ISSN 2181-6833
9 772181 683301

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
1930

ISSN 2181-6833

# PEDAGOGIK MAHORAT

10
2023

## LOGARIFMIK TENGSIZLIKLARNI YECHISHNING NOSTANDART USULLARI HAQIDA

***Xudayarov Sa'nat Samadovich,***
*Buxoro davlat universiteti Matematik analiz kafedrasi katta o'qituvchisi,*
*fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)*
*https://orcid.org/0000-0002-6386-6958*
*s.s.xudayarov@buxdu.uz*

*Ushbu maqolada logarifmik tengsizliklarni yechishda o'quvchilar kamida 4-5 ta murakkab tengsizliklarni yechishlariga to'g'ri keladi. Ushbu maqolada murakkab tengsizliklarga teng kuchli tengsizliklar bilan almashtirib qulay usul topilgan. Bu topilgan yechish usuli hisob-kitobni kamaytiradi.*

***Kalit so'zlar:*** *xarakteristika, mantissa, logarifmlash, potensirlash, logarifmik tengsizliklarni yechishda teng kuchli tengsizliklardan foydalanish, tengsizliklarni ratsionallash.*

## О НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

*В этой статье при решении логарифмических неравенств учащиеся должны решить не менее 4-5 сложных неравенств. В данной работе найден удобный метод замены комплексных неравенств равносильными неравенствами. Это найденное решение сокращает расчёт.*

***Ключевые слова:*** *характеристика, мантисса, логарифмизация, возведение в степень, использование неравенства равных степеней при решении логарифмических неравенств, рационализация неравенств.*

## ABOUT NON-STANDARD METHODS FOR SOLVING LOGARITHMIC INEQUALITIES

*In this article, when solving logarithmic inequalities, students must solve at least 4-5 complex inequalities. In this paper, a convenient method is found for replacing complex inequalities with equivalent inequalities. This solution found shortens the calculation.*

***Key words:*** *characteristic, mantissa, logarithmization, exponentiation, use of inequality of equal powers when solving logarithmic inequalities, rationalization of inequalities.*

**Kirish.**

**Logarifm.** Logarifmlar shotlandiyalik matematik J.Neper (1550-1617) va undan bexabar Shvetsariyalik mexanik hamda matematik I.Byurgi (1552-1632) tomonidan kiritilgan. Byurgi logarifmlarni birinchi bo'lib topgan, ammo o'z jadvallarini kechikib e'lon qilgan (1620-y). Neperning “**Logarifmlar ajoyib jadvalining tafsiloti”** nomli ishi esa birinchi bo'lib 1614-yil e'lon qilingan. Neper logarifmlar jadvalining asosi irratsional bo'lib,unga $(1+\frac{1}{n})^n$

Sonlari n cheksiz o'sganda yaqinlashadi.Bu son Neper soni deyiladi va L.Eyler zamonidan boshlab *e* harfi bilan begilanadi.

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Neper *e* sonining o'zini emas ,uning juda yaxshi yaqinlashmasini $(1+\frac{1}{10^7})10^7$ sonini asos qilib olib, jadval tuzilgan.*e* asosli logarifmlar natural logarifmlar deb ataladi va *ln* kabi belgilanadi.

O'nli logarifmlarning birinchi jadvalini mohir kashfiyotchi va tengi yo'q hisob ustasi bo'lgan ingliz matematigi G.Briggs (1561-1630) tuzgan. Uning **“logarifmik arifmetika”** sida 1 dan 20.000 gacha va 90.000 dan 100.000 gacha sonlarning o'n to'rt xonali jadvali bor edi.1628-yil gollandiyalik matematik A.Flakk (1600-1667) 1 dan 100.000 gacha barcha sonlarning o'n raqamli mantissalaridan tuzilgan jadvalini nashr etib, Briggs jadvalidagi kamchilikni to'ldirdi. Bu jadvallar dunyoning ko'pgina mamlakatlarida nashr qilina boshladi. Rus tilida logarifmik jadvallar birinchi marta 1703-yil nashr qilindi.

Darajaga ko'tarish amaliga teskari amalni qarab chiqamiz. $a^x=b$ tenglamada $x$ noma'lum bo'lib, uni topish ko'rsatkichni topish amali deyiladi.

**Asosiy qism.**

**Ta'rif:** [1] b sonning a asos bo'yicha logarifmi deb b sonni hosil qilish uchun **a** sonni ko'tarish kerak bo'ladigan daraja ko'rsatkichiga aytiladi. Quyidagi ko'rinishda topiladi.

