Uzbek Mathematical
Journal, 2015,№1, pp.64-74

УДК 517.984

Оценки для квадратичной числовой области значений одной операторной матрицы

Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.

Maqolada 2×2 operatorli $\mathcal{A}$ matrisa (umumlashgan Fridrixs modeli) gilbert fazosida chegaralangan va uz- uziga qo‘shma operator sifatida qaralgan.

In this paper 2×2 operator matrix $\mathcal{A}$ (generalized Friedrichs model) is considered as a bounded and self-adjoint operator in Hilbert space.

1. Введение и предварительные сведения. Одним из классических методов изучения спектра линейного оператора $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения $D(\mathcal{A})$ является изучение его числовой области значений:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}x, x) : x \in D(\mathcal{A}),\, \|x\| = 1\}.$$

Пусть $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ - множества всех целых, вещественных и комплексных чисел, соответственно. Известно, что точечный спектр $\sigma_{\rm p}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ лежит в $\mathcal{W}(\mathcal{A})$, а его аппроксимативно точечный спектр $\sigma_{\rm app}(\mathcal{A})$ содержится в $\overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$. Если $\mathcal{A}$ есть замкнутый оператор и всякая компонента множества $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$ содержит хотя бы одну точку резольвентного множества $\rho(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, то имеет место включение $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$. В силу теоремы Теплица–Хаусдорфа [1] числовая область значений является выпуклым подмножеством множества $\mathbb{C}$. С одной стороны, свойства выпуклости является важным свойством. Надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух не пересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда дает достаточно хорошую структуру.

Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанных случаях, в работе [2] введено понятие квадратичный числовой области значений и затем изучены в работах [3, 4, 5, 6]. Это множество определено если дано разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ гильбертово пространство, а $L(\mathcal{H})$ пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ всегда записывается в виде блочно–операторной матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$. Для неограниченного линейного оператора $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$, его область определения $D(\mathcal{A})$ необязательно должна быть разложимым как прямая сумма $D_1 \oplus D_2$ подпространств $D_1 \subset \mathcal{H}_1$, $D_2 \subset \mathcal{H}_2$ и следовательно, утверждение о том, что оператор $\mathcal{A}$ имеет представление (1) является дополнительным предположением. В этом случае

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Так как в настоящей работе рассматривается случай, когда линейный оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным, дальнейшие понятия приводятся для ограниченных операторов действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Сначала дадим определение квадратичной численной области значений оператора $\mathcal{A}$ и некоторые информации о нем (для подробности смотрите работу [5]). Пусть $(\cdot, \cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i$-скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, соответственно.

Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathcal{A}_f := \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$$

таких, что $\|f_i\|_i = 1$, $i = 1, 2$ называется *квадратичной числовой областью значений* оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, соответствующей представлению (1) блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ и обозначается как $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$, т.е.

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) := \bigcup_{\|f_i\|_i = 1,\, i=1,2} \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_f), \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}.$$

Для двум различным разложениям гильбертового пространства $\mathcal{H}$, могут соответствовать различные квадратичные числовые области значений.

Например, квадратично числовым областям значений матрицы 4×4

$$M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

соответствующих разложениям $\mathbb{C}^2 \bigoplus \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3 \bigoplus \mathbb{C}^1$ являются различны [5], см. рис. 1.

