Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 66

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

XVI Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”

Сборник трудов

(*Казань, 22 – 27 августа 2023 г.*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

ул. Кремлевская, 35, Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-944.

УДК 517
ББК 22.16

Научный редактор: С. Р. Насыров.

Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 66
XVI Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, ее приложения и смежные вопросы",
Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2023. – Т. 66. – 310 с.

В том вошли материалы XVI Международной Казанской школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", организованной на базе Института математики и механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Конференция проходила в Казани с 22 по 27 августа 2023 года.
Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и ее приложений.

СОДЕРЖАНИЕ

C4: для любого непустого множества Λ, если $f_\lambda\colon X \to A_\lambda$ – объект $\mathscr{R}$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\colon X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

также объект категории $\mathscr{R}$.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 2.10 из [1].

Предложение. *Пусть X – множество и $\mathscr{R}$ – C*-соотношение на множестве X. C*-соотношение $\mathscr{R}$ компактно тогда и только тогда, когда в $\mathscr{R}$ существует инициальный объект.*

В [2] было показано, что всякое компактное C*-соотношение изоморфно категории *-полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной C*-алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов.

В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. *Всякое компактное C*-соотношение $\mathscr{R}$ является полной и кополной категорией.*

Литература

1. *Loring T.A.* C*-algebra relations // Math. Scand. – 2010. – V. 107. – P. 43–72.

2. *Berdnikov I. S., Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A.* On C*-algebra and *-polynomial relations // Lobachevskii J. Math. – 2023. – V. 44. – P. 1988–1995.

ON THE COMPLETENESS OF C*-RELATIONS

R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, K. A. Shishkin

The categorical approach to the notion of the universal C-algebra generated by a set of generators subject to relations has been proposed by T.A. Loring. In the framework of this approach one deals with categories which are called C*-relations. The report is concerned with the completeness of the compact C*-relations.*

Keywords: C*-relation, universal C*-algebra, complete category, cocomplete category.

УДК 517.984

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОЙ 2×2 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Э. Б. Дилмуродов[1]

1 *elyor.dilmurodov@mail.ru; e.b.dilmurodov@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет и Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан.

Рассматривается 2×2 операторной матрицы $\mathscr{A}_\mu$ ($\mu > 0$ – параметр взаимодействия), связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке. Установлена конечность дискретного спектра оператора $\mathscr{A}_\mu$.

Ключевые слова: операторная матрица, существенный спектр, дискретный спектр.

Через $\mathbb{T}^d := (-\pi, \pi]^3$ обозначим трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$. Обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумма пространств $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассматривается 2×2 операторная матрица

$$\mathscr{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

где матричные элементы $A_{ij} : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i \le j$, $i, j = 1, 2$, определяются по формулам

$$(A_{11} f_1)(k) = w_1(k) f_1(k), \quad (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k, t)\, dt, \quad (A_{22} f_2)(k, p) = w_2(k, p) f_2(k, p),$$

где $f_i \in \mathscr{H}_i, i = 1, 2$, и A_{12}^* сопряженный оператор к A_{12}. Здесь $\mu > 0$–параметр взаимодействия и $w_1(k) := \varepsilon(k) + \gamma, w_2(k, p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(1/2 \cdot (k + p)) + \varepsilon(p)$ с $\gamma \in \mathbb{R}$ и функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением $\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3} (1 - \cos k_i)$, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$.

В этих предположениях операторная матрица $\mathscr{A}_\mu$ является ограниченной и самосопряженной в $\mathscr{H}$.

Введем семейство ограниченных самосопряженных операторов (семейство обобщенных моделей Фридрихса) $\mathscr{A}_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, действующую в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ ($\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$) по правилу

$$\mathscr{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$A_{00}(k) f_0 = w_1(k) f_0,\ A_{01} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)\, dt, \quad (A_{11}(k) f_1)(p) = w_2(k, p) f_1(p), f_i \in \mathscr{H}_i, i = 0, 1.$$

Используя известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга имеем, что для существенного спектра оператора $\mathscr{A}_\mu(k)$ справедливо равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) = [m(k); M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определены как

$$m(k) := \min_{p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p), \quad M(k) := \max_{p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p).$$

Простые вычисления показывают, что функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум (соот. максимум) в точке $(\overline{0}, \overline{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$ (соот. $(\overline{\pi}, \overline{\pi}) \in (\mathbb{T}^3)^2$) и

$$\min_{k, p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p) = w_2(\overline{0}, \overline{0}) = 0,\ \max_{k, p \in \mathbb{T}^3} w_2(k, p) = w_2(\overline{\pi}, \overline{\pi}) = 18, \overline{0} := (0, 0, 0), \overline{\pi} := (\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{T}^3.$$

Очевидно, что $\min\{\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 0$ и $\max\{\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}_\mu(k)) : k \in \mathbb{T}^3\} = 18$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k))$ функцию

$$I(k;z) := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(k,t)-z}.$$

С использованием приципа Бирмана-Шивенгера и теоремы Фредгольма можно легко утверждать, что для дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ имеет место равенство [1]

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)] : w_1(k) - z - \mu^2/2 \cdot I(k;z) = 0\}.$$

Положим $\Lambda_\mu := \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k))$.

С помощью свойств функции $w_2(\cdot,\cdot)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что интеграл $I(\bar{0};0)$ конечен, см. [1].

Пусть

$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{2\gamma}\,\big(I(\bar{0},0)\big)^{-1/2} \quad \text{для } \gamma > 0; \quad \mu_r^0(\gamma) := \sqrt{24-2\gamma}\,\big(I(\bar{0},0)\big)^{-1/2} \text{ для } \quad \gamma < 12;$$
$$E_\mu^{(1)} := \min\{\Lambda_\mu \cap (-\infty;0]\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_l^0(\gamma); \quad E_\mu^{(2)} := \max\{\Lambda_\mu \cap [18;\infty)\} \quad \text{для } \mu \geq \mu_r^0(\gamma).$$

Теорема. 1) *Пусть либо* $\gamma \geq 12$, $\mu > 0$ *либо* $\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma < 12$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих правее* $E_\mu^{(2)}$.

2) *Пусть либо* $\gamma \leq 0$, $\mu > 0$ *либо* $\mu \neq \mu_l^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma > 0$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих левее* $E_\mu^{(1)}$.

Литература

1. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019. – V. 25. – № 3. – P. 273–281.

FINITENESS OF THE DISCRETE SPECTRUM OF A 2×2 OPERATOR MATRIX

E. B. Dilmurodov

We consider the 2×2 *operator matrix* $\mathcal{A}_\mu$ *(*$\mu > 0$ *– coupling parameter) associated with is the Hamiltonian system with no more than three particles on the lattice. The finiteness of the discrete spectrum of the operator* $\mathcal{A}_\mu$ *has been established.*

Keywords: operator matrix, essential spectrum, discrete spectrum.