ISSN 2181-6875

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

ILMIY AXBOROTI

1/2019

Научный вестник Бухарского государственного университета * Scientific reports of Bukhara state University

MUNDARIJA

• ANIQ VA TABIIY FANLAR

• TILSHUNOSLIK

MUNDARIJA

АДАБИЁТЛАР

1. Aripov M., Begalov B., Begimqulov Sh., Mamarajabov M. Axborot texnologiyalari. – T.: Noshir, 2009. – 368 b.
2. Арипов М., Ҳайдаров А. Информатика асослари. – Т.: Ўқитувчи, 2002. – 432 б.
3. Sattorov A. Ma'lumotlar bazasini boshqarish sistemasi (Access Windows-9X/2000 uchun). – T.: Fan va texnologiya, 2006. – 304 b.
4. Sadullayev I.Sh., Zaripov N.N. OTM boshqaruv samaradorligini va ta'lim jarayoni sifatini oshirishda axborot texnologiyalaridan foydalanish yo`llari. //Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti jurnali. 2015 y. 4-son. – B. 170-174.

УДК 517.984

2-ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАР ОИЛАСИНИНГ ВИРТУАЛ САТҲЛАРИ ҲАҚИДА

О ВИРТУАЛЬНЫХ УРОВНЯХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА 2

ON THE VIRTUAL LEVELS OF ONE FAMILY MATRIX OPERATORS OF ORDER 2

Дилмуродов Элёр Бахтиёрович
базовый докторант БухГУ

Таянч сўзлар: операторли матрица, умумлашган Фридрихс моделлари оиласи, хос қиймат, виртуал сатҳ, пайдо қилиш ва йўқотиш операторлари, Фредгольм детерминанти, Шур тўлдирувчиси.

Ключевые слова: операторная матрица, семейства обобщенных моделей Фридрихса, собственное значение, виртуальный уровень, операторы рождения и уничтожения, определитель Фредгольма, дополнение Шура.

Key words: operator matrix, family of a generalized Friedrichs models, eigenvalue, virtual level, creation of birth and annihilation operators, Fredholm determinant, Schur complement.

Мақолада пайдо қилиш ва йўқотиш операторлари ёрдамида таъсирлашувчи, Z^3 панжарада уч ўлчамли кўпи билан иккита заррачалар системаси Гамильтонианига мос $A_\mu(k), k \in T^3 := (-\pi, \pi]^3, \mu > 0$ 2-тартибли операторли матрицалар оиласи (умумлашган Фридрихс моделлари оиласи) қаралади. Бирор μ_0 сони учун барча $k \in T^3$ ларда $A_{\mu_0}(k)$ оператор хос қийматларга эга эмаслиги кўрсатилган. Мос Фредгольм детерминанти учун ёйилмалар олинган.

В настоящей работе рассматривается семейство операторных матриц порядка 2 (семейства обобщенных моделей Фридрихса) $A_\mu(k), k \in T^3 := (-\pi, \pi]^3, \mu > 0$, ассоциированное с Гамильтонианом системы, состоящей из не более двух частиц на трехмерной решетке Z^3, и взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. При некотором μ_0 установлено отсутствие собственных значений оператора $A_{\mu_0}(k)$ для всех $k \in T^3$. Получены разложения, соответствующие определителю Фредгольма.

This article considers a family of order 2 matrix operators (a family of generalized Friedrichs models) $A_\mu(k), k \in T^3 := (-\pi, \pi]^3, \mu > 0$, associated with the Hamiltonian system consisting of no more thant two particles on a three-dimensional lattice Z^3, interacting via creation and annihilation operators. We establish the absence of the eigenvalues of $A_{\mu_0}(k)$ for all values of k for some μ_0. The decompositions corresponding to the Fredholm determinant are obtained.

Введение. Пороговые явления для двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера изучены в [1, 2]. Семейства модели Фридрихса с одномерным возмущением, которые ассоциированы с системой двух частиц на трехмерной решётке Z^3, изучены в [3, 4]. Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики, сводятся к исследованию виртуальных уровней обобщённой модели Фридрихса [5,6]. Поэтому изучение виртуальных уровней для обобщённой модели Фридрихса играет важную роль в современной математической физике.

