ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 205, № 3
декабрь, 2020

 Т. Х. Расулов[∗†], **Э. Б. Дилмуродов**[∗†]

БЕСКОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ (2×2)-МАТРИЦ. АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Изучается неограниченная операторная (2×2)-матрица $\mathcal{A}$ в прямой сумме двух гильбертовых пространств. Получены асимптотические формулы для числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}$. Рассматривается операторная (2×2)-матрица $\mathcal{A}_\mu$ ($\mu>0$ – параметр взаимодействия), ассоциированная гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке $\mathbb{Z}^3$. Найдено критическое значение μ_0 параметра взаимодействия μ, при котором оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}$ имеет бесконечное число собственных значений. Эти значения накапливаются к нижней и верхней граням существенного спектра. Получена асимптотика для числа таких собственных значений, лежащих как в левой, так и в правой части существенного спектра.

Ключевые слова: операторная матрица, параметр взаимодействия, функция дисперсии, пространство Фока, операторы рождения и уничтожения, принцип Бирмана–Швингера, существенный и дискретный спектры, асимптотика.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9898

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства. Известно, что любой линейный ограниченный оператор $\mathcal{A}$, действующий в прямой сумме $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, представляется как

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы A_{ij} являются линейными ограниченными операторами из $\mathcal{H}_j$ в $\mathcal{H}_i$, т. е. $A_{ij}\in L(\mathcal{H}_j,\mathcal{H}_i)$, $i,j\in\{1,2\}$. Оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда $A_{11}=A_{11}^*$, $A_{22}=A_{22}^*$ и $A_{21}=A_{12}^*$. Обычно

[∗]Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.
E-mail: rth@mail.ru, elyor.dilmurodov@mail.ru

[†]Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского, Бухара, Узбекистан

матрицы такого рода, т. е. матрицы, элементы которых являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах, называются операторными (2×2)-матрицами [1]. Один из основных классов таких матриц представляют собой гамильтонианы системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на непрерывном пространстве или на решетке. Такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела [2], квантовой теории поля [3] и статистической физики [4].

В настоящее время дискретный спектр операторных матриц относится к наиболее интенсивно изучаемым объектам в теории линейных операторов. Одним из важных вопросов в спектральном анализе таких операторов является вопрос о бесконечном числе собственных значений, лежащих левее нижнего края и правее верхнего края существенного спектра (такой эффект, касающийся левого края, называется эффектом Ефимова, см., например, [5]–[7]). Эффект Ефимова [8] представляет одну из наиболее ярких и интересных особенностей системы трех тел, в отличие от системы двух тел; впервые он был обнаружен для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера. Этот эффект возникает в случае, когда хотя бы в двух парных взаимодействиях трехчастичной системы появляются слабосвязанные состояния с близкой к нулю энергией связи. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова в непрерывном случае было проведено в работе [9], затем в работах [10], [11] и др. Основным результатом работы [10] (см. также [11]) является получение асимптотики вида $\mathcal{U}_0|\ln|z||$ для числа собственных значений трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, лежащих левее z, $z<0$, где коэффициент $\mathcal{U}_0$ не зависит от двухчастичных потенциалов v_α и является положительной функцией частных m_1/m_2, m_2/m_3 масс трех частиц.

Для системы трех частиц на целочисленной решетке строгое доказательство существования эффекта Ефимова изложено в работах [12], [13], а затем в работах [14]–[17], причем в статьях [15]–[17] получена аналогичная непрерывному случаю асимптотика дискретного спектра системы трех частиц на решетке. Следует отметить, что в работах [5]–[7] доказано существование такого эффекта для матричных операторов в пространстве Фока, в статье [5] получена асимптотика дискретного спектра этого оператора. В работах [18]–[20] для операторных матриц найдены условия, гарантирующие существование бесконечного числа собственных значений, лежащих внутри существенного спектра (в лакуне существенного спектра, ниже существенного спектра). Настоящая статья посвящена исследованию ранее не изученного так называемого *двустороннего эффекта Ефимова*.

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен изучению класса самосопряженных неограниченных операторных (2×2)-матриц вида $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$, действующих в прямой сумме двух гильбертовых пространств. Сначала обсуждается случай, когда разность резольвент операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ имеет конечный ранг, затем изучается случай, когда оператор возмущения $\mathcal{V}$ есть самосопряженный неограниченный оператор с условием $\max\sigma(A_{11}) < \min\sigma(A_{22})$. В отличие от упомянутых выше работ, здесь при некоторых естественных предположениях получены асимптотические формулы для числа собственных значений оператора $\mathcal{A}$, лежащих вне существенного спектра.

В разделе 3 изучается спектр семейства операторных (2×2)-матриц $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Доказана бесконечность числа собственных значений, лежащих в лакуне существенного спектра оператора $\mathcal{A}_0$, сходящихся к обоим концам существенного спектра. Установлена конечность числа собственных значений оператора $\mathcal{A}_t$ при каждом $t \neq 0$.

Найдено число $\delta > 0$, для которого операторная матрица $\mathcal{A}_t$ не имеет собственных значений при каждом $t \in \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \geqslant \delta\}$.

В разделе 4 рассматривается операторная (2×2)-матрица $\mathcal{A}_\mu$ ($\mu > 0$ – параметр взаимодействия), действующая в прямой сумме одночастичного и двухчастичного подпространств бозонного фоковского пространства, в случае специального вида функции w_2, являющейся параметром оператора A_{22}. Получены следующие результаты:

• описан существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектра семейств обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3 :\equiv (-\pi; \pi]^3$, и выделены новые ветви спектра;

• найдено критическое значение μ_0 параметра взаимодействия μ, при котором оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}$ одновременно имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней (равной 0) и верхней (равной 18) граням существенного спектра. Более того, получена асимптотика для числа собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$, лежащих левее $z \leqslant 0$, и правее $z \geqslant 18$, по спектральному параметру $z \to -0$ и $z \to 18 + 0$ соответственно.

В разделе 5 исследуется оператор энергии системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке (в случае не более трех частиц). Пользуясь результатами разделов 2, 4, мы получили существенный и дискретный спектры этого оператора.

Следует отметить, что в непрерывном случае двухчастичная и трехчастичная ветви непрерывного спектра оператора, рассмотренные в работах [21], [22], представляют собой полуоси и эти полуоси пересекаются. В данном случае, в отличие от непрерывного случая двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра матричного оператора $\mathcal{A}$ заполняют отрезки конечной длины. Поэтому вывод о существовании бесконечного числа собственных значений, лежащих как левее существенного спектра оператора $\mathcal{A}$, так и правее, характерен только для решетчатых моделей и не имеет аналога в непрерывном случае. Замечательность полученного результата состоит в том, что для числа собственных значений, лежащих левее и правее существенного спектра, имеется одинаковая логарифмическая асимптотика. Заметим, что во всех работах, посвященных существованию эффекта Ефимова для дискретного оператора Шредингера (см., например, [12]–[17]) и для матричных операторов (см., например, [5]–[7], [18]–[20]), изучено число собственных значений, лежащих левее трехчастичной ветви существенного спектра. С этой точки зрения результаты настоящей работы являются новыми.

Мы используем следующие обозначения: $D(B)$ – область определения линейного оператора B, $\sigma(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\,\cdot\,)$, $\sigma_{\mathrm{disc}}(\,\cdot\,)$ и $\rho(\,\cdot\,)$ – соответственно спектр, существенный спектр, дискретный спектр и резольвентное множество линейного самосопряженного оператора.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА КЛАССА САМОСОПРЯЖЕННЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ (2×2)-МАТРИЦ

2.1. Основные условия. Прежде всего напомним, что, в отличие от ограниченного случая, область определения линейного неограниченного оператора $\mathcal{A}$, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, не обязательно имеет вид разложения $D = D_1 \oplus D_2$ ($D_1 \subset \mathcal{H}_1$, $D_2 \subset \mathcal{H}_2$). Как результат в этом случае имеются дополнительные требования: во-первых, оператор $\mathcal{A}$ должен иметь вид операторной (2×2)-матрицы, во-вторых, его область определения должна иметь вид

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

В данном случае $\mathcal{A}$ является неограниченной операторной (2×2)-матрицей.

