E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
1/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

1/2023

https://buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 1

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

UO‘K: 517.984

KOMPAKT QO‘ZG‘ALISHLI UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING BA’ZI SPEKTRAL XOSSALARI

Rasulov To‘lqin Husenovich,
fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor,
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston
t.h.rasulov@buxdu.uz
Dilmurodov Elyor Baxtiyorovich,
fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),
V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti
Buxoro bo‘linmasi, Buxoro, O‘zbekiston
e.b.dilmurodov@buxdu.uz

Annotatsiya. *Panjaradgi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos* H *kompakt qo‘zg‘alishli umumlashgan Fridrixs modeli chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida qaraladi.* H *operatorning muhim spektri bo‘shliqqa (lakunaga) ega bo‘lgan hol tahlil qilinadi.* H *operatorning xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi quriladi va uning asosiy xossalari o‘rganiladi.*

Kalit so‘zlar: *kompakt qo‘zg‘alish, umumlashgan Fridrixs modeli, yo‘qotish operatori, paydo qilish operatori, Faddeyev tenglamasi, Veyl tengsizligi, Rushe teoremasi.*

Аннотация. *Обобщённая модель Фридрихса* H *с компактным возмущением, соответствующая системе частиц на решётки, число которых не сохраняется и не превышает двух, рассматривается как ограниченный самосопряжённый оператор. Обсуждается случай, когда существенный спектр оператора* H *имеет лакуну. Построено уравнение Фаддеева, соответствующее собственным вектор-функциям оператора* H*, и изучены его основные свойства.*

Ключевые слова: *компактное возмущение, обобщённая модель Фридрихса, оператор уничтожения, оператор рождения, уравнение Фаддеева, неравенство Вейля, теорема Руше.*

Abstract. *The generalized Friedrichs model* H *with compact perturbation, corresponding to a system of particles on a lattice, the number of which is not conserved and does not exceed two, is considered as a bounded self-adjoint operator. We analyze the case when the essential spectrum of the operator* H *has a gap. The Faddeev equation corresponding to the eigenvector functions of the operator* H *is constructed and its main properties are studied.*

Keywords: *compact perturbation, generalized Friedrichs model, annihilation operator, creation operator, Faddeev equation, Weyl inequality, Rouche theorem.*

Kirish. Analizning, matematik fizika va ehtimollar nazariyasining ko‘plab masalalari Fridrixs modeli [1] va umumlashgan Fridrixs modeli [2] deb nomlanuvchi operatorlarning spektral xossalarini o‘rganish masalasiga keltiriladi.

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ va $\mathbb{N}$ to‘plamlar orqali mos ravishda barcha kompleks, haqiqiy va natural sonlar to‘plamini belgilaymiz. Faraz qilaylik, D_i, $i = 1, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{N})$ – d o‘lchamli $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ fazodagi Yevklid o‘lchovli chegaralangan soha bo‘lib,

1) $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$;

2) $D := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}_i$

shartlar bajarilsin.

$\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ orqali ikki kanalli Hilbert fazo belgilangan bo‘lib, bu fazo $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ (1-kanal) bir o‘lchamli Hilbert fazo va $\mathcal{H}_1 := L_2(D)$ (2-kanal) – D da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosining to‘g‘ri yig‘indisidan iborat. $\mathcal{H}$ fazoning elementlari $f = (f_0, f_1)$ kabi vektor-funksiya ko‘rinishiga ega, bu yerda $f_0 \in \mathcal{H}_0$ va $f_1 \in \mathcal{H}_1$. Istalgan ikkita $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1) \in \mathcal{H}$ elementlar uchun ularning $\mathcal{H}$ fazodagi skalyar ko‘paytmasi

$$\langle f, g \rangle = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1$$

kabi aniqlanib,

$$(f_0, g_0)_0 = f_0\overline{g_0}, \quad (f_1, g_1)_1 = \int_D f_1(t)\overline{g_1(t)}dt$$

tengliklar o'rinlidir.

