UO'K 517.946

IKKI NOMA'LUMLI PARAMETRLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASIGA KELTIRILADIGAN AMALIY MASALALAR

Dilmurodov Elyor Baxtiyorovich,
Buxoro davlat universiteti,
Husenova Jasmina To'lqinovna,
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Annotatsiya. *Ushbu maqola ikkita asosiy qismdan tashkil topgan. Uning birinchi qismida parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega bo'lish shartlari hamda bir o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modelining spektrini o'rganish masalasi bayon qilingan. Maqolaning ikkinchi qismi uning asosiy qismi bo'lib, ikki noma'lumli parametrli tenglamalar sistemasi yechimlarning mavjudlik shartlari tavsiflangan. Ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modelining spektri tahlil qilingan.*

Kalit so'zlar: *parameter, tenglamalar sistemasi, Fridrixs modeli, qo'zg'alish operatori, spektr, Kramer qoidasi, rezolventa operatori.*

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДИМЫЕ К СИСТЕМАМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Аннотация. *Эта статья состоит из двух основных частей. В первой её части описаны условия существования решения параметрического линейного уравнения и вопросы исследования спектра модели Фридрихса с одномерным возмущением. Вторая часть статьи является её основной частью, в которой описываются условия существования решений системы уравнений с двумя неизвестными параметрами. Проанализирован спектр модели Фридрихса с двумерным возмущением.*

Ключевые слова: *параметр, система уравнений, модель Фридрихса, оператор возмущения, спектр, правила Крамера, резольвентныйоператор.*

PRACTICAL PROBLEMS INVOLVING TO A SYSTEM OF PARAMETERIC LINEAR EQUATIONS WITH TWO UNKNOWN

Abstract. *This article consists of two main parts. In its first part, the conditions for the existence of a solution to a parametric linear equation and questions of studying the spectrum of the Friedrichs model with one-dimensional perturbation are described. The second part of the article is its main part; the conditions for the existence of solutions to a parametric system of equations with two unknown are described. The spectrum of the Friedrichs model with two-dimensional perturbation is analyzed.*

Key words: *parameter, system of equations, Friedrichs model, perturbation operator, spectrum, Cramer's rule, resolvent operator.*

Kirish. Funksional tenglamalar, xususan, integral tenglamalar nazariyasida [1] chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish usullari, yechim mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari [2] muhim ahamiyat kasb etadi. Qattiq jismlar fizikasi [3], statistik fizika [4], shuningdek, panjaraviy maydon nazariyasida [5] soni saqlanadigan va soni saqlanmaydigan zarrachalar sistemasi bilan bog'liq masalalar paydo bo'ladi. Soni saqlanadigan zarrachalar sistemasiga mos energiya operatorlari bu standart yoki diskret Shryodinger operatorlari [6,7] hamda ular tipidagi model operatorlaridir [8,9]. Soni saqlanmaydigan chekli sondagi zarrachalar sistemasiga mos energiya operatori esa bu chekli tartibli blok operatori matrisa ko'rinishidagi operatorlardir [10,11]. Bunday turdagi operatorlar xos funksiyalari uchun Faddeyev va Vaynberg tenglamalarini hamda ularning simmetrik variantlarni qurishda [12] ko'p hollarda chiziqli parametrli tenglamalar sistemasini tahlil qilishga to'g'ri keladi. Shu nuqtayi nazardan maqolada qaralayotgan masala dolzarb hisoblanadi.

Ushbu maqolada ikki turdagi masala qaralgan. Birinchi masala: parametrli chiziqli tenglamaga keltiriladigan masala sifatida bir o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modelining xos qiymatlarini tadqiq qilish. Ikkinchi masala: ikki noma'lumli parametrli tenglamalar sistemasini yechish usullaridan foydalanib ikki o'lchamli qo'zg'alishli ega Fridrixs modelining rezolventa operatorini qurish. Ta'kidlash joizki, har

https://buxdu.uz

ikkala holda ham tadqiq qilingan Fridrixs modelini panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos model operatori sifatida qarash mumkin.