В настоящем разделе рассмотрим операторную (2×2)-матрицу $\mathcal{A}$ вида (1) в прямой сумме $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ со следующими условиями: $A_{11}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор, $A_{12}\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ – линейный ограниченный оператор, $A_{21} = A_{12}^*$, и $A_{22}\colon \mathcal{H}_2 \supset D(A_{22}) \to \mathcal{H}_2$ – линейный неограниченный самосопряженный оператор с ограниченным существенным спектром. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является линейным самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_1 \oplus D(A_{22})$. Используя информацию о матричных элементах, исследуем ряд спектральных свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Введем в $\mathcal{H}$ блочно-операторные матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$ такие, что $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$ и $D(\mathcal{V}) = \mathcal{H}$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ записывается как $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$.

Рассмотрим случай, когда для некоторого значения (и следовательно, для всех) $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ разность резольвент имеет конечный ранг:

$$\mathcal{T} := (\mathcal{A} - zI)^{-1} - (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{T} = \dim R(\mathcal{T}) = r < \infty, \tag{2}$$

где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда (даже если $\mathcal{T}$ только компактно) в силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [23]) имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0)$. При этом оператор $\mathcal{A}$ также имеет ограниченный существенный спектр. Рассмотрим типичный пример, когда выполняется условие (2).

Лемма 1. *Если* $\operatorname{rank} \mathcal{V} = r < \infty$, *то имеет место условие* (2).

Доказательство. Легко можно проверить, что если $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$, то

$$\mathcal{T} = (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{V} (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1} \tag{3}$$

и $(\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}$, $(\mathcal{A} - zI)^{-1}$ являются ограниченными операторами. Теперь, используя соотношение для ранга произведения ограниченных операторов

$$\operatorname{rank}(A_1 A_2 \cdots A_n) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A_1, \operatorname{rank} A_2, \dots, \operatorname{rank} A_n\},$$

имеем $\operatorname{rank} \mathcal{T} \leqslant \operatorname{rank} \mathcal{V}$. Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Если* $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ *и оператор* $\mathcal{V}(\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}$ *является компактным, то оператор* $\mathcal{T}$ *также является компактным.*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из ограниченности оператора $(\mathcal{A} - zI)^{-1}$ при $z \in \rho(\mathcal{A})$ и из соотношения (3). ■

Замечание 1. Из определения оператора $\mathcal{V}$ видно, что он имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда операторы A_{11}, A_{12} имеют конечный ранг.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $X_1 := \mathbb{C}$, $X_2 := L^2[-\pi,\pi]$, $X_3 := l^2(\mathbb{N})$, где

$$l^2(\mathbb{N}) := \Big\{x = (x_1,\dots,x_n,\dots)\colon x_k \in \mathbb{C},\, k \in \mathbb{N},\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\Big\}.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$, действующий в гильбертовом пространстве $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ как операторная (3×3)-матрица:

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12}^* & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы определяются следующим образом:

$$B_{11}f_1 = w_1 f_1, \qquad B_{12}f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f_2(t)\,dt, \qquad f_1 \in \mathbb{C}, \quad f_2 \in L^2[-\pi,\pi],$$
$$(B_{22}f_2)(x) = w_2(x) f_2(x), \qquad B_{33}f_3 = (f_{31}, 2f_{32}, \dots, nf_{3n}, \dots),$$
$$f_3 = (f_{31},\dots,f_{3n},\dots) \in l^2(\mathbb{N}).$$

При этом w_1 – фиксированное вещественное число, $v(\,\cdot\,)$ и $w_2(\,\cdot\,)$ – вещественнозначные непрерывные функции на интервале $[-\pi,\pi]$. Очевидно, что

$$(B_{12}^* f_1)(x) = v(x) f_1, \qquad f_1 \in \mathbb{C},$$

и

$$D(B_{22}) = \Big\{f_3 = (f_{31}, f_{32},\dots,f_{3n},\dots) \in l^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} |nf_{3n}|^2 < \infty\Big\}.$$

Обозначим $\mathcal{H}_1 := X_1$, $\mathcal{H}_2 := X_2 \oplus X_3$,

$$A_{11} := B_{11}, \qquad A_{12} := (B_{12}\,0), \qquad A_{22} := \begin{pmatrix} B_{22} & 0 \\ 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

тогда операторная (3×3)-матрица $\mathcal{B}$ записывается как блочно-операторная матрица вида (1) размера 2×2, а также имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = [m; M]$ и $\operatorname{rank}\mathcal{V} = 2$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{x\in[-\pi,\pi]} w_2(x), \qquad M := \max_{x\in[-\pi,\pi]} w_2(x).$$

Тем самым имеет место условие (2).

2.2. Асимптотика дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$. Для интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ подпространство $E_\Delta(\mathcal{A})$ означает спектральное подпространство оператора $\mathcal{A}$, соответствующее интервалу Δ. Обозначим через $\sharp\{\,\cdot\,\}$ мощность множества и через $N_{(a,b)}(\mathcal{A})$ число собственных значений оператора $\mathcal{A}$, с учетом кратности, лежащих в $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$, т. е.

$$N_{(a,b)}(\mathcal{A}) = \dim E_{(a,b)}(\mathcal{A})\mathcal{H}.$$

Одним из основных результатов настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ удовлетворяют условию (2); предположим, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ имеет следующий вид*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0) = \bigcup_{n=1}^{m} [a_{2n-1}, a_{2n}], \tag{4}$$

$a_1 < a_2 < \dots < a_{2m}$ и $m < \infty$. Пусть a_0 и a_{2m+1} – фиксированные вещественные числа, для которых справедливы условия $a_0 < a_1$ и $a_{2m+1} > a_{2m}$. Тогда для любых $n = 0, \dots, m$ имеем

$$\sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}) \cap (a_{2n}, a_{2n+1})) = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_0) \cap (a_{2n}, a_{2n+1})) = \infty.$$

В этом случае обе точки a_{2n}, a_{2n+1} являются точками накопления собственных значений и

$$\lim_{z \nearrow a_{2n+1}} \frac{N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A})}{N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A}_0)} = \lim_{z \searrow a_{2n}} \frac{N_{(z, a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A})}{N_{(z, a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0)} = 1, \tag{5}$$

где $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.

Доказательство. Пусть $n = 0, \dots, m$. Из условия (2), в частности, следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0)$. Следовательно, для любого $z \in (a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$ имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0) \cap [a_{2n} + \delta_n, z] = \varnothing.$$

Это означает, что для таких z оба числа $N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A}_0)$ и $N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A})$ являются конечными. В силу теоремы 9.3.3 из [24] получим

$$N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A}_0) - r \leqslant N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A}) \leqslant N_{(a_{2n}+\delta_n, z)}(\mathcal{A}_0) + r \tag{6}$$

для $z \in (a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$.

Аналогично можно показать, что

$$N_{(z, a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0) - r \leqslant N_{(z, a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}) \leqslant N_{(z, a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0) + r \tag{7}$$

для $z \in (a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n)$.

Из оценок (6) и (7), а также из конечности числа r следует, что если оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечно много собственных значений в интервале (a_{2n}, a_{2n+1}), накапливающихся к обоим концам этого интервала, то такое утверждение верно для оператора $\mathcal{A}$ в интервале (a_{2n}, a_{2n+1}), справедливо и обратное утверждение.