В настоящей работе рассматриваются семейства операторных матриц порядка 2 (семейства обобщенных моделей Фридрихса) $A_\mu(k)$, в случае функций специального вида w_0 и w_1, являющиеся параметрами рассматриваемого семейства. Устанавливается, что эти функции имеют невырожденный минимум (невырожденный максимум) в единственной точке $\bar{0}\in T^3$ и $(\bar{0},\bar{0})\in(T^3)^2$, соответственно ($\bar{\pi}\in T^3$ и $(\bar{\pi},\bar{\pi})\in(T^3)^2$), где $\bar{0}:=(0,0,0)$ и $\bar{\pi}:=(\pi,\pi,\pi)$.

Получены следующие результаты:

- построено первое дополнение Шура;

- найдено критическое значение μ_0 параметра μ, а оператор $A_{\mu_0}(\bar{0})$ ($A_{\mu_0}(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z=0$ ($z=18$);

- установлено, что при всех $k\in T^3$ оператор $A_{\mu_0}(k)$ не имеет собственных значений, лежащих вне отрезка $[0;18]$, где $\min\limits_{k\in T^3}\sigma_{ess}(A_\mu(k))=0$, $\max\limits_{k\in T^3}\sigma_{ess}(A_\mu(k))=18$;

- получены разложения определителя Фредгольма при малых значениях $|p|$ и $|p-\bar{\pi}|$, соответственно.

Результаты настоящей работы являются обобщениями соответствующих результатов [1-6]. Точнее в данной работе исследуется виртуальный уровень не только в точке $z=0$, но одновременно и в точке $z=18$.

Семейства обобщеных моделей Фридрихса. Пусть C, R и Z - множество всех комплексных, вещественных и целых чисел, соответственно, а T^3 - трехмерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе T^3 рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в R^3 по модулю $(2\pi Z)^3$.

Пусть $L_2(T^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на T^3. Обозначим через H прямую сумму пространств $H_0:=C$ и $H_1:=L_2(T^3)$, т.е. $H:=H_0\oplus H_1$.

Известно, что всякий линейный ограниченный оператор в $H_0\oplus H_1$ записывается как операторная матрица порядка 2. В данной работе рассмотрим одну из таких операторных матриц, так называемую обобщенную модель Фридрихса $A_\mu(k),\ k\in T^3$, действующую в H как

$$A_\mu(k):=\begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k)\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где операторы $A_{ii}(k): H_i\to H_i, i=0,1,\ k\in T^3$ и $A_{01}: H_1\to H_0$ определяются по формулам

$$A_{00}(k)f_0=w_0(k)f_0,\quad A_{01}f_1=\int\limits_{T^3}f_1(t)dt,\quad (A_{11}(k)f_1)(p)=w_1(k,p)f_1(p).$$

Здесь $f_i\in H_i, i=0,1$, μ - вещественное положительное число, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ имеют вид $w_0(k):=\varepsilon(k)+6,\ w_1(k,p):=\varepsilon(k)+\varepsilon(\frac{1}{2}(k+p))+\varepsilon(p)$, где функция (дисперции) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением $\varepsilon(k):=\sum\limits_{i=1}^{3}(1-\cos k_i),\ k=(k_1,k_2,k_3)\in T^3$.

В этих предположениях параметры семейства операторов $A_\mu(k), k \in T^3$, действующих в гильбертовом пространстве H по формуле (1), ограничены и самосопряжённы.

Оператор A_{01} называется оператором уничтожения, а A_{01}^* - оператором рождения [7] и $(A_{01}^* f_0)(p) = \mu f_0$, $f_0 \in H_0$.

Далее под $\sigma(\cdot), \sigma_{ess}(\cdot)$, $\sigma_{disc}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ будем понимать соответственно спектр, существенный спектр, дискретный спектр и резольвентное множество некоторого ограниченного самосопряженного оператора.

Очевидно, что оператор возмущения $A_\mu(k) - A_0(k)$ оператора $A_0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [8] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $A_\mu(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $A_0(k)$. Известно, что $\sigma_{ess}(A_0(k)) = [m(k), M(k)]$, где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом: $m(k) := \min_{p \in T^3} w_1(k,p), \quad M(k) := \max_{p \in T^3} w_1(k,p).$

Из последних фактов следует, что существенный спектр оператора $A_\mu(k)$ не зависит от μ и имеет место равенство $\sigma_{ess}(A_\mu(k)) = [m(k), M(k)]$.

При каждом фиксированном $k \in T^3$ определим регулярную в области $C \setminus \sigma_{ess}(A_\mu(k))$ функцию $I(k;z) := \int_{T^3} \frac{dt}{w_1(k,t) - z}$.

Следует отметить, что функция $\Delta_\mu(k;z) := w_0(k) - z - \mu^2 I(k;z)$ обычно называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $A_\mu(k)$.

