

Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского



Н. И. Лобачевский

Том 66

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

**XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"**

Сборник трудов

(Казань, 22 – 27 августа 2023 г.)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

ул. Кремлевская, 35, Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-944.

УДК 517

ББК 22.16

Научный редактор: С. Р. Насыров.

**Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 66
XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы",
Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2023. – Т. 66. – 310 с.**

В том вошли материалы XVI Международной Казанской школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", организованной на базе Института математики и механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Конференция проходила в Казани с 22 по 27 августа 2023 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и ее приложений.

© Научно-образовательный математический центр ПФО, 2023

© Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, 2023

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| <i>Н. Р. Абубакиров, М. Ю. Денисова.</i> Разрешимость и обратимость задач логарифмического потенциала | 12 |
| <i>Ф. Г. Авхадиев.</i> Универсальные интегральные неравенства для финитных функций в плоских и пространственных областях | 14 |
| <i>Ю. Р. Агачев, А. В. Гуськова.</i> О полиномиальных приближениях решения задачи Коши для одного дробного интегро-дифференциального уравнения | 16 |
| <i>Ю. Р. Агачев, М. Ю. Першагин.</i> Сходимость одного варианта метода механических квадратур для условно корректных интегро-дифференциальных уравнений | 18 |
| <i>Я. Н. Алиев.</i> О геометрических свойствах одной кривой, определенной нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением | 19 |
| <i>С. А. Алхалифах.</i> Специальное семейство аналитических функций и радиус Бора для таких функций | 21 |
| <i>А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов.</i> Проективные симметрии 5-мерных жестких H -Пространства типа $\{32\}$ | 23 |
| <i>И. А. Андреева, Т. О. Ефимова.</i> Качественная картина фазовых траекторий ряда семейств динамических систем | 25 |
| <i>О. Ю. Аристов.</i> Топологические свойства оболочек Аренса-Майкла полугрупповых алгебр | 27 |
| <i>С. В. Асташкин, К. В. Лыков.</i> Комбинаторная размерность хаоса Радемахера и его свойства типа безусловности | 29 |
| <i>С. Н. Асхабов.</i> Нелинейные интегральные уравнения с разностным ядром в весовых пространствах Лебега | 33 |
| <i>А. С. Афанасьева-Григорьева.</i> Асимптотика модуля пространственного конденсатора с переменными уровнями потенциала | 35 |
| <i>M. Akhmadiev, N. Alhasan, A. Bikchentaev, P. Ivanshin.</i> Commutators and hyponormal operators | 36 |
| <i>М. В. Балашов.</i> Внутренность интеграла от многозначного отображения | 38 |
| <i>Ш. А. Балгимбаева.</i> Функциональные пространства, связанные с пространствами Морри, на многомерном торе: декомпозиции и интерполяция | 40 |
| <i>Б. И. Бахронов.</i> Грани существенного спектра тензорной суммы моделей Фридрихса | 42 |
| <i>К. Е. Бахтин, Е. Г. Прилепкина.</i> Об отображающих свойствах обобщенной гипергеометрической функции | 44 |
| <i>Б. Б. Беднов.</i> Об ограниченных чебышёвских множествах | 46 |
| <i>С. И. Безродных.</i> Формулы типа Якоби для гипергеометрических функций и задача Римана — Гильберта | 48 |
| <i>Л. А. Бекларян, А. Л. Бекларян.</i> Дуализм в теории солитонных решений. Пример манхэттенской решетки | 51 |
| <i>М. С. Беспалов.</i> Вейвлетное действительное обобщение быстрого преобразования Хаара | 52 |

