Функциональный анализ

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Т. Х. Расулов, Э. Б. Дилмуродов

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 200100, Бухара,ул. Мухаммад Икбол, 11.

Рассматривается 2×2 *операторная матрица (обобщённая модель Фридрихса)* A*, ассоциированная с системой не более чем двух квантовых частиц на* d*-мерной решётке. Этот оператор действует в прямой сумме ноль-частичного и одночастичного подпространств фоковского пространства. Структура замыкания числовой области значений* $W(A)$ *этого оператора подробно исследована в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора* $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$*. Выделены случаи, когда множество* $W(A)$ *замкнуто. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора* A *совпадал с множеством* $W(A)$*.*

Ключевые слова: *операторная матрица, обобщённая модель Фридрихса, пространство Фока, числовая область значений, точечный и аппроксимативно точечный спектры, операторы рождения и уничтожения, первый комплимент Шура.*

Введение. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор с областью определения $D(A) \subset \mathcal{H}$. Множество

$$W(A) := \{(Ax, x) : \ x \in D(A), \ ||x|| = 1\}$$

называется числовой областью значений (или коротко ч.о.з.) оператора A. Из определения видно, что множество $W(A)$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(A)$ дают некоторую информацию об операторе A.

Изучение ч.о.з. линейного оператора в гильбертовом пространстве является одним из основных методов в изучении местоположения спектра таких операторов. Это понятие впервые введено в работе [1] и доказано, что ч.о.з. матрицы содержит все её собственные значения. В работе [2] показано, что

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275

Образец цитирования: Т. Х. Расулов, Э. Б. Дилмуродов, “Исследование числовой области значений одной операторной матрицы” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 50–63. doi: 10.14498/vsgtu1275.

Сведения об авторах: *Туклин Хусенович Расулов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математической физики и анализа. *Элёр Бахтиёрович Дилмуродов*, ассистент, каф. математической физики и анализа.

E-mail addresses: rth@mail.ru (T.Kh. Rasulov, *Corresponding author*), elyor.dilmurodov@mail.ru (E.B. Dilmurodov)

ч.о.з. оператора является выпуклым. Отметим, что отмеченные выше результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае — для любого линейного ограниченного оператора. В работе [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании ч.о.з. этого оператора. Вслед за этим это понятие обобщено разными способами, см. например [4–10].

Ч.о.з. матриц хорошо изучены во многих работах, см. например [11–14]. В частности, в работе [11] доказано, что ч.о.з. матрицы 2×2 есть эллипс. Если элементами матрицы являются линейные операторы, то такие операторы обычно называются блочно-операторными матрицами (или просто операторными матрицами) и изучение ч.о.з. таких операторов в бесконечномерном пространстве представляет собой особый интерес. Поэтому исследование структуры ч.о.з. операторных матриц в терминах его матричных элементов является одной из интересных задач в спектральном анализе операторов.

Отметим, что в случае, когда оператор является ограниченным и самосопряженным, замыкание числовой области значений есть выпуклая оболочка спектра [11]. Возникает естественной вопрос: для каких классов ограниченных самосопряженных операторов в бесконечномерном пространстве спектр совпадает с числовой областью значений? Вообще, существует ли такой оператор, кроме скалярного оператора? В данной работе установлена непустота такого класса.

В настоящей работе рассматривается 2×2 операторная матрица (обобщённая модель Фридрихса) A, ассоциированная с системой не более чем двух квантовых частиц на d-мерной решётке. Отметим, что вопросы, проводящее к изучению спектральных свойств таких операторов, обычно возникают в задачах статистической физики [15], гидродинамики [16] и физики твёрдого тела [17].

Основной целью данной работы является подробное изучение ч.о.з. операторной матрицы A, а точнее:

а) описание структуры множества $W(A)$ при всех размерностях тора $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ в терминах матричных элементов операторной матрицы A;
б) выделение случаев, когда множество $W(A)$ замкнуто;
в) нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы оператор A имел спектр, совпадающий с множеством $W(A)$.

В последующих пунктах мы обсудим вышеуказанные вопросы. При обсуждении вопроса в) используется метод порогового анализа.

Структура работы такова. В пункте 1 даны некоторые основные свойства ч.о.з. линейного оператора. В пункте 2 операторная матрица A вводится как ограниченный самосопряженный оператор в прямой сумме нуль-частичного и одночастичного подпространств фоковского пространства и описана структура ч.о.з. оператора A. В пункте 3 доказано, что если граничные точки существенного спектра оператора A являются его «пороговыми» собственными значениями, то спектр этого оператора совпадает с множеством $W(A)$.

1. Основные свойства числовой области значений линейного оператора. Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множество всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно. Всюду в работе под $(\cdot\,,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ понимаются скалярное произведение и норма в соответствующих гильбертовых пространствах.