Parametrli chiziqli tenglamalar. $ax = b$ ko‘rinishdagi tenglamaga parametrli chiziqli tenglama deyiladi. Bunda a va b parametrlar haqiqiy sonlar, x esa noma’lum (izlanayotgan o‘zgaruvchi).

1) Agar $a = b = 0$ shart bajarilsa, u holda $ax = b$ tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

2) Agar $a \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim $x = \frac{b}{a}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3) Agar $a = 0$, $b \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

Endi $ax = b$ tenglamaga keltiriladigan amaliy masalalardan birini qaraymiz.

$L_2[-\pi;\pi]$ orqali $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosida

$$H_\mu = H_0 - \mu V \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi operatorni qaraymiz. Bu yerda H_0 operator $u(\cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori:

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \ \ f \in L_2[-\pi;\pi],$$

V esa qo‘zg‘alish operatori (potensial operatori) bo‘lib,

$$(Vf)(x) = v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t)dt, \qquad f \in L_2[-\pi;\pi]$$

ko‘rinishda aniqlangan, bu yerda $u(\cdot)$ va $v(\cdot)$ funksiyalar $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar, $\mu \geq 0$ esa ta’sirlashish parametri.

Tegishli ta’riflardan foydalanib, (1) tenglik yordamida aniqlangan H_μ, $\mu \geq 0$ operatorning chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekanligini tekshirish mumkin.

(1) ko‘rinishdagi operatorga odatda bir o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli deyiladi hamda panjaradagi ikkita zarrachali sistemaga mos model operator sifatida qaralishi mumkin.

Maqola matnida Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri $\sigma(\cdot)$ kabi, muhim spektri $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ kabi, diskret spektri esa $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ kabi belgilangan. Bunda operatorning barcha chekli karrali yakkalangan xos qiymatlari to‘plamiga uning diskret spektri deyiladi. Diskret spektrning spektrgacha bo‘lgan to‘ldiruvchisiga uning muhim spektri deyiladi.

Aniqlanishiga ko‘ra, V qo‘zg‘alish operatori bir o‘lchamlidir. Shu sababli chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra H_μ operatorning muhim spektri H_0 operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. H_0 operator $u(\cdot)$ uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish operatori bo‘lganligi bois, faqat sof muhim spektrga ega. Aniqroq qilib aytganda,

$$\sigma(H_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [m;M]$$

tengliklar o‘rinlidir. Bu yerda m va M sonlari

$$m := \min_{x \in [-\pi;\pi]} u(x), \qquad M := \min_{x \in [-\pi;\pi]} u(x)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi. Keltirilgan mulohazalarga ko‘ra, H_μ operatorning muhim spektri μ ta’sirlashish parametrdan bog‘liq bo‘lmasdan,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [m;M]$$

munosabatlar o‘rinlidir.

H_μ operatorning diskret spektrini o‘rganish maqsadida $\mathbb{C}\backslash[m;M]$ sohada regulyar bo‘lgan

$$\Delta_\mu(z) := 1 - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)dt}{u(t) - z}$$

hamda H_μ operatorga mos Fredgolm determinant deb ataluvchi funksiyani qaraymiz.

Quyidagi lemma H_μ operatorning xos qiymatlari va $\Delta_\mu(\cdot)$ funksiyaning nollari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

1-lemma. $z \in \mathbb{C}\backslash[m;M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun $\Delta_\mu(z) = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

https://buxdu.uz

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $z \in \mathbb{C}\backslash[m;M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati, $f \in L_2[-\pi;\pi]$ esa unga mos xos funksiya bo‘lsin. U holda f funksiya $H_\mu f = zf$ tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni

$$u(x)f(x) - \mu\, v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t)dt = zf(x). \qquad (2)$$

$z \notin [m;M]$ ekanligidan barcha $x \in [-\pi;\pi]$ nuqtalarda $u(x) - z \neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli (2) tenglamadan $f(x)$ funksiya uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$f(x) = \frac{\mu\, k\, v(x)}{u(x) - z}\ ; \qquad (3)$$

bu yerda

$$k = \int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t)dt. \qquad (4)$$