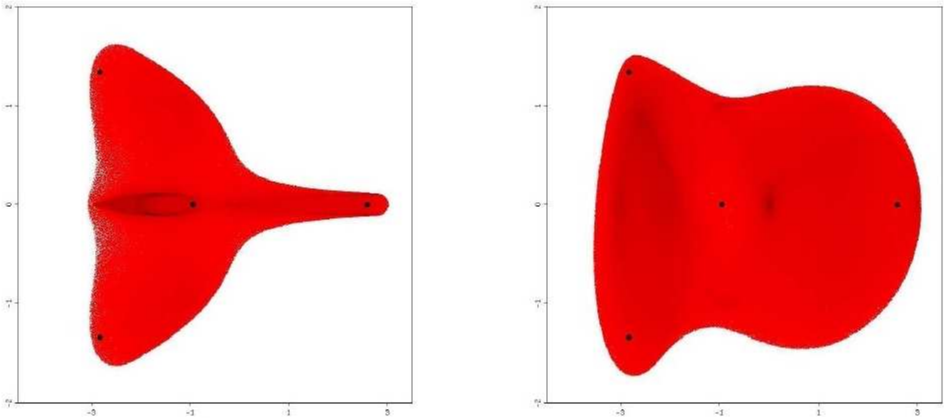

Рис. 1: Квадратичные числовые области значений M для $\mathbb{C}^2 \bigoplus \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3 \bigoplus \mathbb{C}^1$

В некоторых случаях удобно воспользоваться эквивалентным описанием квадратично числовой области значений, где используются ненулевые элементы f_1 и f_2 не обязательно имеющие нормы 1.

Для $f_i \in \mathcal{H}_i \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ положим

$$\widehat{\mathcal{A}}_f := \left(\frac{(A_{ij} f_j, f_i)_i}{\|f_i\|_i \|f_j\|_j} \right)_{i,j=1}^2$$

и

$$\Delta(f_1, f_2; \lambda) := \det \begin{pmatrix} (A_{11} f_1, f_1)_1 - \lambda (f_1, f_1)_1 & (A_{12} f_2, f_1)_1 \\ (A_{21} f_1, f_2)_2 & (A_{22} f_2, f_2)_2 - \lambda (f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = \bigcup_{f_i \in \mathcal{H}_i \setminus \{0\},\, i=1,2} \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_f)$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f_i \in \mathcal{H}_i \setminus \{0\},\, i=1,2,\, \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0\}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f_i \in \mathcal{H}_i \setminus \{0\},\, i=1,2,\ \ \Delta(f_1, f_2; \lambda) = 0\}.$$

Квадратичная числовая область значений всегда содержится в числовой области значений: $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) \subset \mathcal{W}(\mathcal{A})$. Если операторная матрица $\mathcal{A}$ имеет нижнюю или верхнюю треугольную форму, т.е.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

то $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = \mathcal{W}(A_{11}) \cup \mathcal{W}(A_{22})$. Аналогично числовой области значений, квадратичная числовая область значений ограниченной блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ является ограниченным подмножеством множество $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| \le \|\mathcal{A}\|\},$$

и оно замкнуто если $\dim \mathcal{H} < \infty$. В отличие от числовой области значений, квадратичная числовая область значений, вообще говоря, невыпуклая, оно состоит из не более двух компонент. С другой стороны, квадратичная числовая область значений обладает некоторыми аналогичными свойствами числовой области значений. Например, свойства спектральных включений для 2×2 ограниченных блочно-операторных матриц $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{W}^2(\mathcal{A})$, $\sigma_{\mathrm{app}}(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{W}^2(\mathcal{A})}$. А для свойства спектральных включений для неограниченных блочно-операторных матриц 2×2 понадобятся дополнительные условия [6].

В последнее время возник ряд вопросов статистической физики [7], гидродинамики [8] и теории твердого тела [9], приводящих к изучению спектральных свойств обобщенной модели Фридрихса, которая представляется как 2×2 операторная матрица. Следует отметить, что в тоже время такие операторы являются гамильтонианами системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке. Следовательно, исследование этих операторов играет важную роль в современной математической физике.

В настоящей работе рассматривается ограниченная самосопряженная 2×2 операторная матрица $\mathcal{A}$ (обобщенная модель Фридрихса). Найдена формула для квадратичной числовой области значений $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$

данного оператора. Приведены оценки для границы компонентов множеств $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$.