Для полноты сначала приведём ряд основных свойств ч.о.з. линейного оператора (вообще говоря, несамосопряженного) $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, доказательства которых вытекают непосредственно из определения:

1) если A ограниченный оператор, то
$$W(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}: \ |\lambda| \leqslant ||A||\};$$
2) $W(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in W(A)\}$;
3) $W(I) = \{1\}$; если α и β — произвольные комплексные числа, то имеет место
$$W(\alpha A + \beta) = \alpha W(A) + \beta;$$
4) для самосопряженного оператора A имеет место вложение $W(A) \subset \mathbb{R}$;
5) если $\mathcal{H}$ — конечномерное пространство, то множества $W(A)$ является компактным;
6) если $A, B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — унитарно-эквивалентные операторы, то $W(A)=W(B)$;
7) $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset W(A)$.

Определим (см. [18]) аппроксимативно точечный спектр линейного оператора A как
$$\sigma_{\mathrm{app}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\}_1^\infty \subset D(A),\ \|x_n\| = 1,\ (A - \lambda)x_n \to 0,\ n \to \infty\}.$$
Подчеркнём, что последнее множество имеет еще одно название: «ядро спектра» оператора A (см. [19]).

Следующее утверждение устанавливает связь между $\sigma_{\mathrm{app}}(A)$ и $W(A)$:

8) $\sigma_{\mathrm{app}}(A) \subset \overline{W(A)}$.

Следующий пример показывает, что даже для ограниченного самосопряжённого оператора B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ мы не сможем утверждать, что $\sigma(B) \subset W(B)$ или $W(B) \subset \sigma(B)$.

Пусть
$$B : l_2 \to l_2, \quad Bx = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2.$$
Легко проверяется, что
$$\sigma(B) = \overline{\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}, \quad W(B) = (0, 1].$$
Остановимся на доказательстве факта $0 \notin W(B)$. Допустим противное. Пусть $0 \in W(B)$. Тогда существует $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ такое, что $\|x\| = 1$ и $(Bx, x) = 0$. Имеем
$$(Bx, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_n|^2 = 0.$$
Отсюда следует, что $x \equiv 0$. Это противоречит факту $\|x\| = 1$. Значит $0 \notin W(B)$. Следовательно, в этом случае имеем $\sigma(B) \not\subset W(B)$, $W(B) \not\subset \sigma(B)$.

2. Операторная матрица и обсуждения основных результатов. Пусть $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ — d-мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$.

Пусть $L_2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ называются ноль-частичным и одночастичным подпространствами фоковского пространства $\mathcal{F}(L_2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}}))$ над $L_2(\mathbf{T}^{\mathrm{d}})$ соответственно.

Рассмотрим обобщённую модель Фридрихса $A \equiv A(w, \mu)$, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как 2×2 блочно-операторная матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_{ij}\colon \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leqslant j$, $i, j = 0, 1$, определяются по формулам

$$A_{00} f_0 = w f_0, \quad A_{01} f_1 = \sqrt{\mu} \int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} v(s) f_1(s) ds, \quad (A_{11} f_1)(p) = u(p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$; $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ и $u(\,\cdot\,)$, $v(\,\cdot\,)$ — вещественно-аналитические функции на $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, а A_{01}^* — сопряжённый оператор к A_{01}.

Оператор A_{01} называется оператором уничтожения, а A_{01}^* называется оператором рождения.

Можно проверить, что при этих предположениях оператор, которому соответствует матрица A, является ограниченным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Обозначим через $\sigma(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\,\cdot\,)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\,\cdot\,)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Пусть оператор A_0 действует в $\mathcal{H}$ как

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $A - A_0$ оператора A_0 является самосопряжённым оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора A совпадает с существенным спектром оператора A_0. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(A_0) = [m; M]$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m = \min_{p \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}} u(p), \quad M = \max_{p \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}} u(p).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = [m; M]. \tag{1}$$

Пусть I_i — единичный оператор в $\mathcal{H}_i$, $i=1,2$. Чтобы определить дискретный спектр оператора A, наряду с этим оператором рассмотрим ещё оператор $S(z):\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_0$, который формально определяется следующим образом:

$$S(z):=A_{00}-zI_0-A_{01}(A_{11}-zI_1)^{-1}A_{01}^*,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[m;M].$$

Определённый таким образом оператор обычно называется первым комплиментом Шура.

Определим регулярную в $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором A):

$$\Delta_\mu(w;z)=w-z-\mu\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v^2(s)ds}{u(s)-z}.$$

Тогда $S(z)$ есть оператор умножения в пространстве $\mathcal{H}_0$ на функцию $\Delta_\mu(w;\cdot)$.

Установим связь между собственными значениями операторов A и $S(z)$.