Agar $a^x = b$ bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra $x = \log_a b$. Bunda $a -$ logarifmning asosi, $b -$ logarifmlanayotgan son, $a > 0, a \neq 1$ deb olinadi, $b > 0$ bo‘ladi, ya’ni $a^x = b,\ x = \log_a b$ bundan,

$a^{\log_a b} = b$

**Xarakteristika va mantissa**

**Ta’rif**: [1] Son logarifmining butun qismi uning xarakteristikasi, kasr qismi mantissasi deyiladi.

Masalan, $\log 123 = 2{,}0899$. Bunda: 2- xarakteristika; kasr “0899” – mantissadir.

a) Birdan katta son logarifmining xarakteristikasi, sondagi butun xonalar sonidan bitta kam bo‘lgan musbat birlikka teng.

Masalan: lg2,5=0,3973 , lg82=1,913 , lg301,5=2,4793 va hokazo.

b) Birdan kichik o‘nli kasr logarifmining xarakteristikasi sondagi birinchi qiymatli raqamgacha bo‘lgan nollar soninig yig‘indisidan iborat bo‘lgan manfiy butun songa teng (nol butun ham shu hisobga kiradi).

Masalan, lg0,8=1,9031 , lg0,025=2,3979 , lg0,00305=3,4843 .

**Logarifmlash va potensirlash**

**Ta’rif**. Biror ifodaning logarifmini topish, uni logarifmlash deyiladi.

Masalan, $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}$ ning o‘nli logarifmi topilsin.

Logarifmlaymiz:

$\lg\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}} = \frac{1}{3}\lg\frac{a^2b}{c} = \frac{1}{3}[\lg(a^2b) - \lg c] = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c).$

**Ta’rif.** Logarifmdan ifoda yoki sonni toppish potensirlash deyiladi.

Masalan,

$\mathrm{N} = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c)$ ni potensirlang, ya’ni N ni toping.

Potensirlaymiz:$\lg N = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c) = \frac{1}{3}\lg\frac{a^2b}{c} = \lg\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}$.

Bundan logarifmning 3˚- xossasiga asosan:

$$N = \sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}.$$

bo‘ladi.

**Logarifmik tengsizliklarni yechishda teng kuchli tengsizliklardan foydalanish.**

**Tengsizliklarni ratsionallash**

Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechishda funksiyaning oraliqdagi qiymatlarini hisoblashda hisoblash bilan bog‘liq qiyinchilik paydo bo‘lishi mumkin. Ikkinchi tomondan, ratsional funksiya ishorasi navbat bilan almashish xossasidan foydalanib, hisoblashni minimumgacha keltirish mumkin.

Tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechish imkoniyatini kengaytirish maqsadida

matematikada boshqa nom bilan ma’lum bo‘lgan ***tengsizlikni ratsionallash*** g‘oyasidan foydalanamiz.

Ratsionallash usuli shundan iboratki, $F(x)$ qiyin ifodani nisbatan oson bo‘lgan $G(x)$ ifodaga almashtirib, $F(x)$ ning aniqlanish sohasida $G(x)$>0($G(x)$<0) tengsizlik $F(x) > 0(F(x) < 0)$tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi. Bu holda $G(x)$ ifoda $F(x)$ ifoda uchun ratsionallash deyiladi. ‘

Ratsionallash usuli g‘oyasida funksiyaning monotonlik xossasi qo‘llaniladi. Dastlab monoton funksiya nollari haqidagi teoremani eslatib o‘tamiz.

**Teorema**. [2]Agar $p(x)$-M intervalda monoton funksiya va $E(p)$ –uning shu intervaldagi qiymatlari to‘plami bo‘lsa,u holda ixtiyoriy $c \in E(p)$ soni uchun $p(x) = c$ tenglamaning yagona $x_0 \in M$ noli mavjud.

**Natija**. Agar $p(x)$ funksiya *M*intervalda monoton o‘suvchi funksiya bo‘lsa, u holda $\forall x_1, x_2 \in M$ sonlari uchun $p(x_1) \geq p(x_2)$ va $x_1 \geq x_2$ tengsizliklar teng kuchli yoki $p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \leftrightarrow x_1 - x_2 \geq 0$ (xuddi shuningdek,

$p(x_1) - p(x_2) > 0 \leftrightarrow x_1 - x_2 > 0$).

**Natija.** Agar $p(x)$ funksiya $M$ intervalda kamayuvchi funksiya bo‘lsa,u holda $\forall x_1, x_2 \in M$sonlari uchun $p(x_1) \geq p(x_2)$ va $x_1 \leq x_2$ tengsizliklar teng kuchli yoki $p(x_1) - p(x_2) \geq 0 \leftrightarrow x_1 - x_2 \leq 0$(xuddi shuningdek,

$p(x_1) - p(x_2) > 0 \leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$).

Ta’kidlash lozimki,$p(t) = \log_a t$ va $p(t) = a^t$ funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasida monoton bo‘lib, *a>1* bo‘lganda o‘suvchi,*0<a<1* bo‘lganda esa kamayuvchi bo‘ladi.