| | |
|---|----|
| <i>И. М. Буркин, О. И. Кузнецова.</i> Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье | 54 |
| <i>М. Ш. Бурлуцкая, Е. И. Григорьева.</i> О спектральных свойствах операторов с инволюцией на геометрических графах. | 56 |
| <i>А. В. Буробин.</i> Задача Коши для уравнений дробного порядка | 58 |
| <i>В. Б. Васильев.</i> Псевдодифференциальные операторы и уравнения на многообразиях с краем | 59 |
| <i>А. Н. Ветохин.</i> Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии динамических систем | 61 |
| <i>Ю. П. Вирченко.</i> Случайные множества со счетным пространством погружения | 63 |
| <i>С. К. Водопьянов.</i> Непрерывность открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно | 65 |
| <i>Н. С. Габбасов, З. Х. Галимова.</i> К приближенному решению интегральных уравнений с вырожденным коэффициентом | 68 |
| <i>О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина.</i> Быстро сходящиеся черновские аппроксимации C_0 -полугруппы, сгенерированной оператором второй производной | 71 |
| <i>М. М. Гарифуллин, С. Р. Насыров.</i> Конформные отображения неограниченных многоугольников | 73 |
| <i>Л. И. Гафиятуллина, Р. Г. Салахудинов.</i> Оценка жесткости кручения выпуклой области через геометрические функционалы области | 75 |
| <i>О. В. Гермидер, В. Н. Попов.</i> Математическое моделирование изгиба тонких изотропных пластин | 77 |
| <i>А. В. Гилёв.</i> О двух нелокальных задачах для уравнения Буссинеска-Лява | 78 |
| <i>С. А. Григорян, А. Ш. Шарафутдинов.</i> Градуировка скрещенного произведения полугрупповой алгебры | 80 |
| <i>Т. А. Григорян, А. Ш. Шарафутдинов.</i> "Вещественные" подалгебры C^* -алгебр | 81 |
| <i>К. А. Гуляева, Е. Г. Прилепкина.</i> Обобщенный приведенный модуль и асимптотика потенциальной функции | 83 |
| <i>Р. Н. Гумеров, Е. В. Липачева, К. А. Шишкин.</i> О полноте C^* -соотношений | 85 |
| <i>Э. Б. Дилмуродов.</i> Конечность дискретного спектра одной 2×2 операторной матрицы | 86 |
| <i>Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык.</i> Равенство p -емкости и p -модуля конденсатора в метрическом пространстве с p -ограниченной геометрией | 89 |
| <i>А. Ю. Дютин, С. Р. Насыров.</i> Однопараметрические семейства конформных отображений ограниченных двусвязных многоугольных областей | 90 |
| <i>М. А. Еловенкова, А. Н. Печень.</i> Использование измерений для управления трехуровневой квантовой системой с динамической симметрией | 91 |
| <i>Л. С. Ефремова.</i> Введение в теорию вполне геометрически интегрируемых отображений в высоких размерностях | 93 |
| <i>Д. Х. Жумаева.</i> Существование собственных значений решетчатой модели спин-бозон с не более чем одним фотоном | 94 |
| <i>Ч. И. Жумаева.</i> О собственных значениях модели Фридрихса с трехмерным возмущением. | 96 |
| <i>Э. Заарур.</i> Состоятельность эмпирического аналога байесовской оценки | 98 |

C4: для любого непустого множества Λ , если $f_\lambda: X \rightarrow A_\lambda$ – объект \mathcal{R} для любого $\lambda \in \Lambda$, то

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda: X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

также объект категории \mathcal{R} .

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 2.10 из [1].

Предложение. Пусть X – множество и \mathcal{R} – C^* -соотношение на множестве X . C^* -соотношение \mathcal{R} компактно тогда и только тогда, когда в \mathcal{R} существует инициальный объект.

В [2] было показано, что всякое компактное C^* -соотношение изоморфно категории $*$ -полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной C^* -алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов.

В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. Всякое компактное C^* -соотношение \mathcal{R} является полной и кополной категорией.

Литература

1. Loring T.A. C^* -algebra relations // Math. Scand. – 2010. – V. 107. – P. 43–72.
2. Berdnikov I. S., Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A. On C^* -algebra and $*$ -polynomial relations // Lobachevskii J. Math. – 2023. – V. 44. – P. 1988–1995.

ON THE COMPLETENESS OF C^* -RELATIONS

R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, K. A. Shishkin

The categorical approach to the notion of the universal C^ -algebra generated by a set of generators subject to relations has been proposed by T.A. Loring. In the framework of this approach one deals with categories which are called C^* -relations. The report is concerned with the completeness of the compact C^* -relations.*

Keywords: C^* -relation, universal C^* -algebra, complete category, cocomplete category.

УДК 517.984

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 2×2 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Э. Б. Дилмуродов¹

¹ elyor.dilmurodov@mail.ru; e.b.dilmurodov@buxdu.uz; Бухарский государственный университет и Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается 2×2 операторной матрицы \mathcal{A}_μ ($\mu > 0$ – параметр взаимодействия), связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке. Установлена конечность дискретного спектра оператора \mathcal{A}_μ .