Соотношение (5) вытекает из оценок (6) и (7). Теорема доказана. ■

2.3. Случай знако-определенных возмущений. Часто приходится рассматривать положительные или отрицательные компактные возмущения оператора $\mathcal{A}_0$. Следующая теорема показывает, что конечность или бесконечность дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_0$ сохраняется при таких возмущениях.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{V}$ – компактный оператор с условием $\mathcal{V} > 0$ (соответственно $\mathcal{V} < 0$) и для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_0$ имеет место равенство (4). Если дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ в интервале $(a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$ (соответственно $(a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n)$) конечен (бесконечен), то такое же утверждение верно для оператора $\mathcal{A}$ в $(a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1})$ (соответственно $(a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n)$), где $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} > 0$ и оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечное число собственных значений в интервале $(a_{2n} + \delta_n,\, a_{2n+1})$, накапливающихся к a_{2n+1}. Тогда в силу теоремы 9.4.7 из книги [24] аналогичный факт справедлив для оператора $\mathcal{A}$. Так как

$$[a_{2n} + \delta_n, a_{2n+1}) \cap \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_0) = \varnothing, \qquad (a_{2n}, a_{2n+1} - \delta_n] \cap \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}_0) = \varnothing,$$

точки $a_{2n} + \delta_n$ и $a_{2n+1} - \delta_n$ не являются точками накопления собственных значений операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$.

Случай $\mathcal{V} < 0$ доказывается аналогично случаю $\mathcal{V} > 0$. ■

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ (2×2)-МАТРИЦ

Пусть $\mathcal{H}_i'$, $i = 1, 2$, – произвольные гильбертовы пространства и $\mathcal{H}_i := l^2(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{H}_i'$, $i = 1, 2$. Рассмотрим следующие операторные (2×2)-матрицы $A_{ij} \colon \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$:

$$A_{11} := \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{11}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} := \begin{pmatrix} A_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{22} := \begin{pmatrix} A_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}, A_{22}^{(1)} \colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ определены по формулам

$$\begin{aligned} A_{11}^{(1)}(x_1, \dots, x_n, \dots) &= (a_{11}^{(1,1)} x_1, \dots, a_{11}^{(1,n)} x_n, \dots), \\ A_{12}^{(1)}(x_1, \dots, x_n, \dots) &= (a_{12}^{(1,1)} x_1, \dots, a_{12}^{(1,n)} x_n, \dots), \\ A_{22}^{(1)}(x_1, \dots, x_n, \dots) &= (a_{22}^{(1,1)} x_1, \dots, a_{22}^{(1,n)} x_n, \dots); \end{aligned}$$

здесь $(x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2(\mathbb{N})$, а операторы $A_{11}^{(2)} \colon \mathcal{H}_1' \to \mathcal{H}_1'$ и $A_{22}^{(2)} \colon \mathcal{H}_2' \to \mathcal{H}_2'$ – произвольные линейные самосопряженные операторы, удовлетворяющие условиям

$$\sigma(A_{11}^{(2)}) = \sigma_{\rm ess}(A_{11}^{(2)}) = (-\infty, a_{11}^{(2)}], \qquad \sigma(A_{22}^{(2)}) = \sigma_{\rm ess}(A_{22}^{(2)}) = [a_{22}^{(2)}, \infty)$$

для некоторых $a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)} \in \mathbb{R}$. Дополнительно будем предполагать, что последовательности $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^\infty$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_{11}^{(1,n)} = a_{11}^{(2)}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{22}^{(1,n)} = a_{22}^{(2)}, \qquad a_{11}^{(1,n)} > a_{11}^{(2)}, \quad a_{22}^{(1,n)} < a_{22}^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{12}^{(1,n)} = a_{12}^{(1)} \qquad (a_{12}^{(1)} \neq 0), \qquad \sup_n a_{11}^{(1,n)} < \inf_n a_{22}^{(1,n)}.$$

Отметим, что в этих предположениях $a_{11}^{(2)} < a_{22}^{(2)}$.

Воспользовавшись элементами функционального анализа, можно показать, что операторы $A_{11}^{(1)}$, $A_{12}^{(1)}$ и $A_{22}^{(1)}$ являются ограниченными, причем операторы $A_{11}^{(1)}$ и $A_{22}^{(1)}$ являются самосопряженными. Самосопряженность оператора $A_{12}^{(2)}$ зависит от $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^\infty$. Если $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$, то $A_{12}^{(1)}$ является самосопряженным, в противном случае он является несамосопряженным оператором.

Из условий, налагаемых на операторы $A_{11}^{(2)}$ и $A_{22}^{(2)}$, видно, что они являются самосопряженными полуограниченными операторами, точнее, оператор $A_{11}^{(2)}$ ограничен сверху, а оператор $A_{22}^{(2)}$ ограничен снизу.

Пусть $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Рассмотрим семейство операторных (2×2)-матриц $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, следующего вида:

$$\mathcal{A}_t := \begin{pmatrix} A_{11} & tA_{12} \\ tA_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Учитывая условия, налагаемые на операторы A_{11}, A_{12}, A_{22}, можно показать, что оператор $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, является самосопряженным неограниченным оператором и

$$D(\mathcal{A}_t) := (l^2(\mathbb{N}) \oplus D(A_{11}^{(2)})) \oplus (l^2(\mathbb{N}) \oplus D(A_{22}^{(2)})).$$

Из определения оператора $\mathcal{A}_0$ видно, что $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22})$.

Следующая лемма описывает расположение спектров операторов A_{11} и A_{22}.

Лемма 3. *Для спектра операторов A_{11} и A_{22} имеет место неравенство*

$$\max \sigma(A_{11}) < \min \sigma(A_{22}).$$

Доказательство. Из определения операторов A_{11} и A_{22} вытекает, что

$$\sigma(A_{11}) = (-\infty, a_{11}^{(2)}] \cup \{a_{11}^{(1,1)}, \dots, a_{11}^{(1,n)}, \dots\},$$
$$\sigma(A_{22}) = [a_{22}^{(2)}, \infty) \cup \{a_{22}^{(1,1)}, \dots, a_{22}^{(1,n)}, \dots\}.$$

По предположению

$$\sup_n a_{11}^{(1,n)} < \inf_n a_{22}^{(1,n)}.$$

Доказательство леммы вытекает из фактов о спектре операторов A_{11} и A_{22} и последнего неравенства. ■

Теперь наряду с оператором $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, рассмотрим семейство ограниченных самосопряженных операторов $\mathcal{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$, вида

$$V_t := \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & tA_{12}^{(1)} \\ t(A_{12}^{(1)})^* & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} : l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N}).$$

Следующая теорема описывает точный вид спектра оператора $\mathcal{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для дискретного и существенного спектров оператора $\mathcal{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{V}_t) = \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty}, \qquad \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{V}_t) = \{\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{\pm}(t)\},$$

где числа $\lambda_n^{\pm}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, определены по формуле

$$\lambda_n^{\pm}(t) := \frac{a_{11}^{(1,n)} + a_{22}^{(1,n)} \pm \sqrt{(a_{11}^{(1,n)} - a_{22}^{(1,n)})^2 + 4t^2 |a_{12}^{(1,n)}|^2}}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение для собственного значения

$$\mathcal{V}_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

которое эквивалентно системе уравнений

$$(A_{11}^{(1)}-\lambda E)x+tA_{12}^{(1)}y=0,$$
$$t(A_{12}^{(1)})^*x+(A_{22}^{(1)}-\lambda E)y=0,$$