Первое дополнение Шура. Вместе с оператором $A_\mu(k)$ рассмотрим оператор, который известен под названием дополнение Шура.

Первый из них имеет следующий вид : $S_\mu(k;z): H_0 \to H_0$;

$$S_\mu(k;z) := A_{00}(k) - z - \mu^2 A_{01}(A_{11}(k) - z)^{-1} A_{01}^*, \ \ z \in \rho(A_{11}(k)).$$

Простые вычисления показывают, что оператор $S_\mu(k;z)$ можно определить следующим образом: $S_\mu(k;z) f_0 = \Delta_\mu(k;z) f_0, \quad z \in \rho(A_{11}(k)), \quad f_0 \in H_0.$

Видно, что первое дополнение Шура является операторнозначной регулярной функцией, определенной вне спектра оператора $A_{11}(k)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов $A_\mu(k)$ и $S_\mu(k;z)$.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $k \in T^3$ оператор $A_\mu(k)$ имеет собственное значение $z \in C \setminus \sigma_{ess}(A_\mu(k))$ тогда и только тогда, когда число 0 является собственным значением оператора $S_\mu(k;z)$.*

Можно легко проверить, что функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум (максимум) в точке $(\bar{0},\bar{0}) \in (T^3)^2$ $((\bar{\pi},\bar{\pi}) \in (T^3)^2)$ и

$$\min_{k,p \in T^3} w_1(k,p) = w_1(\bar{0},\bar{0}) = 0, \ \max_{k,p \in T^3} w_1(k,p) = w_1(\bar{\pi},\bar{\pi}) = 18.$$

При этом функция $w_0(\cdot)$ также имеет единственный невырожденный минимум (максимум) в точке $\bar{0} \in T^3$ ($\bar{\pi} \in T^3$). Следовательно, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при каждом $\mu > 0$, $k \in T^3, z \in (-\infty, 0] \cup [18, +\infty)$ оператор

$S_\mu(k;z)$ хорошо определен и ограничен в H_0. В частности, существует конечный положительный предел $I(0;0)=\lim\limits_{k\to\infty} I(k;0)$.

Основные результаты. Введем следующие обозначения: $\mu_0 := \sqrt{6}I^{-\frac{1}{2}}(0;0)$.

Теорема 1. *Верны следующие утверждения:*

1) операторы $S_\mu(\bar{0};0)$ *и* $S_\mu(\bar{\pi};18)$ являются нулевыми операторами тогда и только тогда, когда $\mu=\mu_0$;

2) оператор $A_{\mu_0}(k)$ *при всех* $k\in T^3$ *не имеет собственных значений в* $(-\infty,0)\cup(18,+\infty)$.

Пусть $C(T^3)$ $(L_1(T^3))$ – банахово пространство непрерывных (интегрируемых) функций, определенных на T^3.

Определение 1. *Говорят, что оператор* $A_\mu(\bar{0})$ *(*$A_\mu(\bar{\pi})$*) имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ $(z=18)$, *если число 1 является собственным значением оператора*

$$(G_\mu\psi)(p)=\frac{\mu^2}{6}\int\frac{\psi(t)dt}{\varepsilon(t)+\varepsilon(\frac{t}{2})},\quad \psi\in C(T^3)$$

$$\left((\bar{G}_\mu\varphi)(p)=\frac{\mu^2}{6}\int\frac{\varphi(\bar{\pi}+t)dt}{\varepsilon(t)+\varepsilon(\frac{t}{2})},\quad \varphi\in C(T^3)\right)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ *(*φ*) удовлетворяет условию* $\psi(\bar{0})\neq 0$ *(*$\varphi(\bar{\pi})\neq 0$*).*

Заметим, что если оператор $A_\mu(\bar{0})$ ($A_\mu(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z=0$ $(z=18)$, тогда решение уравнения $G_\mu\psi=\psi$ $(\bar{G}_\mu\varphi=\varphi)$ равно (с точностью до константы) функции $\psi(p)=1$, $(\varphi(p)=1)$.