$\mathcal{H}$ Hilbert fazosida umumlashgan Fridrixs modeli deb ataluvchi va

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

kabi 2×2 blok operatorli matritsa ko'rinishida tasvirlanuvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda $H_{ij}: \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0,1$ matritsaviy elementlar quyidagicha aniqlangan:

$$H_{00}f_0 = \omega f_0, \quad H_{01}f_1 = \alpha \int_D v(t)f_1(t)dt,$$

$$H_{11} := H_{11}^0 - K, \quad (H_{11}^0 f_1)(p) = u(p)f_1(p), \quad (Kf_1)(p) = \alpha \int_D K(p,t)f_1(t)dt.$$

Bunda $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$; ω – tayinlangan haqiqiy son, $v(\cdot)$ va $K(\cdot,\cdot)$ – mos ravishda D va D^2 to'plamlarda aniqlangan haqiqiy qiymatli, chegaralangan funksiyalar, $u(\cdot)$ – D to'plamda aniqlangan bo'lakli uzluksiz, chegaralangan funksiya, $\alpha > 0$ esa ta'sirlashish parametri.

Parametrlarga qo'yilgan bunday shartlarda $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida (1) tenglik orqali aniqlanuvchi H operator chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. Bu holda $H_{01}^*: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ operator H_{01} operatorga qo'shma operator bo'lib,

$$(H_{01}^* f_0)(p) = v(p)f_0, \quad f_0 \in H_0$$

tenglik o'rinlidir. Odatda H_{01} operatorga yo'qotish operatori, H_{01}^* operatorga esa paydo qilish operatori deyiladi [3].

***H* operator xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi**. $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$, $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ va $\rho(\cdot)$ to'plamlar orqali mos ravishda chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operatorning spektrini, muhim spektrini, diskret spektrini va rezolventa to'plamini belgilaymiz.

Kompakt qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra H operatorning $\sigma_{\text{ess}}(H)$ muhim spektri H_{11}^0 operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi. Bunda $\sigma_{\text{ess}}(H)$ to'plam $u(\cdot)$ funksiyaning $\text{Ran}(u)$ qiymatlar sohasi yopig'iga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_{11}^0) = \overline{\text{Ran}(u)}.$$

Keyingi tadqiqotlarimizda qulaylik uchun K operatorni musbat va izli operatorlar sinfiga tegishli deb faraz qilamiz.

Quyida yordamchi tasdiqni bayon qilamiz va isbotini keltiramiz.

1-lemma. *K operatorning $K^{1/2}$ musbat kvadrat ildizi*

$$(K^{1/2}f)(p) = \int_D \widetilde{K}(p,t)f(t)dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $\widetilde{K}(\cdot,\cdot)$ orqali $K^{1/2}$ operatorning yadrosi belgilangan va bu yadro D^2 to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya bo'ladi.

Isbot. K musbat operator bo'lganligi bois, K operatorning har bir λ_m trivial bo'lmagan xos qiymati musbat bo'ladi. Hilbert-Shmidt teoremasiga [4] ko'ra

$$K = \sum_m \lambda_m (\varphi_m, \cdot)_1 \, \varphi_m$$

yoyilma o'rinli bo'lib, $\sum_m \lambda_m < \infty$ shart bajariladi, bu yerda φ_m orqali K operatorning λ_m xos qiymatiga mos xos vektor-funksiyasi belgilangan. Faraz qilaylik, $K^{1/2}$ operator K operatorning musbat kvadratik ildizi bo'lsin. U holda

$$K^{1/2} = \sum_m \sqrt{\lambda_m} (\varphi_m, \cdot)_1 \, \varphi_m.$$

Ushbu $\sum_m \lambda_m < \infty$ shartga ko'ra $K^{1/2}$ operator Hilbert-Shmidt operatori bo'ladi. Shu sababli $K^{1/2}$ integral operatorning $\widetilde{K}(\cdot,\cdot)$ yadrosi kvadrati bilan integrallanuvchi bo'ladi. 1-lemma to'liq isbotlandi.