где E – единичный оператор в $l^2(\mathbb{N})$. Последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{aligned}&(a_{11}^{(1,n)}-\lambda)x_n+ta_{12}^{(1,n)}y_n=0,\\ &\overline{ta_{12}^{(1,n)}}x_n+(a_{22}^{(1,n)}-\lambda)y_n=0,\end{aligned}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta_n(\lambda;t):=\lambda^2-(a_{11}^{(1,n)}+a_{22}^{(1,n)})\lambda+a_{11}^{(1,n)}a_{22}^{(1,n)}-t^2|a_{12}^{(1,n)}|^2=0,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, что числа $\lambda_n^{\pm}(t)$, $n\in\mathbb{N}$, являются нулями функции $\Delta_n(\,\cdot\,;t)$, $n\in\mathbb{N}$, т. е. являются собственными значениями оператора $\mathcal{V}_t$, $t\in\mathbb{R}$. Из сходимости последовательностей $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$ и условий

$$a_{11}^{(1,n)}>a_{11}^{(2)},\qquad a_{22}^{(1,n)}<a_{22}^{(2)},\qquad n\in\mathbb{N},$$

вытекает, что эти собственные значения являются конечнократными и изолированными. Это и означает, что

$$\lambda_n^{\pm}(t)\in\sigma_{\rm disc}(\mathcal{V}_t),\qquad n\in\mathbb{N},\qquad t\in\mathbb{R},$$

т. е.

$$\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty}\subset\sigma_{\rm disc}(\mathcal{V}_t),\qquad t\in\mathbb{R}.\tag{8}$$

Пусть

$$\lambda_0^{\pm}(t):=\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{\pm}(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Существование этого предела вытекает из сходимости последовательностей $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$. Покажем, что

$$\lambda_0^{\pm}(t)\in\sigma_{\rm ess}(\mathcal{V}_t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля, т. е. достаточно построить последовательность ортонормированных векторов $\{z_k^{\pm}\}_1^{\infty}\subset l^2(\mathbb{N})\oplus l^2(\mathbb{N})$, для которых

$$\|(\mathcal{V}_t-\lambda_0^{\pm}(t))z_k^{\pm}\|\to 0$$

при $k\to\infty$. Выбираем подпоследовательность

$$\{\lambda_{n_k}^{\pm}(t)\}_1^{\infty}\subset\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty},\qquad t\in\mathbb{R},$$

такую, что

$$\lambda_{n_k}^{\pm}(t)\neq\lambda_{n_m}^{\pm}(t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

при $k\neq m$. Пусть $(x_{n_k}^{\pm},y_{n_k}^{\pm})^{\rm T}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_{n_k}^{\pm}(t)$. Здесь индекс T означает транспонирование.

Обозначим

$$z_k^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{|x_{n_k}^{\pm}|^2 + |y_{n_k}^{\pm}|^2}} \begin{pmatrix} x_{n_k}^{\pm} \\ y_{n_k}^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Так как собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны, последовательность $\{z_k^{\pm}\}_1^{\infty}$ является ортонормированной.

Рассмотрим вектор-функцию $(\mathcal{V}_t - \lambda_0^{\pm}(t))z_k^{\pm}$ и оценим ее норму:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{V}_t - \lambda_0^{\pm}(t))z_k^{\pm}\| = \|((\mathcal{V}_t - \lambda_{n_k}^{\pm}(t)) + (\lambda_{n_k}^{\pm}(t) - \lambda_0^{\pm}(t)))z_k^{\pm}\| \leqslant \\ \leqslant \|(\mathcal{V}_t - \lambda_{n_k}^{\pm}(t))z_k^{\pm}\| + |\lambda_{n_k}^{\pm}(t) - \lambda_0^{\pm}(t)|. \end{aligned}$$

По предположению первое слагаемое, стоящее в правой части последнего неравенства, тождественно равно нулю, а второе слагаемое стремится к нулю при $k \to \infty$ в силу равенства

$$\lambda_0^{\pm}(t) = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}^{\pm}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $\|(\mathcal{V}_t - \lambda_0^{\pm}(t))z_k^{\pm}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Это и означает, что

$$\lambda_0^{\pm}(t) \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{V}_t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Теперь докажем, что

$$\sigma(\mathcal{V}_t) \subset \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\})$ – произвольная точка. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что

$$\Delta_n(\lambda, t) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta_n(\lambda, t) \neq 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

При этом существует оператор $(\mathcal{V}_t - \lambda)^{-1}$, определенный всюду в $l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N})$, и он ограничен. Это означает, что $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{V}_t)$. Из произвольности точки λ следует, что

$$\mathbb{C} \setminus (\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{V}_t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

т. е.

$$\sigma(\mathcal{V}_t) \subset \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Включения (8)–(10) доказывают утверждение теоремы. ■

Следующая теорема описывает спектр оператора $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Для существенного и дискретного спектров оператора $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_t) &= \sigma(A_{11}^{(2)}) \cup \sigma(A_{22}^{(2)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{V}_t), \\ \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_t) &= \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{V}_t) \cap (a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)}), \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сначала оператор $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, представим как семейство операторных (4×4)-матриц вида

$$\mathcal{A}_t = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & 0 & tA_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ t(A_{12}^{(1)})^* & 0 & A_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Из этого представления оператора $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{R}$, видно, что

$$\sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(A_{11}^{(2)}) \cup \sigma(A_{22}^{(2)}) \cup \sigma(\mathcal{V}_t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

откуда вытекает доказательство теоремы. ■

Теперь сформулируем теорему о конечности дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_{t_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Теорема 5. *При каждом фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_{t_0}$ конечен.*

Доказательство. В силу теоремы 4 имеем $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_{t_0}) = \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{V}_{t_0}) \cap (a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)})$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^+(t_0) = \frac{a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} + \sqrt{(a_{11}^{(2)} - a_{22}^{(2)})^2 + 4t_0^2|a_{12}^{(1)}|^2}}{2} > a_{22}^{(2)},$$
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^-(t_0) = \frac{a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} - \sqrt{(a_{11}^{(2)} - a_{22}^{(2)})^2 + 4t_0^2|a_{12}^{(1)}|^2}}{2} < a_{11}^{(2)},$$

только конечное число элементов последовательностей $\{\lambda_n^\pm(t_0)\}_1^\infty$ лежит в интервале $(a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)})$. Теорема доказана. ■

Заметим, что при $0 < |t_1| < |t_2|$ для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\lambda_n^+(t_1) < \lambda_n^+(t_2), \qquad \lambda_n^-(t_1) > \lambda_n^-(t_2).$$

Более того,

$$\lim_{|t|\to\infty} \lambda_n^\pm(t) = \pm\infty, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Из последних фактов следует, что существует положительное число $\delta > 0$ такое, что при всех $|t| \geqslant \delta$ имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_t) = \varnothing$.

Замечание 2. По построению оператора $\mathcal{A}_0$ видно, что этот оператор имеет бесконечное число собственных значений, лежащих в интервале $(a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)})$ и накапливающихся к $a_{11}^{(2)}$ и $a_{22}^{(2)}$. В силу теоремы 5 при всех $t \neq 0$ дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_t$ конечен. Таким образом, дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_t$ бесконечен тогда и только тогда, когда $t = 0$.

Замечание 3. Отметим, что независимо от параметра $t \in \mathbb{R}$ операторы A_{11} и A_{22} имеют бесконечное число собственных значений, лежащих в интервале $(a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)})$ и накапливающихся к $a_{11}^{(2)}$ и $a_{22}^{(2)}$ соответственно. Поэтому при $t \neq 0$ из того, что дискретный спектр операторов A_{11} и A_{22} бесконечен, не вытекает, что бесконечен спектр оператора A_t.

4. БЕСКОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ (2×2)-МАТРИЦЫ

4.1. Существенный спектр операторной (2×2)-матрицы и его новые ветви. Пусть $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ – множества всех комплексных, вещественных и целых чисел соответственно. Через $\mathbb{T}^3$ обозначим куб $(-\pi;\pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L^2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, а $L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 := L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2)$, т. е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются соответственно одночастичным и двухчастичным подпространствами стандартного бозонного фоковского пространства $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L^2(\mathbb{T}^3))$ над $L^2(\mathbb{T}^3)$, где

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{T}^3)) := \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{T}^3) \oplus L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2) \oplus \cdots .$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается семейство операторных (2×2)-матриц

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$(A_{11}f_1)(k) = w_1(k)f_1(k), \qquad (A_{12}f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,s)\,ds,$$
$$(A_{22}f_2)(k,p) = w_2(k,p)f_2(k,p), \qquad f_i \in \mathcal{H}_i, \qquad i=1,2.$$

Здесь $\mu > 0$ – параметр взаимодействия, функции $w_1(\,\cdot\,)$ и $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определены по формулам

$$w_1(k) := \varepsilon(k) + \gamma, \qquad w_2(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(k+p)\right) + \varepsilon(p),$$

$\gamma \in \mathbb{R}$, а функция дисперсии $\varepsilon(\,\cdot\,)$ имеет вид

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos k_i), \qquad k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{T}^3. \tag{11}$$

При этом $A_{12}^*\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ – сопряженный оператор к A_{12} и

$$(A_{12}^*f_1)(k,p) = \frac{1}{2}(f_1(k)+f_1(p)), \qquad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

В этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ является ограниченной и самосопряженной в $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$. Для формулировки результата о существенном спектре оператора $\mathcal{A}_\mu$ введем семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, действующих в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по правилу

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \dfrac{\mu}{\sqrt{2}}\,A_{01} \\ \dfrac{\mu}{\sqrt{2}}\,A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$A_{00}(k)f_0 = w_1(k)f_0, \qquad (A_{01}f_1) = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)\,dt,$$
$$(A_{11}(k)f_2)(p) = w_2(k,p)f_1(p), \qquad f_i \in \mathcal{H}_i, \qquad i = 1,2.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}_\mu(k)$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Используя известную теорему Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга, имеем, что для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k), M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определены следующим образом:

$$m(k) := \min_{p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p), \qquad M(k) := \max_{p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p). \tag{12}$$

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k))$ функцию $I(k;\,\cdot\,)$ как

$$I(k;z) := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(k,t) - z}.$$

Тогда определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_\mu(k)$, определяется по формуле

$$\Delta_\mu(k;z) := w_1(k) - z - \frac{\mu^2}{2}\, I(k;z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)).$$

Используя принцип Бирмана–Швингера и теорему Фредгольма, можно легко утверждать, что для дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)] \colon \Delta_\mu(k;z) = 0\}.$$

Положим

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu(k)), \qquad \Sigma_\mu := [0;18] \cup \Lambda_\mu.$$

Следующая теорема [5]–[7] описывает местоположение существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема 6. *Для существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$. Более того, множество Σ_μ представляет собой объединение не более трех отрезков.*

Теперь введем новые подмножества существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$.

Определение 1. Множества Λ_μ и $[0;18]$ называются *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$* соответственно.

4.2. Спектральные свойства семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$. Установим, что существует значение μ_0 параметра μ такое, что только для $\mu = \mu_0$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$, а оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 18$. При $\mu = \mu_0$ покажем отсутствие собственных значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ для любых k. Мы изучаем количество, местоположение и существование собственных значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ и получаем асимптотическое разложение для определителя Фредгольма $\mathcal{A}_\mu(k)$.

Доказательство этих результатов подробно изложено в работе [6], поэтому во избежание повторения мы приводим их без доказательств.

Известно, что при изучении спектральных свойств трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\widehat{H}(K)$, описывающего систему трех одинаковых частиц (бозонов), в основном опираются на детальный анализ дискретного оператора Шредингера $\hat{h}(k)$ системы двух одинаковых частиц (см., например, [13], [15]). Здесь $k \in \mathbb{T}^3$ и $K \in \mathbb{T}^3$ – полные квазиимпульсы системы двух и системы трех частиц соответственно. В частности, существенный спектр оператора $\widehat{H}(K)$ описывается с помощью спектра оператора $\hat{h}(k)$. Бесконечность дискретного спектра оператора $\widehat{H}(0)$ доказывается при условии, что оператор $\hat{h}(0)$ имеет виртуальный уровень на левом краю существенного спектра. В настоящем случае роль двухчастичного оператора Шредингера на решетке играет обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$. Из теоремы 6 видно, что, как и в случае операторов Шредингера, существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu$ описывается с помощью спектра модели $\mathcal{A}_\mu(k)$. Отметим, что обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$ аналогична свойствам двухчастичного дискретного оператора Шредингера и обладает рядом свойств. Например, в этом разделе мы показываем, что, в отличие от двухчастичного дискретного оператора Шредингера, обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень на левом краю, а $\mathcal{A}_{\mu_0}(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень на правом краю существенного спектра оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$. Поэтому в данном случае некоторые понятия и свойства двухчастичного дискретного оператора Шредингера переносятся с соответствующим изменением на обобщенную модель Фридрихса.

Пусть $\bar{0} := (0,0,0)$ и $\bar{\pi} := (\pi,\pi,\pi)$. Простые вычисления показывают, что функция $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(\bar{0},\bar{0}) \in (\mathbb{T}^3)^2$ и невырожденный максимум в точке $(\bar{\pi},\bar{\pi}) \in (\mathbb{T}^3)^2$. Более того,

$$\min_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p) = w_2(\bar{0},\bar{0}) = 0, \qquad \max_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_2(k,p) = w_2(\bar{\pi},\bar{\pi}) = 18.$$

Из определения функции $w_1(\,\cdot\,)$ видно, что она также имеет единственный невырожденный минимум в точке $\bar{0} \in \mathbb{T}^3$ и максимум в точке $\bar{\pi} \in \mathbb{T}^3$. Очевидно, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0})) = \left[0; 9\frac{3}{8}\right], \qquad \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})) = \left[8\frac{5}{8}; 18\right];$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0})) = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \left[0; 9\frac{3}{8}\right] : \Delta_\mu(\bar{0}; z) = \gamma - z - \frac{\mu^2}{2} I(\bar{0}; z) = 0\right\};$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})) = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \left[8\frac{5}{8}; 18\right] : \Delta_\mu(\bar{\pi}; z) = 6 + \gamma - z - \frac{\mu^2}{2} I(\bar{\pi}; z) = 0\right\}.$$

Следовательно,

$$\min_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 0, \qquad \max_{k\in\mathbb{T}^3} \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_\mu(k)) = 18.$$

С помощью экстремальных свойств функции $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что существует конечный положительный предел

$$\lim_{z\to -0} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}.$$

Для $\delta > 0$ положим

$$U_\delta(\bar{0}) := \{p \in \mathbb{T}^3 \colon |p| < \delta\}.$$

Пусть

$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{\gamma}\biggl(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}\biggr)^{-1/2} \qquad \text{при} \quad \gamma > 0,$$

$$\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{12-\gamma}\biggl(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}\biggr)^{-1/2} \qquad \text{при} \quad \gamma < 12.$$

Замечание 4. В силу определения чисел $\mu_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma)$ имеем:

- $\mu_l^0(\gamma) < \mu_r^0(\gamma)$, если $\gamma \in (0;6)$;
- $\mu_l^0(\gamma) = \mu_r^0(\gamma)$, если $\gamma = 6$;
- $\mu_l^0(\gamma) > \mu_r^0(\gamma)$, если $\gamma \in (6;12)$.

Через $C(\mathbb{T}^3)$ и $L^1(\mathbb{T}^3)$ обозначим банаховы пространства соответственно непрерывных и интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

Определение 2. Пусть $\gamma \neq 0$. Говорят, что оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет *виртуальный уровень в точке* $z = 0$ (или резонанс с нулевой энергией), если число $\lambda = 1$ является собственным значением интегрального оператора

$$(G_\mu\psi)(q) = \frac{\mu^2}{\gamma}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(t)\,dt}{\varepsilon(t/2)+\varepsilon(t)}, \qquad \psi \in C(\mathbb{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция $\psi(\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию $\psi(\bar{0}) \neq 0$.