Лемма 1. *Оператор A имеет собственное значение $z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$ тогда и только тогда, когда оператор $S(z)$ имеет нулевое собственное значение.*

Доказательство. Пусть $z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$ — собственное значение оператора A и $f=(f_0,f_1)\in\mathcal{H}$ — соответствующая вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(A_{00}-zI_0)\,f_0+A_{01}f_1=0,\\ A_{01}^*f_0+(A_{11}-zI_1)\,f_1=0.\end{cases}\tag{2}$$

Так как $z\notin\sigma(A_{11})=[m;M]$, оператор $A_{11}-zI_1$ обратим. Следовательно, умножая второе уравнение системы слева на $(A_{11}-zI_1)^{-1}$, для f_1 имеем

$$f_1=-(A_{11}-zI_1)A_{01}^*f_0.$$

Подставляя последнее выражение для f_1 в первое уравнение системы (2), получим, что система уравнений (2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение $S(z)f_0=0$ имеет нетривиальное решение. □

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(A)=\{z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]:S(z)\text{ имеет нулевое собственное значение}\}.$$

Таким образом,

$$\sigma(A)=[m;M]\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(A).$$

Надо отметить, что дискретный спектр оператора A играет важную роль при исследовании его ч.о.з.

Лемма 2. *Оператор A может иметь не более чем по одному простому собственному значению, лежащему левее m и правее M.*

Доказательство леммы 2 вытекает из монотонности и непрерывности функции $\Delta_\mu(w;\cdot)$ на полуосях $(-\infty;m)$ и $(M;+\infty)$, а также леммы 1.

Далее в случае существования собственных значений оператора A обозначим их через $\lambda_k(w,\mu)$, $k=1,2$. Для определённости предположим, что $\lambda_1(w,\mu)<m$ и $\lambda_2(w,\mu)>M$.

Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ — фиксированные числа. На протяжении всей работы будем предполагать, что функция $u(\,\cdot\,)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, $i = \overline{1, N_1}$, и невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, $j = \overline{1, N_2}$.

В качестве такой функции $u(\,\cdot\,)$ можно взять

$$u(p) = \sum_{k=1}^{\mathrm{d}} \bigl(1 - \cos np^{(k)}\bigr), \quad p = (p^{(1)}, \ldots, p^{(\mathrm{d})}) \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $N_1 \equiv N_1(n)$ и $N_2 \equiv N_2(n)$ число точек

$$p_i = \bigl(p_i^{(1)}, \ldots, p_i^{(\mathrm{d})}\bigr) \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}} \quad \text{и} \quad q_j = \bigl(q_j^{(1)}, \ldots, q_j^{(\mathrm{d})}\bigr) \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}},$$

соответственно, для которых

$$p_i^{(k)} \in \left\{0; \pm\frac{2}{n}\pi; \pm\frac{4}{n}\pi; \ldots; \pm\frac{n_1}{n}\pi\right\} \cup \begin{cases} \{\pi\}, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ \emptyset, & \text{если } n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \mathrm{d}};$$

$$q_j^{(k)} \in \left\{\pm\frac{1}{n}\pi; \pm\frac{3}{n}\pi; \ldots; \pm\frac{n_2}{n}\pi\right\} \cup \begin{cases} \emptyset, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ \{\pi\}, & \text{если } n \text{ нечётное}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \mathrm{d}};$$

причём $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$; здесь

$$n_1 := \begin{cases} n-2, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ n-1, & \text{если } n \text{ нечётное}; \end{cases} \qquad n_2 := \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ n-2, & \text{если } n \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Очевидно, что определённая так функция $u(\,\cdot\,)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, причём $N_1 = n$, $N_2 = n - 1$. Таким образом, множество значений функций $u(\,\cdot\,)$ совпадает с отрезком $[0, 2\mathrm{d}]$.

I. Случай $\mathrm{d} \geqslant 3$. В дальнейшем через δ, C_1, C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

Пусть

$$|p| := \sqrt{\bigl(p^{(1)}\bigr)^2 + \ldots + \bigl(p^{(\mathrm{d})}\bigr)^2}, \quad p = \bigl(p^{(1)}, \ldots, p^{(\mathrm{d})}\bigr) \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}};$$
$$U_\delta(p_0) := \bigl\{p \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}} : |p - p_0| < \delta\bigr\}, \quad p_0 \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}, \quad \delta > 0.$$

Так как функция $u(\,\cdot\,)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, $i = \overline{1, N_1}$, существуют числа C_1, C_2, $C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1 |p - p_i|^2 \leqslant u(p) - m \leqslant C_2 |p - p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i = \overline{1, N_1}; \tag{3}$$

$$u(p) - m \geqslant C_3, \quad p \in \mathbf{T}_\delta \equiv \mathbf{T}^{\mathrm{d}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} U_\delta(p_i). \tag{4}$$

Имеет место равенство

$$\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} + \int_{\mathbf{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m}. \tag{5}$$

