k(t)$, входящей в уравнение (1), с дополнительным условием (4). Получены условия на данные функции, при которых обратная задача имеет единственное решение для достаточно малого интервала.

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Elsevier, Amsterdam, 2006).

[2] Freed A., Diethelm K., Luchko Yu. *Fractional-order viscoelasticity (FOV): Constitutive Development Using the Fractional Calculus* (NASA's Glenn Research Center, Ohio, 2002).

[3] Gorenflo R., Mainardi F. *Random walk models for space-fractional diffusion processes*, Fract. Calc. Appl. Anal. (1), 167–191 (1998).

[4] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics* (World Scientific, Singapore, 2000).

[5] Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M. *Fractional diffusion in inhomogeneous media*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (42), 679–684 (2005).

[6] Mainardi F., Tomirotti M. *Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions*, Ann. Geofis. **40** (5), 1311–1328 (1997).

[7] Metzler R., Klafter J. *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Phys. Rep. **339** (1), 1–77 (2000).

[8] Podlubny I. *Fractional Differential Equations* (Academic Press, San Diego, 1999).

[9] Durdiev D.K., Nuriddinov Z.Z. *Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation*, Журн. Сиб. фед. ун-та. Сер. Матем. и физ. **14** (1), 117–127 (2021).

[10] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation*, Meth. Funct. Anal. and Topology **25** (3), 219–226 (2019).
[11] Дурдиев У.Д. *Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки*, Диф. уравнения **58** (1), 37–44 (2022).
[12] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor*, Math. Meth. Appl. Sci. **45** (14), 8374–8388 (2022).
[13] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *One-Dimensional Inverse Problems of Finding the Kernel of Integro-differential Heat Equation in a Bounded Domain*, Ukrain. Math. J. **73** (3), 1723–1740 (2022).
[14] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Problem of Determining the Thermal Memory of a Conducting Medium*, Diff. Equat. **56** (6), 785–796 (2020).
[15] Luchko Y. *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation*, Comput. Math. Appl. **59** (5), 1766–1772 (2010).
[16] Sakamoto K., Yamamoto M. *Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems*, J. Math. Anal. Appl. **382** (1), 426–447 (2011).
[17] Gorenflo R., Luchko Y.F., Zabrejko P.P. *On solvability of linear fractional differential equations in Banach spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **2**, 163–176 (1999).
[18] Luchko Y. *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation*, J. Math. Anal. and Appl. **351** (1), 218–223 (2009).
[19] Kochubei A.N. *Diffusion of fractional order*, Differ. Uravn. **26** (4), 660–670 (1990).
[20] Eidelman S.D., Kochubei A.N. *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, J. Diff. Equat. **199** (2), 211–255 (2004).
[21] Zhang S. *Existence of Solution for a Boundary Value Problem of Fractional Order*, Acta Math. Sci. **26** (2), 220–228 (2006).
[22] Xiong X., Zhou Q., Hon Y.C. *An inverse problem for fractional diffusion equation in 2-dimensional case: stability analysis and regularization*, J. Math. Anal. and Appl. **393** (1), 185–199 (2012).
[23] Xiong X., Guo H., Liu X. *An inverse problem for a fractional diffusion equation*, J. Comput. Appl. Math. **236** (17), 4474–4484 (2012).
[24] Бондаренко А.Н., Бугуева Т.В., Иващенко Д.С. *Метод интегральных преобразований в обратных задачах аномальной диффузии*, Изв. вузов. Матем. (3), 3–14 (2017).
[25] Durdiev D.K., Rahmonov A.A., Bozorov Z.R. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **44** (13), 10753–10761 (2021).
[26] Subhonova Z.A., Rahmonov A.A. *Problem of Determining the Time Dependent Coefficient in the Fractional Diffusion-Wave Equation*, Lobachevskii J. Math. (15), 3747–3760 (2021).
[27] Durdiev D.K. *Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation*, Eurasian J. Math. and Computer Appl. **9** (1), 44–54 (2021).
[28] Durdiev U.D. *Problem of determining the reaction coefficient in a fractional diffusion equation*, Diff. Equat. **57** (9), 1195–1204 (2021).
[29] Miller L., Yamamoto M. *Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation*, Inverse Probl. **29** (7), 075013 (2013).

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

`e-mail:` durdiev65@mail.ru

Жонибек Жамолович Жумаев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

`e-mail:` jonibekjj@mail.ru

D.K. Durdiev and J.J. Jumaev

Inverse problem of determining the kernel of integro-differential fractional diffusion equation in bounded domain

Аннотация. In this paper, an inverse problem of determining a kernel in a one-dimensional integro-differential time-fractional diffusion equation with initial-boundary and overdetermination conditions is investigated. An auxiliary problem equivalent to the problem is introduced first. By Fourier method this auxilary problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using estimates of the Mittag-Leffler function and successive aproximation method, an estimate for the solution of the direct problem is obtained in terms of the norm of the unknown kernel which will be used in study of inverse problem. The inverse problem is reduced to the equivalent integral equation. For solving this equation the contracted mapping principle is applied. The local existence and global uniqueness results are proven.

Ключевые слова: fractional derivative, inverse problem, integral equation, Fourier series, Mittag–Leffler function, fixed point theorem.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbal str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: durdiev65@mail.ru

Jonibek Jamolovich Jumaev

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbal str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: jonibekjj@mail.ru