Определение 3. Пусть $\gamma \neq 12$. Говорят, что оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет *виртуальный уровень в точке* $z = 18$, если число $\lambda = 1$ является собственным значением интегрального оператора

$$(G'_\mu\varphi)(q) = \frac{\mu^2}{\gamma-12}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(t)\,dt}{\varepsilon((\bar{\pi}+t)/2)+\varepsilon(t)-12}, \qquad \varphi \in C(\mathbb{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция $\varphi(\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию $\varphi(\bar{\pi}) \neq 0$.

Замечание 5. Число 1 является собственным значением оператора G_μ (соответственно G'_μ) тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ (соответственно $\mu = \mu_r^0(\gamma)$). Следовательно, оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ (соответственно $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$ (соответственно $z = 18$) тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ (соответственно $\mu = \mu_r^0(\gamma)$).

Заметим, что в определении 2 требование наличия собственного значения $\lambda = 1$ оператора G_μ соответствует существованию решения уравнения $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})f = 0$, а из условия $\psi(\bar{0}) \neq 0$ следует, что решение $f = (f_0, f_1)$ этого уравнения не принадлежит пространству $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Иными словами, если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$, то вектор-функция $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = \mathrm{const} \neq 0, \qquad f_1(q) = -\frac{\mu f_0}{\varepsilon(q/2)+\varepsilon(q)},$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})f = 0$ и $f_1 \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$.

Аналогично, если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 18$, то вектор-функция $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = \mathrm{const} \neq 0, \qquad f_1(q) = -\frac{\mu f_0}{\varepsilon((\bar{\pi}+q)/2) + \varepsilon(q) - 12},$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})f = 18f$ и $f_1 \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$.

Теорема 7. А. *Если $\gamma \leqslant 0$, то для любого $\mu > 0$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет единственное отрицательное собственное значение.*

Б. *Если $\gamma > 0$, справедливы следующие утверждения:*

- *для любого $\mu \in (0; \mu_l^0(\gamma))$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ не имеет отрицательных собственных значений;*
- *если $\mu = \mu_l^0(\gamma)$, оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$;*
- *для любого $\mu > \mu_l^0(\gamma)$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет единственное отрицательное собственное значение.*

Теорема 8. А. *Если $\gamma \geqslant 12$, то для любого $\mu > 0$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ не имеет собственных значений больше 18.*

Б. *Если $\gamma < 12$, справедливы следующие утверждения:*

- *для любого $\mu \in (0; \mu_r^0(\gamma))$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ не имеет собственных значений больше 18;*
- *если $\mu = \mu_r^0(\gamma)$, оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 18$;*
- *для любого $\mu > \mu_r^0(\gamma)$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет единственное собственное значение, лежащее в $(18; +\infty)$.*

Так как $\mu_l^0(6) = \mu_r^0(6)$, полагая $\mu_0 := \mu_l^0(6)$, из теорем 7, 8 получим

Следствие 1. А. *Если $\gamma \in (0; 6)$, для $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$ и оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ не имеет собственных значений больше 18.*

Б. *Если $\gamma = 6$, для $\mu = \mu_0$ операторы $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ и $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеют виртуальные уровни в точках $z = 0$ и $z = 18$ соответственно.*

В. *Если $\gamma \in (6; 12)$, для $\mu = \mu_r^0(\gamma)$ оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет единственное отрицательное собственное значение и оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 18$.*

Теорема 9. *Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $\mathcal{A}_{\mu_0}(k)$ не имеет собственных значений, лежащих в $(-\infty; 0) \cup (18; +\infty)$.*

Следующее разложение играет важную роль при доказательстве основных результатов работы.

Теорема 10. *Имеет место разложение*

$$\Delta_{\mu_0}(k; z) = \frac{32\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k|^2 - 2z} + O(|k|^2) + O(|z|), \qquad |k| \to 0, \quad z \nearrow 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu_0}(k; z) = -\frac{32\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}&\sqrt{\frac{6}{5}|k-\bar{\pi}|^2 + 2(18-z)} + \\ &+ O(|k-\bar{\pi}|^2) + O(|z-18|), \qquad |k-\bar{\pi}| \to 0, \quad z \searrow 18.\end{aligned} \tag{14}$$

4.3. Принцип Бирмана–Швингера. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим число $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ как

$$n(\lambda, \mathcal{A}_\mu) = \sup\{\dim F\colon (\mathcal{A}_\mu u, u) > \lambda,\ u \in F \subset \mathcal{H},\ \|u\| = 1\}.$$

Число $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ равно бесконечности, если $\lambda < \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$, а если число $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора $\mathcal{A}_\mu$, больших чем λ, с учетом кратности.

Обозначим через $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ и $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$ соответственно нижнюю и верхнюю грани существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ оператора $\mathcal{A}_\mu$, т. е.

$$\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) :\equiv \min \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu), \qquad \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) :\equiv \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu).$$

По определению числа $N_{(a;b)}(\mathcal{A}_\mu)$ имеем

$$\begin{aligned} &N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(-z, -\mathcal{A}_\mu), \qquad && -z > -\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu), \\ &N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(z, \mathcal{A}_\mu), && z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu). \end{aligned}$$

Отметим, что для любых $k \in \mathbb{T}^3$ и $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ (соответственно $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$), функция $\Delta_\mu(k; z)$ (соответственно $-\Delta_\mu(k; z)$) положительна и, следовательно, существует ее положительный квадратный корень.

В исследованиях дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$ основную роль играет компактный (симметризованный) оператор $T_\mu(z)$, $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$, действующий в $L^2(\mathbb{T}^3)$ как интегральный оператор:

$$(T_\mu(z)g)(p) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{\Delta_\mu(p;\, z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{g(t)\, dt}{\sqrt{\Delta_\mu(t; z)}(w_2(p,t) - z)}, \qquad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu),$$

$$(T_\mu(z)g)(p) = -\frac{\mu^2}{2\sqrt{-\Delta_\mu(p; z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{g(t)\, dt}{\sqrt{-\Delta_\mu(t; z)}(w_2(p,t) - z)}, \qquad z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu).$$

Следующая лемма является реализацией известного принципа Бирмана–Швингера для оператора $\mathcal{A}_\mu$ (см. [5], [10], [11], [14]–[17]).

Лемма 4. *При всех $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$ оператор $T_\mu(z)$ является компактным и непрерывным по z и справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \widehat{T}_\mu(z)) \qquad && \text{при} \quad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu), \\ &N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \widehat{T}_\mu(z)) && \text{при} \quad z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu). \end{aligned}$$

Эта лемма доказывается аналогично соответствующей лемме из работы [5].

4.4. Асимптотика дискретного спектра. В этом пункте мы следуем методу Соболева [10], чтобы получать асимптотику для числа собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$, лежащих левее z, $z < 0$, и правее z, $z > 18$.

Пусть $\mathbb{S}^2$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ и

$$S_r\colon L^2((0,r),\sigma_0) \to L^2((0,r),\sigma_0), \qquad r>0, \qquad \sigma_0 = L^2(\mathbb{S}^2),$$

– интегральный оператор с ядром

$$S(t;y) = \frac{25}{8\pi^2\sqrt{6}}\frac{1}{5\cos(hy)+t}, \qquad y = x-x', \quad x,x' \in (0,r), \quad t=(\xi,\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbb{S}^2.$$

Для $\lambda>0$ определим

$$U(\lambda) = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} r^{-1} n(\lambda, S_r).$$

Существование последнего предела и доказательство факта $U(1)>0$ изложены в работе [10].

Для полноты мы приведем следующую лемму, доказанную в работе [10].