Ключевые слова: операторная матрица, существенный спектр, дискретный спектр.

Через $\mathbb{T}^d := (-\pi, \pi]^3$ обозначим трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbb{T}^3 и $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$. Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. В гильбертовом пространстве \mathcal{H} рассматривается 2×2 операторная матрица

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i \leq j, i, j = 1, 2$, определяются по формулам

$$(A_{11}f_1)(k) = w_1(k)f_1(k), \quad (A_{12}f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k, t) dt, \quad (A_{22}f_2)(k, p) = w_2(k, p)f_2(k, p),$$

где $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 1, 2$, и A_{12}^* сопряженный оператор к A_{12} . Здесь $\mu > 0$ –параметр взаимодействия и $w_1(k) := \varepsilon(k) + \gamma, w_2(k, p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(1/2 \cdot (k + p)) + \varepsilon(p)$ с $\gamma \in \mathbb{R}$ и функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением $\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^3 (1 - \cos k_i), k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$.

В этих предположениях операторная матрица \mathcal{A}_μ является ограниченной и самосопряженной в \mathcal{H} .

Введем семейство ограниченных самосопряженных операторов (семейство обобщенных моделей Фридрихса) $\mathcal{A}_\mu(k), k \in \mathbb{T}^3$, действующую в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$) по правилу

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$A_{00}(k)f_0 = w_1(k)f_0, \quad A_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t) dt, \quad (A_{11}(k)f_1)(p) = w_2(k, p)f_1(p), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1.$$

Используя известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем, что для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определены как

$$m(k) := \min_{p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p), \quad M(k) := \max_{p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p).$$

Простые вычисления показывают, что функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум (соот. максимум) в точке $(\bar{0}, \bar{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$ (соот. $(\bar{\pi}, \bar{\pi}) \in (\mathbb{T}^3)^2$) и

$$\min_{k, p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p) = w_2(\bar{0}, \bar{0}) = 0, \quad \max_{k, p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p) = w_2(\bar{\pi}, \bar{\pi}) = 18, \quad \bar{0} := (0, 0, 0), \quad \bar{\pi} := (\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{T}^3.$$

Очевидно, что $\min\{\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 0$ и $\max\{\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 18$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k))$ функцию

$$I(k; z) := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(k, t) - z}.$$

С использованием принципа Бирмана-Шивенгера и теоремы Фредгольма можно легко утверждать, что для дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ имеет место равенство [1]

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)] : w_1(k) - z - \mu^2/2 \cdot I(k; z) = 0\}.$$

Положим $\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k))$.

С помощью свойств функции $w_2(\cdot, \cdot)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что интеграл $I(\bar{0}; 0)$ конечен, см. [1].

Пусть

$$\begin{aligned} \mu_l^0(\gamma) &:= \sqrt{2\gamma} (I(\bar{0}, 0))^{-1/2} \quad \text{для } \gamma > 0; & \mu_r^0(\gamma) &:= \sqrt{24 - 2\gamma} (I(\bar{0}, 0))^{-1/2} \quad \text{для } \gamma < 12; \\ E_\mu^{(1)} &:= \min \{\Lambda_\mu \cap (-\infty; 0]\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_l^0(\gamma); & E_\mu^{(2)} &:= \max \{\Lambda_\mu \cap [18; \infty)\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_r^0(\gamma). \end{aligned}$$

Теорема. 1) Пусть либо $\gamma \geq 12$, $\mu > 0$ либо $\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$ для любого $\gamma < 12$. Тогда операторная матрица \mathcal{A}_μ имеет конечное число собственных значений, лежащих правее $E_\mu^{(2)}$.

2) Пусть либо $\gamma \leq 0$, $\mu > 0$ либо $\mu \neq \mu_l^0(\gamma)$ для любого $\gamma > 0$. Тогда операторная матрица \mathcal{A}_μ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее $E_\mu^{(1)}$.

Литература

1. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019. – V. 25. – № 3. – P. 273–281.

FINITENESS OF THE DISCRETE SPECTRUM OF A 2×2 OPERATOR MATRIX

E. B. Dilmurodov

We consider the 2×2 operator matrix \mathcal{A}_μ ($\mu > 0$ – coupling parameter) associated with is the Hamiltonian system with no more than three particles on the lattice. The finiteness of the discrete spectrum of the operator \mathcal{A}_μ has been established.

Keywords: operator matrix, essential spectrum, discrete spectrum.