$F(x) = \log_a f(x) - \log_a g(x)$,$f(x) - g(x)$va$G(x) = (a-1)(f(x) - g(x))$ ifodalarning $F(x)$ ning

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

bilan berilgan aniqlanish sohasida *a* dan bog‘liq ravishda ishorasini qaraymiz.

**Teorema**. [4] *a>0* va$a \neq 1$ bo‘lganda $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ va

$(a-1)(f(x) - g(x))$ifodalarning ishorasi $f(x) > 0, g(x) > 0$ *x* larda ustma-ust tushadi.

*a>0* va $a \neq 1$hamda *x* ning mumkin bo‘lgan qiymatlarida $\log_a f(x) - b = \log_a f(x) - \log_a a^b$va $\log_a f(x) - 0 = \log_a f(x) - \log_a 1$

tengliklar o‘rinli, shu sababli yuqoridagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

**Natija.** *a>0* va $a \neq 1$bo‘lganda $\log_a f(x)$ va $(a-1)(f(x) - a^b)$ ifodalarning ishorasi $f(x) > 0$ bo‘ladigan *x* larda ustma-ust tushadi.

**Eslatma.** $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ yoki $\log_a(f(x)g(x))$ ifoda uchun

$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$shartda$(a-1)(f(x) - 1)$ ifoda ratsionallash bo‘ladi.

$\Delta$ orqali $\geq, >, \leq, <$ ishoralardan birini belgilaymiz. Ratsionallash usuli *F(x)* $\Delta$ 0 ko‘rinishdagi tengsizlikni yechishda ishlatiladi,bunda *F(x)* ni ratsionallash uchun,

yoki $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ va $(a-1)(f(x) - g(x))$ifodalarni ko‘paytma yoki bo‘linma ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lib, ulardan har birini ratsionallash mumkin. Masalan, *x* o‘zgaruvchining mos shartlarida:

• $(\log_a f(x))(\log_b g(x))$>0 tengsizlik $(a-1)(f(x)-1)(b-1)(g(x)-1) > 0$ tengsizlikka teng kuchlidir.

• $\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{\log_b h(x)} \leq 0$ tengsizlik $\frac{(a-1)(f(x) - g(x))}{(b-1)(h(x)-1)} \leq 0$ tengsizlikka teng kuchlidir.

**Izoh:** o‘quvchilar ratsionallash usulini qo‘llashda yo‘l qo‘yadigan standart xatoliklar quyidagilar:

a) berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasini inobatga olmasdan ratsionallashtiradi;

b) *F(x)* $\Delta$ *0*standart ko‘rinishga keltirilmagan tengsizlikka ratsionallash usulini qo‘llaydiar;

v) $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ ko‘rinishdagi ifodada $f(x) + g(x)$ ifodaga almashtirilgan ratsionallash usuli qo‘llaniladi;

g) “*x* ning mumkin bo‘lgan qiymatlarida ishoralari ustma-ust tushadi” deb bayon qiladilar.

**Misol.** $\log_{x+\frac{2}{9}} 3 \leq \log_{\sqrt{x}} 3$ tengsizlikni yeching.

**Yechish.** Teng kuchli almashtirishlar olib,

$$\log_{x+2/9} 3 \leq \log_{\sqrt{x}} 3 \leftrightarrow \frac{1}{\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right)} \leq \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}} \leftrightarrow \frac{\log_3 \sqrt{x} - \log_3\left(x+\frac{2}{9}\right)}{\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right)\log_3 \sqrt{x}} \leq 0 \leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \left(x+\frac{2}{9}\right)\right) \\ \left(x+\frac{2}{9}\right) > 0 \\ x+\frac{2}{9} \neq 1 \\ \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \left(\left(x+\frac{2}{9}\right) - \right.$$

$$\left.1\right)\left(\sqrt{x}-1\right) \leq \begin{cases} \left(-x+\sqrt{x}-\frac{2}{9}\right)\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(\sqrt{x}-1\right) \leq 0 \\ x \neq \frac{7}{9} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(\sqrt{x}-1\right) \geq 0 \\ x \neq \frac{7}{9} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow$$

$x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right) \cup (1; +\infty)$,ni hosil qilamiz

**Javob:** $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right) \cup (1; +\infty)$.

Endi asosida logarifmlar qatnashgan va logarifm belgisi ostida $x$ dan bog‘liq funksiyani saqlovchi tengsizliklarni qaraymiz.

**Teorema.** [5] $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ va $(h(x)-1)(f(x)-g(x))$ ifodalarning ishorasi $h(x) > 0, h(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$ bo‘ladigan $x$ ning barcha qiymatlarida ustma-ust tushadi.