Учитывая неравенства (3) и непрерывность функции $v(\,\cdot\,)$ на $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, имеем, что i-тое ($i \in \{1, \ldots, N_1\}$) слагаемое в правой части (5) оценивается следующим образом:

$$\int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \leqslant C_1 \int_{U_\delta(0)} \frac{ds}{|s|^2} \leqslant C_1 (2\pi)^{\mathrm{d}-3} \int_{\{p \in \mathbf{T}^3 : |p| < \delta\}} \frac{ds^{(1)}ds^{(2)}ds^{(3)}}{|s^{(1)}|^2 + |s^{(2)}|^2 + |s^{(3)}|^2}.$$

Переходя в сферическую систему координат, убедимся, что последний интеграл конечен. Конечность последнего слагаемого в правой части (5), т.е. интеграла по $\mathbf{T}_\delta$, вытекает из непрерывности функции $v(\cdot)$ на $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$ и неравенства (4). Аналогично показывается, что

$$\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-M} \tag{6}$$

также конечен.

Положим

$$\mu_0 := \left(\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \right)^{-1}, \quad \mu_1 := \left(\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{M-u(s)} \right)^{-1}.$$

Следующая теорема описывает структуру ч.о.з. оператора A.

Теорема 1. *Пусть $w \leqslant m$.*

1. *Если $0 < \mu \leqslant (M-w)\mu_1$, то верно равенство $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w,\mu); M]$.*
2. *При $\mu > (M-w)\mu_1$ имеет место равенство $W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$.*

Доказательство. Пусть $w \leqslant m$. Тогда при всех $\mu > 0$ верно неравенство $\Delta_\mu(w; m) < 0$. Так как

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\mu(w; z) = +\infty$$

и функция $\Delta_\mu(w;\,\cdot\,)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty; m)$, функция $\Delta_\mu(w;\,\cdot\,)$ имеет единственный простой нуль $\lambda_1(w,\mu)$ в $(-\infty; m)$. В силу леммы 1 число $\lambda_1(w,\mu)$ является единственным простым собственным значением оператора A.

1. Предположим, что $0 < \mu \leqslant (M-w)\mu_1$. Простые вычисления показывают, что $\Delta_\mu(w; M) < 0$. Теперь из факта

$$\lim_{z \to +\infty} \Delta_\mu(w; z) = -\infty,$$

а также из непрерывности и монотонности функции $\Delta_\mu(w;\,\cdot\,)$ на полуоси $(M; +\infty)$, вытекает, что функция $\Delta_\mu(w;\cdot)$ не имеет нулей в $(M; +\infty)$. В силу леммы 1 оператор A не имеет собственных значений, лежащих в $(M;+\infty)$. Следовательно, в этом случае

$$\sigma(A)=\{\lambda_1(w,\mu)\}\cup[m;M],\quad \lambda_1(w,\mu)<m.$$

Так как замыкание ч.о.з. оператора A есть выпуклая оболочка спектра $\sigma(A)$, то $\overline{W(A)}=[\lambda_1(w,\mu);M]$. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

2. Пусть теперь $\mu>(M-w)\mu_1$. Рассуждая, как и выше, можно показать, что оператор A имеет единственное собственное значение $\lambda_2(w,\mu)$, лежащее на $(M;+\infty)$, т.е.

$$\sigma(A)=\{\lambda_1(w,\mu)\}\cup[m;M]\cup\{\lambda_2(w,\mu)\},\quad \lambda_1(w,\mu)<m,\quad \lambda_2(w,\mu)>M.$$

Видно, что в этом случае

$$m_A:=\inf_{\|f\|=1}(Af,f)=\lambda_1(w,\mu),\quad M_A:=\sup_{\|f\|=1}(Af,f)=\lambda_2(w,\mu). \tag{7}$$

Значит, $\overline{W(A)}=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)]$. Покажем, что $\lambda_k(w,\mu)\in W(A)$, $k=1{,}2$. Пусть $g_1\in\mathcal{H}$ и $g_2\in\mathcal{H}$ — нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1(w,\mu)$ и $\lambda_2(w,\mu)$ соответственно. Тогда

$$\min_{\|f\|=1}(Af,f)=(Ag_1,g_1)=\lambda_1(w,\mu);\quad \max_{\|f\|=1}(Af,f)=(Ag_2,g_2)=\lambda_2(w,\mu).$$

Отсюда следует, что $\lambda_k(w,\mu)\in W(A)$, $k=1,2$. Второе утверждение теоремы 1 доказано. □

Из доказательства теоремы 1 вытекает следующее замечание.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство и $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — произвольный линейный ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\overline{W(A)}=[m_A;M_A]$. Если дополнительно выполняется условие $\sigma_{\rm ess}(A)\subset(m_A;M_A)$, то $W(A)=[m_A;M_A]$. Здесь числа m_A и M_A определены по формуле (7).