Faraz qilaylik, $I_i - \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$ fazodagi birlik operator va $R_{11}^0(z) := (H_{11}^0 - zI_1)$ bo'lsin. H operator diskret spektrini o'rganishda $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida aniqlangan kompakt (simmetriklashtirilgan)

$$T(z) := \begin{pmatrix} T_{00}(z) & T_{01}(z) \\ T_{10}(z) & T_{11}(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \backslash \sigma(H_{11}^0)$$

kabi aniqlangan 2×2 o'lchamli blok operatorli matritsa muhim ahamiyatga ega bo'ladi, bu yerda $T_{ij}(z): \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 0,1$ matritsaviy elementlar quyidagicha aniqlangan:

$$T_{00}(z) := (1+z)I_0 - H_{00} + H_{01}R_{11}^0(z)H_{01}^*, \quad T_{01}(z) := -H_{01}R_{11}^0(z)K^{1/2},$$

$$T_{10}(z):=-K^{1/2}R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*},\quad T_{11}(z):=K^{1/2}R_{11}^{0}(z)K^{1/2}.$$

Quyidagi lemma mashhur Birman-Shmidt prinsipini tavsiflaydi hamda H va $T(z)$ operatorlar xos qiymatlari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

2-lemma. *$z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ soni H operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun 1 soni $T(z)$ operator uchun xos qiymat bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, z va 1 xos qiymatlarning karraliklari ustma-ust tushadi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ soni H operatorning xos qiymati, $f=(f_0,f_1)\in\mathcal{H}$ esa unga mos xos vektor-funksiya bo‘lsin. U holda f_0 va f_1 koordinatalar

$$\begin{cases}(H_{00}-zI_0)f_0+H_{01}f_1=0;\\ H_{01}^{*}f_0+(H_{11}^{0}-zI_1)f_1-Kf_1=0\end{cases}\tag{2}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

$z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ bo‘lganligi bois (2) tenglamalar sistemasining ikkinchi tengligida f_1 uchun

$$f_1=R_{11}^{0}(z)Kf_1-R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*}f_0\tag{3}$$

ifodani hosil qilamiz.

Endi $K^{1/2}$ operatorning f_1 funksiyaga ta’sirini hisoblaymiz:

$$K^{1/2}f_1=K^{1/2}R_{11}^{0}(z)Kf_1-K^{1/2}R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*}f_0.$$

$\tilde{f}_1:=K^{1/2}f_1$ belgilash kiritib oxirgi tenglikdan

$$\tilde{f}_1=K^{1/2}R_{11}^{0}(z)K^{1/2}\tilde{f}_1-K^{1/2}R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*}f_0\tag{4}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Undan foydalanib (3) tenglikni

$$f_1=R_{11}^{0}(z)K^{1/2}\tilde{f}_1-R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*}f_0\tag{5}$$

kabi yozib olamiz. f_1 uchun topilgan yangi (5) ifodani (2) tenglamalar sistemasining birinchi tengligiga qo’yib, (2) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo’lishi uchun

$$\begin{cases}(H_{00}-zI_0-H_{01}R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*})f_0+H_{01}R_{11}^{0}(z)K^{1/2}\tilde{f}_1=0\\ K^{1/2}R_{11}^{0}(z)H_{01}^{*}f_0+(I_1-K^{1/2}R_{11}^{0}(z)K^{1/2})\tilde{f}_1=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yoki $\Phi-T(z)\Phi=0$, $\Phi=(f_0,\tilde{f}_1)\in\mathcal{H}$ operatorli tenglama nolmas yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir. (2) tenglamalar sistemasi va $\Phi-T(z)\Phi=0$ operatorli tenglamaning chiziqli bog‘lanmagan yechimlari soni bir xil ekanligi chiziqli algebra va funksional analiz elementlaridan foydalanib oson ko‘rsatiladi. Bu esa H va $T(z)$ operatorlarning mos ravishda z va 1 xos qiymatlari bir xil karralikga ega ekanligini bildiradi. 2-lemma isbotlandi.