2. Операторная матрица и основные результаты. Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$- d-мерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^{\mathrm{d}}$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Ниже в данной работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется *двухчастичным обрезанным подпространством* фоковского пространства.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса $\mathcal{A}$ действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как 2×2 блочно-операторная матрица (1), где элементы $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i,j = 0,1$, определяются по формулам

$$A_{11}f_1 = wf_1, \quad A_{12}f_2 = (f_2, v)_2, \quad A_{21} = A_{12}^*, \quad (A_{22}f_2)(p) = u(p)f_2(p).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1,2$; w фиксированное вещественное число, $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а A_{12}^* сопряженный оператор к A_{12}.

Оператор A_{12} называется оператором уничтожения, а A_{21} называется оператором рождения.

Можно проверить, что при этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}$, является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Так как оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным, из определения множества $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$ следует, что $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$.

Для формулировки основных результатов данной работы введем следующие обозначения:

$$\Lambda_- := \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \Big\{ \min\{w, (uf_2, f_2)_2\} - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)_2|}{|w - (uf_2, f_2)_2|}\right) \Big\};$$

$$\Lambda_+ := \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \Big\{ \max\{w, (uf_2, f_2)_2\} + |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)_2|}{|w - (uf_2, f_2)_2|}\right) \Big\};$$

$$m := \min_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p), \quad M = \max_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p);$$

$$\delta_v^- := \|v\|_2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\|v\|_2}{|w-m|}\right), \quad \delta_v^+ := \|v\|_2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\|v\|_2}{|M-w|}\right).$$

В случае $m = w$ или $M = w$ положим $\operatorname{arctg} \infty := \pi/2$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для квадратичной числовой области значений оператора $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = \Lambda_- \cup \Lambda_+$.*

Теорема 2. а) *Если $w > M$, то $\Lambda_- \cap \Lambda_+ = \emptyset$ и выполняется соотношение*

$$\sup \Lambda_- \le M < w \le \inf \Lambda_+; \tag{2}$$

б) *Если $w < m$, то $\Lambda_- \cap \Lambda_+ = \emptyset$ и выполняется соотношение*

$$\sup \Lambda_- \le w < m \le \inf \Lambda_+.$$

в) *Если $m \le w \le M$, то для границы множества $\Lambda_\pm$ имеют место следующие оценки:*

$$m - \delta_v^- \le \inf \Lambda_- \le m, \quad \sup \Lambda_- \le w; \tag{3}$$

$$\inf \Lambda_+ \ge m, \quad M \le \sup \Lambda_+ \le M + \delta_v^+. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть $u(p) \equiv u_0 = \mathrm{const}$. При $w = u_0$ имеет место равенство*

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = [w - ||v||_2, w + ||v||_2].$$

Отметим, что если в теореме 3 выполняется неравенство $w \ne u_0$, то из утверждений а) и б) теоремы 2 автоматически вытекает, что $\Lambda_- \bigcap \Lambda_+ = \emptyset$.

Очевидно, что если $f_2 \in \mathcal{H}_2$ с нормой 1 ортогонально к v, а $f_1 \in \mathcal{H}_1$ произвольный нормированный элемент, то для таких $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ матрица $\mathcal{A}_f$ имеет собственное значение, равное w. Следовательно, $w \in \mathcal{W}^2(\mathcal{A})$.

3. Доказательство основных результатов. В этом пункте дается полное доказательство основных результатов работы, т.е. теорем 1–3.

Доказательство теоремы 1. Сначала для любого $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, $\|f_i\|_i = 1$, $i = 1, 2$ найдем $\sigma(\mathcal{A}_f)$. Ясно, что нули характеристического уравнения

$$\lambda^2-(w+(uf_2,f_2)_2)\lambda+w(uf_2,f_2)_2-|(v,f_2)_2|^2=0,$$

т.е., числа

$$\lambda_\pm(f_2):=\frac{w+(uf_2,f_2)_2}{2}\pm\frac{\sqrt{(w-(uf_2,f_2)_2)^2+4|(v,f_2)_2|^2}}{2}$$

являются собственными значениями матрицы $\mathcal{A}_f$.