Лемма 5. *Пусть задан оператор вида* $B(z) = B_0(z)+B_1(z)$, *где* $B_0(z)$ (*соответственно* $B_1(z)$) *является компактным и непрерывным при* $z<0$ (*соответственно* $z\leqslant 0$) *в сильной операторной топологии. Предположим, что для функции* $f(\,\cdot\,)$, $f(z)\to 0$, $z\to 0$, *имеет место равенство*

$$\lim_{z\to -0} f(z) n(\gamma, B_0(z)) = l(\gamma),$$

где функция $l(\,\cdot\,)$ *определена и непрерывна в* $(0;+\infty)$. *Тогда аналогичный предел существует для* $B(z)$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{z\to -0} f(z)\, n(\gamma, B(z)) = l(\gamma).$$

Лемма 6. *Существуют положительные числа* C_1, C_2, C_3 *и* δ *такие, что имеют место следующие неравенства*:

а) $C_1(|p|^2+|q|^2) \leqslant w_2(p,q) \leqslant C_2(|p|^2+|q|^2)$ *для любых* $p,q\in U_\delta(\bar 0)$;

б) $w_2(p,q) \geqslant C_3$ *для любых* $(p,q)\notin U_\delta(\bar 0)\times U_\delta(\bar 0)$;

в) $C_1(|p-\bar\pi|^2+|q-\bar\pi|^2) \leqslant 18-w_2(p,q) \leqslant C_2(|p-\bar\pi|^2+|q-\bar\pi|^2)$ *для любых* $p,q\in U_\delta(\bar\pi)$;

г) $18-w_2(p,q)\geqslant C_3$ *для любых* $(p,q)\notin U_\delta(\bar\pi)\times U_\delta(\bar\pi)$.

Доказательство. Из определения функции $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ получим асимптотические разложения

$$w_2(p,q) = \frac{5}{8}|p|^2 + \frac{1}{4}(p,q) + \frac{5}{8}|q|^2 + O(|p|^4) + O(|q|^4), \qquad |p|,\ |q|\to 0,$$

и

$$w_2(p,q) = 18 - \left(\frac{5}{8}|p-\bar\pi|^2 + \frac{1}{4}(p-\bar\pi, q-\bar\pi) + \frac{5}{8}|q-\bar\pi|^2\right) + \\ + O(|p-\bar\pi|^4) + O(|q-\bar\pi|^4), \qquad |p-\bar\pi|,\ |q-\bar\pi|\to 0.$$

Тогда существуют числа $C_1, C_2, C_3>0$ и δ-окрестности точек $p=\bar 0\in\mathbb{T}^3$ и $p=\bar\pi\in\mathbb{T}^3$ такие, что выполняются неравенства “а”–“г”. ■

Из определения чисел $\mu_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma)$ можно легко получить, что $\mu_l^0(6) = \mu_r^0(6)$. Положим $\mu_0 := \mu_l^0(6)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 11. *Верны следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}\sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_{\mu_0}) \cap (-\infty, 0)) = \sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_{\mu_0}) \cap (18, \infty)) = \infty,\\ \lim_{z \nearrow 0} \frac{N_{(-\infty,z)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z||} = \lim_{z \searrow 18} \frac{N_{(z,\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||} = U(1).\end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство. Видно, что в силу равенств (15) бесконечность частей дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$, расположенных в $(-\infty; 0)$ и $(18; +\infty)$, автоматически вытекает из положительности числа $U(1)$. Поэтому выводим асимптотику (15) для числа собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$. Сначала найдем асимптотическое выражение для $n(1, T_{\mu_0}(z))$ при $z \searrow 18$, асимптотика для $n(1, T_{\mu_0}(z))$ при $z \nearrow 0$ получается аналогично. Изучение спектральных свойств оператора $T_{\mu_0}(z)$ сводится к изучению спектральных свойств оператора $T^{(1)}(r)$, которые рассмотрены в работе [5].

Пусть $T(\delta; |z-18|)\colon L^2(\mathbb{T}^3) \to L^2(\mathbb{T}^3)$ – интегральный оператор с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2} \frac{\chi_\delta(p-\bar{\pi})\chi_\delta(q-\bar{\pi})((6/5)|p-\bar{\pi}|^2 + 2|z-18|)^{-1/4}((6/5)|q-\bar{\pi}|^2 + 2|z-18|)^{-1/4}}{5|p-\bar{\pi}|^2 + 2(p-\bar{\pi}, q-\bar{\pi}) + 5|q-\bar{\pi}|^2 + 8|z-18|},$$

где $\chi_\delta(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция множества $U_\delta(\bar{0})$. Используя теорему 10 и лемму 6, легко можно установить, что для любого $z \geqslant 18$ и при малых $\delta > 0$ разность $T_{\mu_0}(z) - T(\delta; |z-18|)$ является оператором Гильберта–Шмидта и она непрерывна в сильной операторной топологии в точке $z = 18$.

Пространство всех функций f, носители которых лежат в $U_\delta(\bar{\pi})$, является инвариантным подпространством оператора $T(\delta; |z-18|)$. Пусть $T^{(0)}(\delta; |z-18|)$ – сужение оператора $T(\delta; |z-18|)$ на подпространство $U_\delta(\bar{\pi})$, т. е. интегральный оператор, действующий в $L^2(U_\delta(\bar{\pi}))$ с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2} \frac{((6/5)|p-\bar{\pi}|^2 + 2|z-18|)^{-1/4}((6/5)|q-\bar{\pi}|^2 + 2|z-18|)^{-1/4}}{5|p-\bar{\pi}|^2 + 2(p-\bar{\pi}, q-\bar{\pi}) + 5|q-\bar{\pi}|^2 + 8|z-18|}.$$

С помощью унитарного оператора

$$B_r\colon L^2(U_\delta(\bar{\pi})) \to L^2(U_r(\bar{0})), \qquad (B_r f)(p) = r^{-3/2} f\left(\frac{\delta}{r}(p-\bar{\pi})\right),$$

легко показать, что оператор $T^{(0)}(\delta; |z-18|)$ унитарно эквивалентен интегральному оператору $T^{(1)}(r)$, $r = |z-18|^{-1/2}$, действующему в $L^2(U_r(\bar{0}))$, с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2} \frac{((6/5)p^2 + 2)^{-1/4}((6/5)q^2 + 2)^{-1/4}}{5p^2 + 2(p,q) + 5q^2 + 8}.$$

Аналогично оператор $T_{\mu_0}(z)$, $z < 0$, сводится к оператору $T^{(1)}(r)$ с $r = |z|^{-1/2}$.

В работе [5] доказано, что

$$\lim_{r \to \infty} |\ln r|^{-1} n(1, T^{(1)}(r)) = U(1).$$

Теперь доказательство теоремы вытекает из лемм 4, 5. ■

5. РЕШЕТЧАТЫЕ СИСТЕМЫ С НЕСОХРАНЯЮЩИМСЯ ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

Как мы отмечали в разделе 1, в непрерывном пространстве и на решетке имеются в определенном смысле более интересные задачи, возникающие в задачах физики твердого тела [2], квантовой теории поля [3] и статистической физики [4], в которых число частиц не сохраняется. В то же время изучение таких решетчатых систем (в случае не более трех частиц) сводится к изучению спектральных свойств самосопряженных операторных (3×3)-матриц вида

$$H_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & \mu A_{02} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{02}^* & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$. Здесь матричные элементы $A_{ij}\colon \mathcal{H}_j\to\mathcal{H}_i$, $i\leqslant j$, $i,j=0,1,2$, определены следующим образом:

$$A_{00}f_0 = w_0 f_0, \qquad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_1(t)\,dt, \qquad A_{02}=0,$$

$$(A_{11}f_1)(p) = w_1(p)f_1(p), \qquad (A_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_2(p,t)\,dt,$$

$$(A_{22}f_2)(p,q) = w_2(p,q)f_2(p,q), \qquad f_i\in\mathcal{H}_i, \quad i=0,1,2.$$

При этом $w_0\in\mathbb{R}$, $\mu>0$ – параметр взаимодействия, $v(\,\cdot\,)$, $w_1(\,\cdot\,)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$, $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbb{T}^3)^2$.

