ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

**ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА
АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ**
хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

========= ♦ =========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА**
Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

========= ♦ =========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the
AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the
participation of foreign scientists

**DIFFERENTIAL EQUATIONS AND
RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS**
Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ

хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

======== ♦ ========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции
с участием зарубежных ученых

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

======== ♦ ========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS

Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

ANJUMAN TASHKILIY QO‘MITASI

Tashkiliy qo‘mita raisi:

Ayupov Sh.A. – O‘zFA Matematika instituti direktori, akademik

Tashkiliy qo‘mita raisining o‘rinbosarlari:

Roziqov O‘.A. – O‘zFA Matematika instituti ilm-fan bo‘yicha direktor o‘rinbosari

Botirov G‘.I. – O‘zFA Matematika instituti direktor o‘rinbosari

Durdiyev D.Q. – O‘zFA Matematika instituti Buxoro bo‘linmasi mudiri

A’zolari:

Ashurov R.R. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Hayotov A.R. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Jamilov U.U. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d.

Taxirov J.O. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Adilova F.T. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Xusanboyev Y.M. – O‘zFA Matematika instituti, f.-m.f.d., professor

Kudaybergenov K.K. – O‘zFA Matematika instituti Qoraqalpoq bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d., professor

Rahmatullayev M.M. – O‘zFA Matematika instituti Namangan bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d.

Imomkulov S.A. – O‘zFA Matematika instituti Xorazm bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d., professor

Xolxo‘jayev A.M. – O‘zFA Matematika instituti Samarqand bo‘linmasi mudiri, f.-m.f.d.

Beshimov R.B. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Zikirov O.S. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Omirov B.A. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Sharipov O.SH. – O‘zMU, f.-m.f.d., professor

Rasulov T.H. – BuxDU, f.-m.f.n., dotsent

Dasturiy qo‘mita

Hamraislar:

A’zolar:

Kotibiyat

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель:

Аюпов Ш.А. – директор института Математики АН РУз, академик

Заместители председателя:

Розиков У.А. – заместитель директора по науке института Математики АН РУз

Ботиров Г.И. – заместитель директора института Математики АН РУз

Дурдиев Д.К. – заведующий Бухарским отделением института Математики АН РУз

Члены оргкомитета:

Ашуров Р.Р. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Хаётов А.Р. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Жамилов У.У. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Тахиров Ж.О. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Адилова Ф.Т. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Хусанбоев Ё.М. – институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Кудайбергенов К.К. – заведующий Каракалпакским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Рахматуллаев М.М. – заведующий Наманганским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Имомкулов С.А. – заведующий Хорезмским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор

Холхужаев А.М. – заведующий Самаркандским отделением института Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Бешимов Р.Б. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Зикиров О.С. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Омиров Б.А. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Шарипов О.Ш. – НУУз, д.ф.-м.н., профессор

Расулов Т.Х. – БухГУ, к.ф.-м.н., доцент

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:

Азамов А.А.	–	институт Математики АН РУз, академик
Алимов Ш.А.	–	НУУз, академик
Садуллаев А.С.	–	НУУз, академик
Лакаев С.Н.	–	СамГУ, академик
Фармонов Ш.К.	–	институт Математики АН РУз, академик

Члены программного комитета:

Абдуллаев Б.И.	–	УрГУ, д.ф.-м.н., профессор
Арипов М.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Арзикулов Ф.Н.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Артикбоев А.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Ганиходжаев Н.Н.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Ибрагимов Г.И.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Икромов И.А.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Исломов Б.	–	НУУз, д.ф.-м.н., профессор
Каримов Э.Т.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Мирахмедов Ш.А.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Рахимов И.С.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н., профессор
Саматов Б.Т.	–	НамГУ, д.ф.-м.н., профессор
Тешаев М.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Уринов А.К.	–	ФарГУ, д.ф.-м.н., профессор
Хакимов Р.М.	–	НамГУ, д.ф.-м.н.
Хасанов А.Б.	–	СамДУ, д.ф.-м.н., профессор
Худойбердиев А.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.
Шадиметов Х.М.	–	ТГТУ, д.ф.-м.н., профессор
Эшматов Ф.Х.	–	институт Математики АН РУз, д.ф.-м.н.

Секретариат конференции:

Бозоров З.Р., Дилмуродов Э.Б., Дурдиев У.Д., Жалолов О.И.

REFERENCES

1. O.Toeplitz. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., **2**:1-2 (1918), pp. 187–197.
2. F.Hausdorff. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., **3**:1 (1919), pp. 314–316.
3. P.R.Halmosh. Hilbert space problem book. vol. 19 of Grad. Texts in Math., Springer, New York, 2nd ed., 1982.

ESTIMATES FOR THE BOUNDS OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A 2×2 OPERATOR MATRIX

Dilmurodov E.B.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Bukhara, Uzbekistan
elyor.dilmurodov@mail.ru;

We study the essential spectrum of the 2×2 operator matrix of the form

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0$$

acting in the Hilbert space

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

with $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^{\rm d})$ and $\mathcal{H}_2 := L^2_{\rm sym}((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$. Here $\mathbb{T}^{\rm d}$ is the d-dimensional torus, the cube $(-\pi, \pi]^{\rm d}$ with appropriately identified sides equipped with its Haar measure and $L^2_{\rm sym}((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ stands for the subspace of $L^2((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ consisting of symmetric functions (with respect to the two variables). The matrix entries $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 1, 2$, are given by

$$(A_{11} f_1)(k_1) = w_1(k_1) f_1(k_1), \quad (A_{12} f_2)(k_1) = \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} f_2(k_1, t) dt,$$
$$(A_{22} f_2)(k_1, k_2) = w_2(k_1, k_2) f_2(k_1, k_2), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