Берем $\lambda_-(f_2)$ и используя соотношение

$$\frac{a+b}{2}=\min\{a,b\}+\frac{|a-b|}{2},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

перепишем его ввиде

$$\lambda_-(f_2)=\min\{w,(uf_2,f_2)_2\}-\frac{\sqrt{(w-(uf_2,f_2)_2)^2+4|(v,f_2)_2|^2}-|w-(uf_2,f_2)_2|}{2}.$$

Теперь простые вычисления показывают, что

$$\frac{\sqrt{(w-(uf_2,f_2)_2)^2+4|(v,f_2)_2|^2}-|w-(uf_2,f_2)_2|}{2|(v,f_2)_2|}=\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2|(v,f_2)_2|}{|w-(uf_2,f_2)_2|}\right).$$

Тогда $\lambda_-(f_2)$ можно записать следующим образом:

$$\lambda_-(f_2)=\min\{w,(uf_2,f_2)_2\}-|(v,f_2)_2|\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2|(v,f_2)_2|}{|w-(uf_2,f_2)_2|}\right).$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\lambda_+(f_2)=\max\{w,(uf_2,f_2)_2\}+|(v,f_2)_2|\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2|(v,f_2)_2|}{|w-(uf_2,f_2)_2|}\right).$$

Теперь доказательство теоремы 1 вытекает из определения множества $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$. Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. a) Докажем соотношение (2). Затем равенство $\Lambda_-\bigcap\Lambda_+=\emptyset$ автоматически вытекает из этого соотношения. В силу условие $M<w$ имеем

$$0\le\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2|(v,f_2)_2|}{|w-(uf_2,f_2)_2|}\right)<1.$$

Следовательно,

$$\sup \Lambda_- \le \sup \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \min\{w, (uf_2, f_2)_2\} = \sup \bigcup_{\|f_2\|_2=1} (uf_2, f_2)_2 \le M;$$

$$\inf \Lambda_+ \ge \inf \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \max\{w, (uf_2, f_2)_2\} = w.$$

Отсюда следует доказательство соотношения (2).

Доказательство части б) аналогично.

в) Пусть $m \le w \le M$. При любом $f_2 \in \mathcal{H}_2$, $\|f_2\|_2 = 1$ для $\lambda_-(f_2)$ получим

$$\lambda_-(f_2) = \frac{w + (uf_2, f_2)_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{w - (uf_2, f_2)_2}{2}\right)^2 + |(v, f_2)_2|^2}$$

$$\le \frac{w + (uf_2, f_2)_2}{2} - \left|\frac{w - (uf_2, f_2)_2}{2}\right| = \min\{w, (uf_2, f_2)_2\}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup \Lambda_- \le \sup \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \min\{w, (uf_2, f_2)_2\} \le \min\{w, M\} = w;$$

$$\inf \Lambda_- \le \inf \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \min\{w, (uf_2, f_2)_2\} \le \min\{w, m\} = m.$$

Теперь докажем оценку $\inf \Lambda_- \ge m - \delta_v^-$. Для этого $\lambda_-(f_2)$ перепишем как

$$\lambda_-(f_2) = \min\{w, (uf_2, f_2)_2\} - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)_2|}{|w - (uf_2, f_2)_2|}\right).$$

Предположим, что $w \ge (uf_2, f_2)_2$. Тогда

$$\lambda_-(f_2) = (uf_2, f_2)_2 - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)_2|}{w - (uf_2, f_2)_2}\right).$$

При каждом фиксированном $f_2 \in \mathcal{H}_2$ определим вспомогательную функцию

$$h_{f_2}(t) := t - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2|(v, f_2)_2|}{w - t}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Видно, что для любого $t \neq w$ существует производная $h'_{f_2}(t)$ удовлетворяющая следующему соотношению

$$h'_{f_2}(t) = 1 - \frac{(w-t)^2 + 4|(v, f_2)_2|^2 - 2|w-t|\sqrt{(w-t)^2 + 4|(v, f_2)_2|^2}}{2[(w-t)^2 + 4|(v, f_2)_2|^2]} \geq \frac{1}{2}.$$