В современной математической физике операторы A_{01}, A_{12} называются операторами уничтожения, а A_{01}^*, A_{12}^* – операторами рождения. Оператор уничтожения снижает количество частиц в заданном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу и является сопряженным к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности при изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц [25]. Подчеркнем, что в данном случае, число рождений и уничтожений равно единице, это означает, что $A_{ij}=0$ при $|i-j|>1$. Следует заметить, что если параметры $w_0, w_1(\cdot)$ и $w_3(\cdot,\cdot)$ оператора H_μ определены как

$$w_0=\varepsilon\mathrm{s}, \qquad w_1(p) = -\varepsilon\mathrm{s}+\omega(p), \qquad w_2(p,q) = -\varepsilon\mathrm{s}+\omega(p)+\omega(q),$$

то с помощью полученного оператора можно подробно исследовать спектральные свойства решетчатой модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем двумя фотонами [26], [27]. Здесь $\mathrm{s}=\pm$, $\varepsilon>0$, $w(p)$ – энергия фотона с импульсом p (дисперсия свободного поля), а $v(\,\cdot\,)$ – некоторая непрерывная функция (связанная с взаимодействием между атомом и фотонами).

Известно, что в импульсном представлении трехчастичный дискретный оператор Шредингера $\widehat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K\in\mathbb{T}^3$ оператор $\widehat{H}$ разлагается в прямой операторный интеграл (см., например, [14]–[17])

$$\widehat{H} = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \widehat{H}(K)\,dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\widehat{H}(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_K)$ ($\Gamma_K \subset (\mathbb{T}^3)^2$ – некоторое многообразие).

Отметим, что матричный оператор H_μ обладает основными спектральными свойствами трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\widehat{H}(0)$, где роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет обобщенная модель Фридрихса [5], [6]. По этой причине гильбертово пространство $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ называется *трехчастичным обрезанным подпространством* бозонного пространства Фока $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(L^2(\mathbb{T}^3))$ над $L^2(\mathbb{T}^3)$, а матричный оператор H_μ называется гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке.

Часто приходится пользоваться матрицами, разбитыми на прямоугольные части – “клетки” или “блоки”. Разобьем операторную матрицу H на прямоугольные блоки и представим ее в виде суммы двух операторных матриц:

$$H_\mu = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{00} & \mu\widehat{A}_{01} \\ \mu\widehat{A}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_\mu \end{pmatrix}}_{=:H_\mu^0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{A}_{00} & \mu\widehat{A}_{01} \\ \mu\widehat{A}_{01}^* & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{V}_\mu}$$

с матричными элементами

$$\widehat{A}_{00} := A_{00}, \qquad \widehat{A}_{01} := (A_{01} \quad 0), \qquad \widehat{\mathcal{A}}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из определения операторов $\mathcal{A}_\mu$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\mu$ видно, что если

$$v(p) \equiv 1, \qquad w_1(p) = \varepsilon(p) + \gamma, \qquad w_2(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) + \varepsilon(q),$$

а функция дисперсии $\varepsilon(\,\cdot\,)$ имеет вид (11), то $\mathcal{A}_\mu \equiv \widehat{\mathcal{A}}_\mu$.

Так как операторы A_{00} и A_{01} являются одномерными, оператор $\mathcal{V}_\mu$ двумерный. Следовательно, в силу теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга существенный спектр оператора H_μ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_\mu$.

Поскольку $\operatorname{rank} V_\mu = 2$, в силу леммы 1 получим, что при всех $z \in \rho(H_\mu) \cap \rho(H_\mu^0)$ для ранга разности резольвент справедливо равенство

$$\operatorname{rank}((H_\mu - zI)^{-1} - (H_\mu^0 - zI)^{-1}) = 2,$$

где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Следовательно, операторы H_μ и H_μ^0 удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда, учитывая равенство $\sigma_{\mathrm{disc}}(H_\mu^0) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_\mu)$, имеем

$$\lim_{z \nearrow \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)} \frac{N_{(-\infty,z)}(H_\mu)}{N_{(-\infty,z)}(\mathcal{A}_\mu)} = \lim_{z \searrow \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)} \frac{N_{(z,+\infty)}(H_\mu)}{N_{(z,+\infty)}(\mathcal{A}_\mu)} = 1.$$

Теперь из теоремы 11 следует, что

$$\sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu_0}) \cap (-\infty, 0)) = \sharp(\sigma_{\mathrm{disc}}(H_{\mu_0}) \cap (18, \infty)) = \infty.$$

Причем имеет место логарифмическая асимптотика следующего вида для числа собственных значений оператора H_{μ_0}:

$$\lim_{z \nearrow 0} \frac{N_{(-\infty,z)}(H_{\mu_0})}{|\ln|z||} = \lim_{z \searrow 18} \frac{N_{(z,\infty)}(H_{\mu_0})}{|\ln|z-18||} = U(1).$$

Таким образом, результаты, полученные в разделах 2 и 4, играют важную роль при исследовании существенного и дискретного спектров операторов энергии системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке (в случае не более трех частиц) и решетчатой модели "спин–бозон" с не более двумя фотонами.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания, позволившие значительно улучшить первоначальную версию статьи.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008.

[2] D. Mattis, "The few-body problem on lattice", *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.

[3] К. О. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.

[4] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, "Кластерные операторы", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1983, № 9, 63–80.

[5] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, "On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics", *J. Stat. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.

[6] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, "The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles", *Methods Func. Anal. Topol.*, **13**:1 (2007), 1–16.

[7] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, "Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра", *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 81–84.

[8] В. Н. Ефимов, "Слабосвязанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц", *ЯФ*, **12**:5 (1970), 1080–1091.

[9] Д. Р. Яфаев, "К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера", *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.

[10] A. V. Sobolev, "The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics", *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.

[11] H. Tamura, "The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: asymptotics for the number of negative eigenvalues", *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.

[12] С. Н. Лакаев, "О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц", *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.

[13] С. Н. Лакаев, "Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц", *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.

[14] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, "Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке", *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.

[15] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, "Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке", *ТМФ*, **136**:2 (2003), 231–245.

[16] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, "Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics", *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772, arXiv: math-ph/0312026.

[17] С. Н. Лакаев, З. Э. Муминов, "Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера на решетке", *Функ. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 80–84.

[18] M. I. Muminov, T. H. Rasulov, "On the eigenvalues of a 2×2 block operator matrix", *Opuscula Math.*, **35**:3 (2015), 371–395.

[19] M. I. Muminov, T. H. Rasulov, “Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2×2 operator matrix”, *Eurasian Math. J.*, **5**:2 (2014), 60–77.

[20] M. I. Muminov, T. H. Rasulov, “Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space”, *Commun. Math. Anal.*, **17**:1 (2014), 1–22.

[21] R. A. Minlos, H. Spohn, “The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons”, *Topics in Statistical and Theoretical Physics*, American Mathematical Society Translations: Ser. 2, **177**, eds. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik, AMS, Providence, RI, 1996, 159–193.

[22] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, “Спектр и рассеяние в модели “спин-бозон” с не более чем тремя фотонами”, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.

[23] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[24] М. Ш. Бирман, М. З. Саломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.

[25] R. P. Feynman, “Creation and annihilation operators”, *Statistical Mechanics*: *A Set of Lectures*, CRC Press, London, 2018, 151–197.

[26] M. Muminov, H. Neidhardt, T. Rasulov, “On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case”, *J. Math. Phys.*, **56**:5 (2015), 053507, 24 pp., arXiv: 1410.4763.

[27] Т. Х. Расулов, “О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами”, *ТМФ*, **186**:2 (2016), 293–310.

Поступила в редакцию 4.03.2020,
после доработки 23.04.2020,
принята к публикации 22.07.2020