Заметим, что в первом утверждение теоремы 1 число $M\in\sigma_{\rm ess}(A)$ является предельной точкой множества $W(A)$. Действительно, так как $M\in\sigma_{\rm ess}(A)$, по критерию Вейля существует ортонормированная система $\{g_n\}\subset\mathcal{H}$ такая, что

$$\psi_n:=Ag_n-Mg_n\to 0,\quad n\to\infty.$$

Рассмотрим скалярное произведение (ψ_n,g_n):

$$(\psi_n,g_n)=(Ag_n,g_n)-M(g_n,g_n)=(Ag_n,g_n)-M\to 0,\quad n\to\infty.$$

Отсюда следует, что M есть предельная точка множество $W(A)$.

Следующие теоремы доказываются аналогично теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $m<w<M$.*

1. *Если $\mu>\max\{(w-m)\mu_0,(M-w)\mu_1\}$, то $W(A)=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)]$.*
2. *Если $(w-m)\mu_0<(M-w)\mu_1$ и $\mu\in((w-m)\mu_0;(M-w)\mu_1]$, то $\overline{W(A)}=[\lambda_1(w,\mu);M]$.*

3. *Если* $(w-m)\mu_0 > (M-w)\mu_1$ *и* $\mu \in ((M-w)\mu_1; (w-m)\mu_0]$, *то* $\overline{W(A)} = [m; \lambda_2(w,\mu)]$.
4. *Если* $\mu < \min\{(w-m)\mu_0, (M-w)\mu_1\}$, *то* $\overline{W(A)} = [m; M]$.

Замечание 2. Если $(w-m)\mu_0 = (M-w)\mu_1 = \mu_{01}$, т.е. если

$$w = \frac{m\mu_0 + M\mu_1}{\mu_0 + \mu_1},$$

то при $\mu > \mu_{01}$ имеем случай первого утверждения, а при $0 < \mu \leqslant \mu_{01}$ случай четвёртого утверждения теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $w \geqslant M$.
1. *Если* $0 < \mu \leqslant (w-m)\mu_0$, *то имеет место равенство* $\overline{W(A)} = [m; \lambda_2(w,\mu)]$.
2. *При* $\mu > (w-m)\mu_0$ *верно равенство* $W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$.

II. Случай $\mathrm{d} = 1, 2$. Предположим, что $v(p_i) \neq 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \ldots, N_1\}$ и $j \in \{1, \ldots, N_2\}$ соответственно. Тогда существуют числа $C_1 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|v(p)| \geqslant C_1, \quad p \in U_\delta(p_i) \cup U_\delta(q_j). \tag{8}$$

Учитывая (3), (8), имеем

$$\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \geqslant C_1 \int_{U_\delta(0)} \frac{ds}{|s|^2}.$$

При $\mathrm{d} = 1$ расходимость последнего интеграла очевидна, а при $\mathrm{d} = 2$, переходя в полярную систему координат, убеждаемся, что последний интеграл расходится. Аналогично доказывается расходимость интеграла (6) при $\mathrm{d}=1, 2$.

Тогда при всех значениях параметров w и μ верно

$$\lim_{z \to m-0} \Delta_\mu(w; z) = -\infty, \quad \lim_{z \to M+0} \Delta_\mu(w; z) = +\infty.$$

Так как

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\mu(w; z) = +\infty, \quad \lim_{z \to +\infty} \Delta_\mu(w; z) = -\infty$$

и функция $\Delta_\mu(w; \cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуосях $(-\infty; m)$ и $(M; +\infty)$, при всех w и μ оператор A имеет два собственных значения, которые мы обозначили через $\lambda_k(w,\mu)$, $k = 1, 2$, причём $\lambda_1(w,\mu) < m$, $\lambda_2(w,\mu) > M$. В силу замечания 1 для ч.о.з. оператора A имеет место равенство

$$W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)].$$

Пусть $v(p_i) = 0$, $i \in \{1, \ldots, N_1\}$ и $v(q_j) = 0$, $j \in \{1, \ldots, N_2\}$. Тогда существуют числа $C_1, C_2 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $d \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\begin{aligned} C_1|p-p_i|^{\alpha_i} \leqslant |v(p)| \leqslant C_2|p-p_i|^{\alpha_i}, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i = \overline{1, N_1}; \\ C_1|p-q_j|^{\beta_j} \leqslant |v(p)| \leqslant C_2|p-q_j|^{\beta_j}, \quad p \in U_\delta(q_j), \quad j = \overline{1, N_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь, применяя (3), (4) и (9), а также используя непрерывность функции $v(\,\cdot\,)$ на $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$, имеем

$$\int_{\mathbf{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} + \int_{\mathbf{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(0)} |s|^{2\alpha_i-2}ds + C_2 < \infty.$$

Далее совершенно аналогично показывается конечность интеграла (6). Следовательно, числа μ_0 и μ_1 конечны, в этом случае верны все утверждения теорем 1–3.