$f(x)$ uchun topilgan (3) ifodani (4) belgilashga qo‘yamiz:

$$k = \int_{-\pi}^{\pi} v(t)\frac{\mu\, k\, v(t)}{u(t) - z}dt;$$

$$k = \mu k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)}{u(t) - z}dt;$$

$$\left(1 - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)}{u(t) - z}dt\right)k = 0.$$

$$k\, \Delta_\mu(z) = 0.$$

Agar oxirgi tenglikda $k = 0$ bo‘lsa, u holda (3) tenglikka ko‘ra $f(x) = 0$ bo‘ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning xos funksiya ekanligiga ziddir. Demak, $k \neq 0$ ekan. Shu sababdan $\Delta_\mu(z) = 0$ bo‘ladi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, biror $z_0 \in \mathbb{C}\backslash[m,M]$ soni uchun $\Delta_\mu(z_0) = 0$ bo‘lsin. U holda

$$f(x) = \frac{\mu\, c\, v(x)}{u(x) - z_0}, \qquad (c = const \neq 0) \qquad (5)$$

funksiya $H_\mu f = z_0 f$ tenglamani qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham,

$$(H_\mu f)(x) - z_0 f(x) = (u(x) - z_0)f(x) - \mu\, v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t)dt =$$

$$= (u(x) - z_0)\frac{\mu v(x)c}{u(x) - z_0} - \mu\, v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t)\frac{\mu v(t)c}{u(t) - z_0}dt =$$

$$= \mu v(x)c\left(1 - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)}{u(t) - z_0}dt\right) = \mu v(x)c\Delta_\mu(z_0) = \mu v(x)c \cdot 0 = 0.$$

(5) tenglikka ko‘ra $z_0 \in C\backslash[m,M]$ ekanligidan

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \mu^2 c^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)dt}{(u(t) - z_0)^2} < \infty$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, z_0 soni H_μ operator uchun xos qiymati, f esa unga mos xos funksiya ekan. Lemma to‘liq isbotlandi.

1-lemmadan H_μ operatorning diskret spektri uchun quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

1-tasdiq. H_μ operatorning $\sigma_{\text{disc}}(H_\mu)$ diskret spektri uchun

$$\sigma_{\text{disc}}(H_\mu) = \{z \in \mathbb{C}\backslash[m;M] \colon \Delta_\mu(z) = 0\}$$

tenglik o‘rinlidir.

https://buxdu.uz

III. Ikki noma'lumli parametrli tenglamalar sistemasi. Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{6}$$

ko'rinishdagi sistemaga ikki noma'lumli parametrli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ sonlari haqiqiy (kompleks) sonlar, x va y izlanayotgan noma'lumlar.

Endi (6) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lish shartlarini keltiramiz:

1) Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{11}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ shart bajarilsa, u holda (6) tenglamalar sistemasi yechimga ega emas.

2) Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$ shart bajarilsa, u holda (6) tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega.

3) Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{11}}{a_{22}}$ shart bajarilsa, u holda (6) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

O'quvchiga qulaylik uchun (6) tenglamalar sistemasini yechish usullarini bayon qilamiz.

"Kramer" usuli. (6) sistemasini o'rganishda bu sistemaning koeffisiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{7}$$

determinant (unga (6) tenglamalar sistemaning *bosh determinanti* deyiladi) hamda bu determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan ushbu

$$\Delta_x := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

$$\Delta_y := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

determinantlar muhim ahamiyatga ega.

(6) tenglamalar sistemasini yechish uchun, avvalo, bu sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglamasini esa -a_{12} ga ko'paytirib, keyin hadlab qo'shib

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{22}b_{12}y = a_{22}b_1 \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}b_{22}y = -a_{12}b_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

bo'lishini topamiz. So'ngra (6) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini esa a_{11} ga ko'paytirib keyin hadlab qo'shib

$$\begin{cases} -a_{11}a_{21}x - a_{21}b_{12}y = -a_{21}c_1 \\ a_{21}a_{11}x + a_{11}b_{22}y = a_{11}c_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_1 - a_{21}b_2$$

bo'lishini topamiz. Natijada (6) sistemaga teng kuchli bo'lgan ushbu

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_1 - a_{21}b_2$$

sistemaga kelamiz. Bu sistema tegishli belgilashlarni hisobga olgach quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x; \\ \Delta \cdot y = \Delta_y. \end{cases} \tag{8}$$

Ko'rinib turibdiki, (8) sistemaning yechimi Δ, Δ_x, Δ_y larga bog'liq.