Таким образом функция $h_{f_2}(\cdot)$ монотонно возрастает. Причем оно имеет скачок равный $2|(v, f_2)_2|$ в особой точке $t = w$. Следовательно, если $w \geq (uf_2, f_2)_2$, то

$$\lambda_-(f_2) \geq m - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2|(v, f_2)_2|}{w - m}\right)$$

$$\geq m - \|v\|_2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\|v\|_2}{w - m}\right) = m - \delta_v^-.$$

Если $w < (uf_2, f_2)_2$, то аналогично получим, что

$$\lambda_-(f_2) = w - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2|(v, f_2)_2|}{(uf_2, f_2)_2 - w}\right)$$

$$\geq m - |(v, f_2)_2| \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2|(v, f_2)_2|}{(uf_2, f_2)_2 - w}\right)$$

$$\geq m - \|v\|_2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\|v\|_2}{w - m}\right) = m - \delta_v^-.$$

Таким образом соотношение (3) полностью доказано.

Аналогичным образом можно доказать соотношение (4).

Таким образом доказаны все утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть $u(p) \equiv u_0 = \mathrm{const}$ и $w = u_0$. Тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{2|(v, f_2)_2|}{|w - (uf_2, f_2)_2|} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая это соотношение имеем

$$\Lambda_- = \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \Big\{\min\{w, u_0\} - |(v, f_2)_2|\Big\} = \bigcup_{\|f_2\|_2=1} (w - |(v, f_2)_2|); \tag{5}$$

$$\Lambda_+ = \bigcup_{\|f_2\|_2=1} \Big\{\max\{w, u_0\} + |(v, f_2)_2|\Big\} = \bigcup_{\|f_2\|_2=1} (w + |(v, f_2)_2|). \tag{6}$$

Если $\widetilde{f_2}$ нормированный элемент ортогональной к v, то $(v, \widetilde{f_2})_2 = 0$. Отсюда следует, что минимальное значение $|(v, f_2)_2|$ есть 0, которое достигается при $f_2 = \widetilde{f_2}$. Тогда из равенства (5) и (6) следует, что

$$\max \Lambda_- = w, \quad \min \Lambda_+ = w. \tag{7}$$

Если $\widehat{f_2} = v/||v||_2$, то $(v, \widehat{f_2})_2 = ||v||_2$. С другой стороны

$$\max_{||f_2||_2=1} |(v, f_2)_2| \leq \max_{||f_2||_2=1} \{||v||_2||f_2||_2\} = ||v||_2.$$

Значит, максимальное значение $|(v, f_2)_2|$ есть $\|v\|_2$, которое достигается при $f_2 = \widehat{f_2}$. Таким образом

$$\min \Lambda_- = w - \|v\|_2, \quad \max \Lambda_+ = w + \|v\|_2. \tag{8}$$

Учитывая равенства (7) и (8) и теорему 1, а также непрерывность скалярного произведения имеем, что $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = [w - ||v||_2; w + ||v||_2]$. Теорема 3 полностью доказана.

Литература

1. Т. Като. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. H. Langer, C. Tretter. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Operator Theory, **39**:2 (1998), 339–359.
3. H. Langer, A. S. Markus, V. I. Matsaev, C. Tretter. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range. Linear Algebra Appl., **330**:1-3 (2001), 89–112.
4. H. Langer, A. S. Markus, C. Tretter. Corners of numerical ranges. In *Recent advances in operator theory* (*Groningen, 1998*), vol. 124 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, 385–400 (Birkhauser, Basel, 2001).
5. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
6. C. Tretter. Spectral inclusion for unbounded block operator matrices. J. Func. Anal., **256** (2009), 3806–3829.
7. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. ТМФ, **2**:2 (1970), 230–243.
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.
9. Ю. А. Изюмов, М. В. Медведев. Магнитный полярон в ферромагнитном кристалле. Журнал экспрlaunch ментальной и теоретической физики, **2**:8 (1970), 553–560.

Бухарский государственный университет