Осталось рассмотреть случай $v(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \ldots, N_1\}$ и $v(q_j) = 0$, $j = \overline{1, N_2}$. В этом случае при всех w и μ верно $\min \sigma(A) = \lambda_1(w, \mu)$. Рассуждая, как и в теоремах 1–3, получим следующие утверждения:

1) пусть $w \geqslant M$; тогда при всех $\mu > 0$ имеет место равенство

$$W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)];$$

2) пусть $w < M$:

   а) если $0 < \mu \leqslant (M-w)\mu_1$, то $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w,\mu); M]$;

   б) если $\mu > (M-w)\mu_1$, то $W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$.

Случай, когда $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \ldots, N_2\}$ аналогичен.

Заметим, что если $u(p) \equiv u_0 = \mathrm{const}$, то при всех значениях $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ и $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ числа

$$\lambda_1(w,\mu) = \frac{w + u_0 - \sqrt{(w-u_0)^2 + 4\mu\|v\|^2}}{2},$$
$$\lambda_2(w,\mu) = \frac{w + u_0 + \sqrt{(w-u_0)^2 + 4\mu\|v\|^2}}{2}$$

являются простыми собственными значениями оператора A и имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \{u_0\}$, причём $\lambda_1(w,\mu) < u_0 < \lambda_2(w,\mu)$. Следовательно, в этом случае имеем $W(A) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$.

3. Пороговые эффекты для оператора *A*. В этом пункте рассмотрим случай $\mathrm{d} = 3$.

Пусть $C(\mathbf{T}^3)$ (соответственно $L_1(\mathbf{T}^3)$) — банахово пространство непрерывных (соответственно интегрируемых) функций, определённых на $\mathbf{T}^3$.

Определение 1. Пусть $w \neq m$ (соответственно $w \neq M$). Говорят, что оператор A имеет резонанс с энергией m (соответственно M), если число 1 является собственным значением оператора

$$(G_m\psi)(p) = \frac{\mu v(p)}{w-m} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s)-m}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

соответственно

$$(G_M\psi)(p) = \frac{\mu v(p)}{w-M} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s)-M}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ (соответственно $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, N_2\}$).

В следующей лемме формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = m$ (соответственно $z = M$) являлось собственным значением оператора A, либо оператор A имел резонанс с энергией m (соответственно M).

Лемма 3.

1. *Число $z = m$ ($z = M$) является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(w; m) = 0$ и $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$ ($\Delta_\mu(w; M) = 0$ и $v(q_j) = 0$, $j = \overline{1, N_2}$).*
2. *Оператор A имеет резонанс с энергией m (M) тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(w\,; m) = 0$ и $v(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ ($\Delta_\mu(w\,; M) = 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, N_2\}$).*

Для доказательство леммы 3 в случае $z = m$ достаточно воспользоваться схемой доказательства теоремы 1 из работы [20]. А случай $z = M$ доказывается аналогично.

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 в [20] показано, что если число $z = m$ является собственным значением оператора A, то только (с точностью до константы) вектор $f = (f_0, f_1)$, где f_0 и f_1 имеют вид

$$f_0 = \text{const} \neq 0, \quad f_1(p) = -\frac{\sqrt{\mu} v(p) f_0}{u(p) - m},$$

удовлетворяет уравнению $Af = mf$, более того, $f_1 \in L_2(\mathbf{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$. Также в [20] установлено, что если оператор A имеет резонанс с энергией m, то $f_1 \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$. Это и означает, что в определении 1 требование наличия собственного значения 1 оператора G_m соответствует существованию решения уравнения $Af = mf$, а из условия $\psi(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству $\mathcal{H}$. Аналогичные утверждение верны для случая $z = M$.

Так как m и M являются граничными точками $\sigma_{\text{ess}}(A)$ в случае, когда эти числа являются собственными значениями оператора A, мы назовём их пороговыми собственными значениями этого оператора.

Лемма 4. *Если либо число $z = m$ ($z = M$) является собственным значением оператора A, либо оператор A имеет резонанс с энергией m (M), то оператор A не имеет собственных значений, лежащих левее m (правее $z = M$).*

Доказательство. Если либо число $z = m$ является собственным значением оператора A, либо оператор A имеет резонанс с энергией m, то в силу леммы 3 имеем $\Delta_\mu(w\,; m) = 0$. Из монотонности функции $\Delta_\mu(w\,; \cdot\,)$ следует, что для любого $z < 0$ верно $\Delta_\mu(w\,; z) > \Delta_\mu(w\,; 0) = 0$. По лемме 1 это означает, что оператор A не имеет собственных значений, лежащих левее m.