Here $\mu > 0$ is a coupling constant, the functions $w_1(\cdot)$ and $w_2(\cdot, \cdot)$ have the form

$$w_1(k_1) := \varepsilon(k_1) + \gamma, \quad w_2(k_1, k_2) := \varepsilon(k_1) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k_1 + k_2)) + \varepsilon(k_2)$$

with $\gamma \in \mathbb{R}$ and the dispersion function $\varepsilon(\cdot)$ is defined by

$$\varepsilon(k_1) := \sum_{i=1}^{\rm d} (1 - \cos k_1^{(i)}),\ k_1 = (k_1^{(1)}, \ldots, k_1^{(\rm d)}) \in \mathbb{T}^{\rm d},$$

Let $H_0 := \mathbb{C}$. To study the spectral properties of the operator $\mathcal{A}_\mu$, we introduce the following auxiliary family of bounded self-adjoint operators (generalized Friedrichs models) $\mathcal{A}_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^{\rm d}$, which acts in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ as 2×2 operator matrices

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

with matrix elements

$$A_{00}f_0 = \gamma f_0, \quad (A_{01}f_1) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)dt,$$
$$(A_{11}(k)f_1)(k_1) = E_k(k_1)f_1(k_1), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1,$$

where the function $E_k(\cdot)$ is defined by

$$E_k(k_1) := \varepsilon(\frac{1}{2}(k + k_1)) + \varepsilon(k_1).$$

To simplify the notation we set

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} (\varepsilon(k) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k))), \quad \Sigma_\mu := [0; 6\mathrm{d}] \cup \Lambda_\mu.$$

Let

$$a_\mu^{\min} := \min \Sigma_\mu, \quad a_\mu^{\max} := \max \Sigma_\mu;$$
$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \text{ for } \gamma > 0;$$
$$\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{4\mathrm{d} - \gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)} \right)^{-1/2} \text{ for } \gamma < 4\mathrm{d}.$$

We can now state the detailed information on bounds of the essential spectrum of $\mathcal{A}_\mu$ for the case $\mathrm{d} \geq 3$ with respect to the spectral parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ and $\mu > 0$ [1]:

Case I. Let $\gamma \leq 0$. Then for any $\mu > 0$ we have

$$a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0;$$

moreover,

- $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (0; \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu > \mu_r^0(\gamma)$.

Case II. Let $\gamma \in (0; 2\mathrm{d}]$. Then

- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (-\infty; \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_l^0(\gamma); \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_r^0(\gamma); +\infty)$.

Case III. Let $\gamma \in (2\mathrm{d}; 4\mathrm{d})$. Then

- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (-\infty; \mu_r^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_r^0(\gamma); \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$ and $a_\mu^{\max} = \max \Lambda_\mu \geq \varepsilon(\overline{\pi}) + E_\mu^{(r)} > 6\mathrm{d}$, if $\mu \in (\mu_l^0(\gamma); +\infty)$.

Case IV. Let $\gamma \geq 4\mathrm{d}$. Then for any $\mu > 0$ we have $a_\mu^{\max} = 6\mathrm{d}$; moreover,

- $a_\mu^{\min} = 0$, if $\mu \in (0; \mu_l^0(\gamma)]$;
- $a_\mu^{\min} = \min \Lambda_\mu \leq \varepsilon(\overline{0}) + E_\mu^{(l)} < 0$, if $\mu > \mu_l^0(\gamma)$.

All assertions mentioned above play crucial role in the study of the number of discrete eigenvalues of $\mathcal{A}_\mu$ lying outside of its essential spectrum.

REFERENCES

1. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Estimates for the bounds of the essential spectrum of a operator matrix. Contemporary Mathematics. 1:4 (2020), P. 170-182

PERIODIC GROUND STATES CORRESPONDING TO SUBGROUPS OF INDEX THREE FOR THE ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER THREE

Egamov D. O.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
dilshodbekegamov87@gmail.com

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue(see [1]). Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l = \langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y), x, y \in V$ on the Cayley tree is the shortest path from x to y.

For the fixed $x^0 \in V$ (as usual, x^0 is called a root of the tree) we set

$$W_n = \{x \in V \ \mid \ d(x, x^0) = n\}.$$

We write $x < y$ if the path from x^0 to y goes through x and $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$.

It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i \neq e$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

At first, we give main definitions and facts about the Ising model. We consider models where the spin takes values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. For $A \subseteq V$ a spin *configuration* σ_A on A is defined as a function $x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$. Put $\Omega = \Omega_V$, $\sigma = \sigma_V$ and $-\sigma_A = \{-\sigma_A(x), x \in A\}$. Define a *periodic configuration* as a configuration $\sigma \in \Omega$ which is invariant under cosets of a subgroup $G_k^* \subset G_k$ of finite index.

The index of a subgroup is called the *period of the corresponding periodic configuration*. A configuration that is invariant with respect to all cosets is called *translation-invariant*.

Let $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ be a family of cosets, where G_k^* is a subgroup of index $r \geq 1$. We consider model which its spins take values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$.

The Ising model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y),$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ are coupling constants and $\sigma \in \Omega$.

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b.

Define the energy of a ball b for configuration σ by

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y), \quad x, y \in b,$$

Mundarija

I SHO‘BA: MATEMATIK ANALIZ

СЕКЦИЯ №1: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

SECTION No.1: MATHEMATICAL ANALYSIS