Faraz qilaylik, $\Delta \neq 0$ bo'lsin. Bu holda (8) tenglamalar sistemasidan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{9}$$

bo'lishini topamiz. Bu topilgan x va y lar (8) tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. (6) tenglamalar sistemasining yechimini topishning bu usuli *Kramer qoidasi* deyiladi. (9) formula esa *Kramer formulasi* deyiladi [2].

Keltirilgan ma'lumotlar tadbig'ini ko'rish maqsadida $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosida

$$H = H_0 - V_1 - V_2 \tag{10}$$

ko'rinishdagi operatorni qaraymiz. Bu yerda H_0 operator $u(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_0f)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi],$$

V_1 va V_2 lar esa qo'zg'alish operatorlari (integral operatorlar) bo'lib,

$$(V_1f)(x) = v_1(x)\int_{-\pi}^{\pi} v_1(t)f(t)dt, \quad f \in L_2[-\pi;\pi];$$

https://buxdu.uz

$$(V_2 f)(x) = v_2(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_2(t) f(t) dt, \qquad f \in L_2[-\pi;\pi]$$

ko‘rinishda aniqlangan. Bu yerda $u(\cdot)$, $v_1(\cdot)$ va $v_2(\cdot)$ funksiyalar$[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

Parametr funksiyalarga qo‘yilgan bunday shartlarda (10) tenglik bilan aniqlangan H operator $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

H operatorning spekri va rezolventasini aniqlash maqsadida $\mathbb{C}\backslash[m,M]$ sohada regulyar bo‘lgan

$$I_{\alpha\beta}(z) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v_\alpha(t)\, v_\beta(t)}{u(t) - z} dt, \qquad \alpha,\beta = 1,2$$

hamda

$$K_\alpha(g;z) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v_\alpha(t)\, g(t)}{u(t) - z} dt, \qquad \alpha = 1,2$$

funksiyalarni kiritamiz.

H operatorning muhim spektri ham H_μ operatorning muhim spektri singari topiladi, ya’ni $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = [m;M]$.

H operator uchun xos qiymatga nisbatan tenglamani, ya’ni $(Hf)(x) = zf(x)$ tenglamani qaraymiz. Oxirgi tenglamani

$$u(x)f(x) - v_1(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_1(t)f(t)dt - v_2(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_2(t)f(t)dt = zf(x) \qquad (11)$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

$z \notin [m;M]$ ekanligidan barcha $x \in [-\pi;\pi]$ nuqtalarda $u(x) - z \neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli (11) tenglamadan $f(\cdot)$ funksiya uchun quyidagi

$$f(x) = \frac{k_1\, v_1(x) + k_2\, v_2(x)}{u(x) - z} \qquad (12)$$

ifodani topamiz, bu yerda

$$k_1 = \int_{-\pi}^{\pi} v_1(t)f(t)dt\,; \qquad k_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v_2(t)f(t)dt. \qquad (13)$$

$f(\cdot)$ uchun topilgan (12) ifodani (13) belgilashlarga qo‘yamiz hamda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$k_1 = \int_{-\pi}^{\pi} v_1(t) \frac{k_1\, v_1(t) + k_2\, v_2(t)}{u(t) - z} dt = k_1 I_{11}(z) + k_2 I_{12}(z);$$

$$k_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v_2(t) \frac{k_1\, v_1(t) + k_2\, v_2(t)}{u(t) - z} dt = k_1 I_{12}(z) + k_2 I_{22}(z)\,;$$

yoki

$$\begin{cases} k_1(1 - I_{11}(z)) - k_2 I_{12}(z) = 0; \\ -k_1 I_{12}(z) + k_2\big(1 - I_{22}(z)\big) = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Shunday qilib, $z \in \mathbb{C}\backslash[m;M]$ soni H operatorning xos qiymati bo‘lishi (14) tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