Случай $z = M$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 4. *Верны следующие утверждения*:

1) *если числа m и M являются пороговыми собственными значениями оператора A, то $W(A) = [m; M]$*;
2) *если число $z = m$ является пороговым собственным значением оператора A и этот оператор также имеет резонанс с энергией M, то $W(A) = [m; M)$*;
3) *если оператор A имеет резонанс с энергией m и число $z = M$ является пороговым собственным значением оператора A, то $W(A) = (m; M]$*;
4) *если оператор A имеет резонансы с энергиями m и M, то $W(A) = (m; M)$.*

Доказательство. Если выполняются условия в утверждениях теоремы 4, то в силу равенства (1) и леммы 4 имеем $\sigma(A) = [m; M]$. Как отмечалось выше, в случае, когда оператор A имеет резонанс с энергией m, соответствующий вектор f не принадлежит $\mathcal{H}$. Поэтому в этом случае $m \notin W(A)$. Пусть число $z = m$ является собственным значением оператора A и f — соответствующий вектор. Положим $\widetilde{f} = f/||f||$. Тогда $(A\widetilde{f}, \widetilde{f}) = m(\widetilde{f}, \widetilde{f}) = m$, т.е. $m \in W(A)$. □

Следующий пример показывает, что класс функций $v(\,\cdot\,)$ и $u(\,\cdot\,)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4, непуст. Простые вычисления дают, что если

$$w = \frac{m\mu_0 + M\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}, \qquad \mu = \frac{(M-m)\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1},$$

то равенства $\Delta_\mu(w; m) = 0$ и $\Delta_\mu(w; M) = 0$ выполняются одновременно независимо от функции $v(\,\cdot\,)$ и $u(\,\cdot\,)$. Пусть

$$u(p) = \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos p^{(i)}).$$

Тогда функция $u(\,\cdot\,)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 = (0,0,0) \in \mathbf{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $q_1 = (\pi,\pi,\pi) \in \mathbf{T}^3$. Далее

1) если $v(p) = 1 - \cos 2p^{(1)}$, то $v(p_1) = v(q_1) = 0$;
2) если $v(p) = 1 - \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 0$ и $v(q_1) = 2 \neq 0$;
3) если $v(p) = 1 + \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 2 \neq 0$ и $v(q_1) = 0$;
4) если $v(p) = \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 1 \neq 0$ и $v(q_1) = -1 \neq 0$.

При этом, сравнивая соответствующие условия леммы 3, получим, что выполняются условия теоремы 4.

Если $\Delta_\mu(w\,; m) > 0$, то в силу леммы 3 число $z = m$ не является пороговым собственным значением оператора A и этот оператор не имеет резонанса с энергией m. В этом случае $m \notin W(A)$. Допустим противное. Пусть $m \in W(A)$. Тогда существует $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ такой, что $\|f\| = 1$ и $(Af, f) = m$. В этом случае легко можно показать, что $f_0 = 0$, а функция $f_1 \in \mathcal{H}_1$ ортогональна к $v(\cdot)$ и $\|f\|_1 = 1$. Имеем

$$(Af, f) - m = \int_{\mathbf{T}^3}(u(s) - m)|f_1(s)|^2 ds = 0.$$

Отсюда следует, что $f_1 \equiv 0$, а это противоречит условию нормировки $\|f\| = 1$. Значит, $m \notin W(A)$.

Таким образом, равенство $W(A) = [m; M]$ выполняется тогда и только тогда, когда числа m и M являются «пороговыми» собственными значениями оператора A.

Работа частично поддержана проектом TOSCA II Erasmus Mundus. Первый автор выражает свою признательность университету Л'Акуила (Италия) за гостеприимство.