Отметим, что в определении 1 требование наличия собственного значения $\lambda=1$ оператора G_μ ($\bar{G}_\mu$) соответствует существованию решения уравнения $A_\mu(\bar{0})f=0$ ($A_\mu(\bar{\pi})f=18f$). А из условия $\psi(\bar{0})\neq 0$ $(\varphi(\bar{\pi})\neq 0)$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству H. Точнее, если оператор $A_\mu(\bar{0})$ ($A_\mu(\bar{\pi})$) имеет виртуальный уровень в точке $z=0$ $(z=18)$, то элемент $f=(f_0,f_1)$, где

$$f_0=const\neq 0,\qquad f_1(p)=-\frac{\mu f_0}{\varepsilon(p)+\varepsilon(p/2)}$$

$$\left(f_0=const\neq 0,\qquad f_1(p)=\frac{\mu f_0}{12-\varepsilon((p+\bar{\pi})/2)-\varepsilon(p)}\right),$$

удовлетворяет уравнению $A_\mu(\bar{0})f=0$ ($A_\mu(\bar{\pi})=18f$) и $f_1\in L_1(T^3)$.

Теорема 2. *Операторы* $A_{\mu_0}(\bar{0})$ *и* $A_{\mu_0}(\bar{\pi})$ *имеют виртуальный уровень в точке* $z=0$ *и* $z=18$, *соответственно.*

Теорема 3. *При каждом фиксированном* $f\in H_0\setminus\{0\}$ *имеют место разложения:*

$$(S_{\mu_0}(k;z)f,f)=\|f\|^2\frac{16\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k|^2-2z}+O(|k|^2)+O(|z|),\ |k|\to 0,\ z\uparrow 0;$$

$$(S_{\mu_0}(k;z)f,f)=-\|f\|^2\frac{16\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k-\bar{\pi}|^2+2(18-z)}+O(|k-\bar{\pi}|^2)+O(|z-18|),$$

$$|k-\bar{\pi}|\to 0,\ z\downarrow 18.$$

Отметим, что теоремы 1-3 играют важную роль [5,6] при доказательстве бесконечности числа собственных значений, а также при получении асимптотики дискретного спектра соответствующей операторной матрицы порядка 3.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Расулову Т.Х. за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians in lattice. Comm. Math. Phys. 262 (2006). – P. 91-115.
2. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5 (2004). – P. 743-772.
3. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl. 330 (2007). – P. 1152-1168.
4. Расулов Т.Х. Пороговые эффекты в спектре модели Фридрихса //Узб. матем. журнал. - 2013. - № 1. – С. 99-108.
5. AlbeverioS., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. DiscreteSpectrumAsymptotics. J. Stat. Physics, 127:2 (2007). – P. 191-220.
6. Расулов Т.Х. О числе собственных значений одного матричного оператора //Сибирский математический журнал, 52:2. - 2011. – С. 400-415.
7. Фридрихс К.О. Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1969. – С. 232.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. - Т. 4. – С. 396.

УДК. 62-225:66.084:66-98

ЮПҚА ЦИЛИНДРИК ҚОБИҚ БЎЛИШИ ҚУВУРЛАРНИНГ ИЧКИ БОСИМИНИ ҲИСОБГА ОЛГАН ҲОЛДА ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИНИ ЎРГАНИШ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ КАК ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

FREE OSCILLATIONS OF PIPELINES LIKE THIN CYLINDRICAL SHELLS WITH REGARDS TO INTERNAL PRESSURE

Эсанов Нуриддин Курбонович
преподаватель кафедры начального образования БухГУ

Таянч сўзлар: қувур, тебраниш, цилиндрик қобиқ, босим, ҳисоблаш, силжиш.
Ключевые слова: трубопровод, колебания, цилиндрическая оболочка, давление, расчет, перемещения.
Key words: pipeline, vibrations, cylindrical shell, pressure, calculation, movement.

Мақолада юпқа цилиндрик қобиқли қувурларнинг ички босимини ҳисобга олган ҳолда эркин тебранишлари таҳлил қилинади. Қувур кўндаланг кесимининг ўрта чизиғи радиусидаги ёпиқ цилиндрик қобиқ сифатида қаралади. Материал зичлик, эластиклик модули билан изотроп, унинг Пуассон коэффициенти доимий деб ҳисобланади.

В работе рассматриваются свободные колебания трубопроводов как тонких цилиндрических оболочек с учетом внутреннего давления. Трубопровод представлен в виде замкнутой цилиндрической оболочки с радиусом средней линии поперечного сечения. Материал считается изотропным с плотностью, модулем упругости и коэффициентом Пуассона.

The paper deals with the free oscillations of pipelines as thin cylindrical shells with regard to internal pressure. The pipeline is presented in the form of a closed cylindrical shell with a radius of the midline of the cross section. The material is considered isotropic with density, modulus of elasticity, and Poisson's ratio.

Введение. Растущая потребность транспортировки нефти и газа на большие расстояния способствует расширению сети магистральных трубопроводов. Статические и