O‘z navbatida (14) tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1 - I_{11}(z) & -I_{12}(z) \\ -I_{12}(z) & 1 - I_{22}(z) \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Shu sababli H operatorning diskret spektri uchun

$\sigma_{disc}(H) = \{ z \in \mathbb{C}\backslash[m,M] : \Delta(z) = 0 \}$

tenglikni hosil qilamiz.

https://buxdu.uz

Demak, H operatorning spektri

$\sigma(H) = [m;M] \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash[m,M]: \Delta(z) = 0\}$

kabi aniqlanadi.

Endi H operatorning rezolventa operatorini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun fiksirlangan $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(H)$ soni uchun $f, g \in L_2[-\pi;\pi]$ funksiyalarga nisbatan

$$u(x)f(x) - v_1(x)\int_{-\pi}^{\pi} v_1(t)f(t)dt - v_2(x)\int_{-\pi}^{\pi} v_2(t)f(t)dt - zf(x) = g(x) \qquad (15)$$

tenglamani qaraymiz.

$z \notin [m;M]$ ekanligidan barcha $x \in [-\pi;\pi]$ nuqtalarda $u(x) - z \neq 0$ bo'lishi ma'lum. Shu sababli (15) tenglamadan $f(\cdot)$ funksiya uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$f(x) = \frac{k_1 v_1(x) + k_2 v_2(x) + g(x)}{u(x) - z}. \qquad (16)$$

Bu yerda k_1 va k_2 sonlari (13) tengliklar yordamida aniqlangan.

$f(\cdot)$ uchun topilgan (16) ifodani (13) belgilashlarga qo'yamiz hamda

$$k_1 = \int_{-\pi}^{\pi} v_1(t)\frac{k_1 v_1(t) + k_2 v_2(t) + g(t)}{u(t) - z}dt = k_1 I_{11}(z) + k_2 I_{12}(z) + K_1(g;z);$$

$$k_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v_2(t)\frac{k_1 v_1(t) + k_2 v_2(t) + g(t)}{u(t) - z}dt = k_1 I_{12}(z) + k_2 I_{22}(z) + K_2(g;z)$$

yoki

$$\begin{cases}(1 - I_{11}(z))k_1 - I_{12}(z)k_2 = K_1(g;z)\\(1 - I_{22}(z))k_2 - I_{12}(z)k_1 = K_2(g;z)\end{cases} \qquad (17)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (17) tenglamalar sistemasidan foydalanib, quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta := \begin{vmatrix}1 - I_{11}(z) & -I_{12}(z)\\ -I_{12}(z) & 1 - I_{22}(z)\end{vmatrix} = (1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z)) - (I_{12}(z))^2;$$

$$\Delta_{k_1} := \begin{vmatrix}K_1(g;z) & -I_{12}(z)\\ K_2(g;z)t & 1 - I_{22}(z)dt\end{vmatrix} = (1 - I_{22}(z))K_1(g;z) - I_{12}(z)K_2(g;z);$$

$$\Delta_{k_2} := \begin{vmatrix}1 - I_{11}(z) & K_1(g;z)\\ -I_{12}(z) & K_2(g;z)\end{vmatrix} = (1 - I_{11}(z))K_2(g;z) - I_{12}(z)K_1(g;z).$$

Yuqoridagi belgilashlardan foydalanib quyidagi

$$\begin{cases}\Delta \cdot k_1 = \Delta_{k_1};\\ \Delta \cdot k_2 = \Delta_{k_2}\end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar sistemasidan k_1 va k_2 yechimlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$k_1 = \frac{(1 - I_{22}(z))K_1(g;z) - I_{12}(z)K_2(g;z)}{(1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z)) - (I_{12}(z))^2}; \qquad (18)$$

$$k_2 = \frac{(1 - I_{11}(z))K_2(g;z) - I_{12}(z)K_1(g;z)}{(1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z)) - (I_{12}(z))^2} \qquad (19)$$