This work was partially supported by the TOSCA II Erasmus Mundus Project. The first author expresses his gratitude for the hospitality of the University of L'Aquila (Italy).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. O. Toeplitz, "Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér", *Math. Z.*, 1918, vol. 2, no. 1–2, pp. 187–197 doi: 10.1007/BF01212904.
2. F. Hausdorff, "Der Wertvorrat einer Bilinearform", *Math. Z.*, 1919, vol. 3, no. 1, pp. 314–316 doi: 10.1007/BF01292610.
3. A. Wintner, "Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen", *Math. Z.*, 1929, vol. 30, no. 1, pp. 228–281 doi: 10.1007/BF01187766.
4. H. Langer, A. S. Markus, V. I. Matsaev, C. Tretter, "A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range", *Linear Algebra Appl.*, 2001, vol. 330, no. 1–3, pp. 89–112 doi: 10.1016/S0024-3795(01)00230-0.
5. C. Tretter, M. Wagenhofer, "The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix", *SIAM. J. Matrix Anal. & Appl.*, 2003, vol. 24, no. 4, pp. 1003–1017 doi: 10.1137/S0895479801394076.
6. L. Rodman, I. M. Spitkovsky, "Ratio numerical ranges of operators", *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2011, vol. 71, no. 2, pp. 245–257 doi: 10.1007/s00020-011-1898-8.
7. W. S. Cheung, X. Liu, T. Y. Tam, "Multiplicities, boundary points and joint numerical ranges", *Operators and Matrices*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 41–52 doi: 10.7153/oam-05-02.
8. H. L. Gau , C. K. Li, Y. T. Poon, N. S. Sze, "Higher rank numerical ranges of normal matrices", *SIAM. J. Matrix Anal. & Appl.*, 2011, vol. 32, pp. 23–43, arXiv: 0902.4869 [math.FA] doi: 10.1137/09076430X.
9. B. Kuzma, C. K. Li, L. Rodman, "Tracial numerical range and linear dependence of operators", *Electronic J. Linear Algebra*, 2011, vol. 22, pp. 22–52, http://eudml.org/doc/223236.
10. C. K. Li, Y. T. Poon, "Generalized numerical range and quantum error correction", *J. Operator Theory*, 2011, vol. 66, no. 2, pp. 335–351, http://www.mathjournals.org/jot/2011-066-002/2011-066-002-004.html.
11. K. Gustafson, D. K. M. Rao, *Numerical range: The field of values of linear operators and matrices*, Berlin, Springer, 1997, xiv+190 pp.
12. D. S. Keeler, L. Rodman, I. M. Spitkovsky, "The numerical range of 3×3 matrices", *Linear Algebra and its Appl.*, 1997, vol. 252, no. 1–3, pp. 115–139 doi: 0.1016/0024-3795(95)00674-5.
13. H.-L. Gau, "Elliptic numerical range of 4×4 matrices", *Taiwanese J. Math.*, 2006, vol. 10, no. 1, pp. 117–128.
14. D. Henrion, "Semidefinite geometry of the numerical range", *Electronic J. Linear Algebra*, 2010, vol. 20, pp. 322–332, http://eudml.org/doc/229710, arXiv: 0812.1624 [math.OC].
15. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, "Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа" // *ТМФ*, 1970. Т. 2, № 2. С. 230–243; R. A. Minlos, Ya. G. Sinai, "Spectra of stochastic operators arising in lattice models of a gas", *Theoret. and Math. Phys.*, 1970, vol. 2, no. 2, pp. 167–176 doi: 10.1007/BF01036789.
16. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* М.: Наука, 1973. 416 с. [M. A. Lavrentiev, B. V. Shabat, *Problemy gidrodinamiki i*

ikh matematicheskie modeli [Problems of Hydrodynamics and their Mathematical Models], Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)]
17. A. I. Mogilner, “Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results”, *Adv. Soviet Math.*, 1991, vol. 5, pp. 139–194.
18. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, V. IV, *Analysis of operators*, New York–London, Academic Press, 1978, 396 pp.; М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 4: *Анализ операторов.* М.: Мир, 1982. 430 с.
19. М. Саломяк, М. Бирман, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: ЛГУ, 1980. 264 с. [M. Salomyak, M. Birman, *Spektral'naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Leningrad, Leningrad State University Press, 1980, 264 pp. (In Russian)]
20. Т. Х. Расулов, Х. Х. Турдиев, “Некоторые спектральные свойства обобщённой модели Фридрихса” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 181–188 doi: 10.14498/vsgtu904. [T. H. Rasulov, Kh. Kh. Turdiev, “Some spectral properties of a generalized Friedrichs model”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 2(23), pp. 181–188 (In Russian)].

Поступила в редакцию 17/XI/2013;
в окончательном варианте — 24/XII/2013;
принята в печать — 19/II/2014.

MSC: 81Q10, 35P20, 47N50

INVESTIGATIONS OF THE NUMERICAL RANGE OF A OPERATOR MATRIX

T. Kh. Rasulov, E. B. Dilmurodov

Bukhara State University,
11, Muhammad Igbol st, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

We consider a 2×2 operator matrix A (so-called generalized Friedrichs model) associated with a system of at most two quantum particles on d− *dimensional lattice. This operator matrix acts in the direct sum of zero- and one-particle subspaces of a Fock space. We investigate the structure of the closure of the numerical range $W(A)$ of this operator in detail by terms of its matrix entries for all dimensions of the torus $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}$. Moreover, we study the cases when the set $W(A)$ is closed and give necessary and sufficient conditions under which the spectrum of A coincides with its numerical range.*

Keywords: *operator matrix, generalized Friedrichs model, Fock space, numerical range, point and approximate point spectra, annihilation and creation operators, first Schur compliment.*

Received 17/XI/2013;
received in revised form 24/XII/2013;
accepted 19/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275

Citation: T. Kh. Rasulov, E. B. Dilmurodov, “Investigations of the Numerical Range of a Operator Matrix”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 50–63. doi: 10.14498/vsgtu1275. (In Russian)

Author Details: *Tulkin Kh. Rasulov* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Assotiate Professor, Dept. of Mathematical Physics & Analysis. *Elyor B. Dilmurodov*, Assistant Lecturer, Dept. of Mathematical Physics & Analysis.

E-mail addresses: rth@mail.ru (T.Kh. Rasulov, *Corresponding author*), elyor.dilmurodov@mail.ru (E.B. Dilmurodov)