**Isbot.** $a > 0$ va $a \neq 1$o‘zgarmas asosli logarifmga o‘tamiz:

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} = \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}$$

Yuqoridagi teoremaga ko‘ra o‘zgaruvchining mos shartlarida oxirgi ifoda ishorasi

$$\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)}$$

va ($h$-1)($f$-$g$) ifoda ishorasi bilan ustma-ust tushadi.

**Natija**. $\log_{h(x)} f(x) - b$ va $(h(x)-1)(f(x)-(h(x))^b)$ ifodaning ishorasi $x$ ning $h(x) > 0, h(x) \neq 1, f(x) > 0$ bo‘ladigan qiymatlarida ustma-ust tushadi.

**Natija.** $\log_{h(x)} f(x)$va$(h(x)-1)(f(x)-1)$ ifodaning ishorasi $x$ ning $h(x) > 0, h(x) \neq 1, f(x) > 0$bo‘ladigan barcha qiymatlarida ustma-ust tushadi.

**Teorema.** $\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$ va $(f(x)-1)(g(x)-1)\big(g(x)--f(x)\big)(h(x)-1)$ ifodalarning ishorasi $x$ ning $f(x) > 0, f(x) \neq 1,$ $g(x) > 0, g(x) \neq$1,$h(x)$>0 bo‘ladigan qiymatlarida ustma-ust tushadi.

**Isbot.** $\log_f h - \log_g h = \frac{1}{\log_h f} - \frac{1}{\log_h g} = \frac{\log_h g - \log_h f}{\log_h f \log_h g} = \log_h f \log_h g\,(\log_h g - \log_h f)$ bo‘lganligi uchun o‘zgaruvchining mos shartlarida oxirgi ifoda ishorasi $(h-1)(g-1)(f-1)(g-f)$ ning ishorasi bilan ustma-ust tushishini hosil qilamiz.

**Teorema.** [6] $h(x)^{f(x)} - h(x)^{g(x)}$va$(h(x)-1)(f(x)-g(x))$ ifodalarning ishorasi $x$ ning $h(x) > 0$ bo‘ladigan barcha qiymatlarida ustma-ust tushadi.

**Natija**. $x$ ning $h(x) > 0$ bo‘ladigan qiymatlarida $h(x)^{f(x)} - 1$ va $(h(x)-1)(f(x)$ ifodalarning ishoralari ustma-ust tushadi.

**Natija**. $a$>0 soni uchun $x$ ning mumkin bo‘lgan qiymatlarida ‘ $a^{f(x)} - a^{g(x)}\ va\ (f(x)-g(x))(a-1)$ifodalarning ishoralari ustma-ust tushadi.

**Teorema**. $x$ ning $f(x) > 0, g(x) > 0$ bo‘ladigan qiymatlarida $f(x)^{h(x)} - g(x)^{h(x)}$va$(f(x)-g(x))h(x)$ ifodalarning ishoralari bir xil.

**Natija.** $x$ ning mumkin bo‘lgan qiymatlarida $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ -$\sqrt[2n]{g(x)}$ va $f(x) - g(x)$ ifodalarning ishoralari bir xil, bu yerda $n \in N$.

**Natija.** $x$ ning $f(x) > 0, g(x) > 0, n \in N$bo‘ladigan barcha qiymatlarida $\sqrt[2n]{f(x)}$ -$\sqrt[2n]{g(x)}$ va $f(x) - g(x)$ ifodalarning ishoralari bir xil.

**Teorema.** $x$ ning mumkin bo‘lgan qiymatlarida $|f(x)| - |g(x)|$ va $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$ifodalarning ishoralari bir xil bo‘ladi.

**Ko‘rsatma.** Isbotlash uchun $|f(x)| - |g(x)|$ va $f^2(x) - g^2(x)$ ifodalarni qarash kerak va [0;+∞) oraliqda $p(t) = t^2$ o‘suvchi funksiya xossasidan foydalanish kerak.

**Xulosa.**

Ushbu maqolada logarifmik tengsizliklarni yechishda o‘quvchilar uchun juda qulay usul tushuntirilgan. Ushbu maqolada murakkab tengsizliklarga teng kuchli tengsizliklar bilan almashtirib yechishning qulay usul tushuntirilgan. Bu topilgan yechish usuli hisob-kitobni kamaytiradi.

**Adabiyotlar:**

1. Kolmogorov A.N.. Algebra va analiz asoslari, 10-11-sinflar uchun o‘quv qo‘llanma. T.1994.

2. Прокофьев А.А.,.Корянов А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников.Лекция 4. Решение неравенств функционально графическим методом. // Математика. – М. 2011

3. Самсонов П.И. О применении метода декомпозиции неравенств // Математика. Всё для учителя, 2011, №10.

4. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / М: Дрофа, 2001.

5. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Методы решения логарифмических неравенств (часть I и часть II), «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса»,2012.

6. Шабунин М.И.. Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009.