ifodalarni hosil qilamiz. k_1 uchun topilgan (18) ifodani va k_2 uchun topilgan (19) ifodani $f(x)$ uchun topilgan (16) ifodaga qo'yamiz:

$$f(x) = \frac{k_1 v_1(x) + k_2 v_2(x) + g(x)}{u(x) - z} = \frac{k_1 v_1(x)}{u(x) - z} + \frac{k_2 v_2(x)}{u(x) - z} + \frac{g(x)}{u(x) - z} =$$

$$= \frac{v_1(x)}{u(x) - z} \cdot \frac{(1 - I_{22}(z))K_1(g;z) - I_{12}(z)K_2(g;z)}{(1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z)) - (I_{12}(z))^2} +$$

$$+ \frac{v_2(x)}{u(x) - z} \cdot \frac{(1 - I_{11}(z))K_2(g;z) - I_{12}(z)K_1(g;z)}{(1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z)) - (I_{12}(z))^2} + \frac{g(x)}{u(x) - z}.$$

https://buxdu.uz

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonida joylashgan ifoda H operatorga mos $R_z(H)$ rezolventa operatorining ta'sir formulasini bildiradi. Shu sababli $R_z(H)$ rezolventa operatori $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosida

$$(R_z(H)g)(x) = \frac{K_1(g;z)[v_1(x) - v_1(x)I_{22}(z) - I_{12}(z)v_2(x)]}{u(x) - z} +$$
$$+\frac{K_2(g;z)[v_2(x) - v_1(x)I_{12}(z) - I_{11}(z)v_2(x)] + g(x)}{u(x) - z}$$

formula bilan aniqlanishini hosil qilamiz.

Aytish joizki, maqolaning ikkinchi qismida qo'llanilgan usullar yordamida panjaradagi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos umumlashgan Fridrixs modeli deb ataluvchi ikkinchi tartibli operatorli matrisaning muhim va diskret spektrlarini topishda hamda rezolventa operatorini qurishda foydalanish mumkin.

Xulosa. Ushbu maqola ikki qismdan iborat bo'lib, dastlab bir noma'lumli parametrli chiziqli tenglama va uning yechimga ega bo'lsh shartlari bayon qilingan. Bir o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modelining xos qiymatlarini o'rganishda parametrli chiziqli tenglama yechimga ega bo'lish shartlaridan foydalanilgan. Maqolaning ikkinchi qismida esa ikki noma'lumli parametrli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lish shartlari keltirilgan. Uni yechishning Kramer usuli yordamida ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modelining rezolventa operatori uchun ta'sir formulasi keltirib chiqarilgan. Har ikkala holda ham funksional tenglamalar nazaryasi usullaridan foydalanilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I.. Funksional analiz va integral tenglamalar. Darslik, Toshkent, ELPRESS, 2013.

2. Курош А.Г.. Олий алгебра курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1976.

3. Malishev V.A., Minlos R.A.. Linear infinite-particle operators. Translation of Mathematical Monographs. 143. AMS, Providence, RI, 1995.

4. Mogilner A.I.. Hamiltonians of solid-state physics at few-particle discrete Schroedinger operators: problems and results. Advances in Sov. Math., 5 (1991), pp. 139-194.

5. Feriedrichs K.O.. Perturbation of spectra in Hilbert space. AMS, 1965, Providence, Rhole Island.

6. Sobolev A.V.. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics. Commun. Math. Phys., 156 (1993), pp. 127-168.

7. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I.. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5 (2004), pp. 743-772.

8. Расулов Т.Х.. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решётке. Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

9. Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М.. Условия существования собственных значений трёхчастичного решётчатого модельного гамильтониана. Известия вузов. Математика. 7 (2023), С. 3-12.

10. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H.. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. Journal of Statistical Physics. 127:2 (2007), pp. 191-220.

11. Rasulov T.H., Dilmurodov E.. The first Schur complement for a lattice spin-boson model with at most two photons. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 14:3 (2023), pp. 304-311.

12. Расулов Т.Х.. О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока. Теоретическая и математическая физика. 152:3 (2007), С. 518-528.

https://buxdu.uz