1-izoh. Odatda $T(z)\Phi=\Phi$ operatorli tenglamaga H umumlashgan Fridrixs modelining xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tenglamasining analogi deyiladi.

2-izoh. Ta’kidlash joizki, $T(\cdot)$ operatorli funksiya monotonlik xossasiga ega emas, shu sababli [5] maqolada ishlab chiqilgan usuldan maqolaning asosiy natijalarini isbotlashda foydalanib bo‘lmaydi.

Aniqlanishiga ko‘ra $T(\cdot)$ operatorli funksiya $\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ sohada analitik funksiya bo‘ladi. Bundan tashqari, har bir tayinlangan $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ soni uchun $T(z)$ operator izli operatorlar sinfiga tegishli bo‘ladi.

Haqiqatan ham, 1-lemmaga ko‘ra $K^{1/2}$ operator Hilbert-Shmidt operatori bo‘ladi. $R_{11}^{0}(z)$ chegaralangan operator bo‘lganligi bois, $T_{11}(z)$ operator izli operatorlar sinfiga tegishli bo‘ladi. $T_{00}(z)$, $T_{01}(z)$ va $T_{01}^{*}(z)$ operatorlarning 1 o‘lchamli ekanligidan har bir tayinlangan $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ uchun $T(z)$ operatorli matritsa izli operatorli sinfiga tegishli bo‘ladi. Shu sababli $\lambda\neq0$ uchun $I-\lambda^{-1}T(z)$ operatorning $D(\lambda,z):=\det[I-\lambda^{-1}T(z)]$ determinanti yaxshi aniqlangan va analitik bo‘ladi, bu yerda $\mathrm{I}:=\mathrm{diag}\{I_0,I_1\}$. [4] kitobdagi XIII.105 teoremaga ko‘ra quyidagi lemma o‘rinli.

3-lemma. *$\lambda\neq0$ soni $T(z)$ operatorning $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ bo‘lganda xos qiymati bo‘lishi uchun $D(\lambda,z)=0$ bo’lishi zarur va yetarlidir.*

2- va 3-lemmalardan quyidagi lemma kelib chiqadi.

4-lemma. *$z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ soni H operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun $D(1,z)=0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Ta’kidlash joizki, $T(z)$ operator har bir $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ da aniqlangan.

5-lemma. *Agar $\lambda\neq0$ soni biror $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ uchun $T(z)$ operatorning xos qiymati bo‘lsa, u holda z haqiqiy son bo‘ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\Phi=(\varphi_0,\varphi_1)\in\mathcal{H}$ vektor-funksiya $T(z)$, $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^{0})$ operatorning $\lambda\neq0$ xos qiymatiga mos normalangan xos vektor-funksiyasi bo‘lsin. $(u(p)-z)^{-1}$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib, $R_{11}^{0}(z)$ operatorni

$$R_{11}^{0}(z)=\hat{R}_{11}^{0}(z)+i\mathrm{Im}z\cdot\tilde{R}_{11}^{0}(z)$$

ko‘rinishda tasvirlab olamiz, bu yerda $\hat{R}_{11}^{0}(z)$, $\tilde{R}_{11}^{0}(z)$ operatorlar mos ravishda

$$\frac{u(p)-\mathrm{Re}z}{[u(p)-\mathrm{Re}z]^2+(\mathrm{Im}z)^2}, \quad \frac{1}{[u(p)-\mathrm{Re}z]^2+(\mathrm{Im}z)^2}$$

funksiyalarga ko‘paytirish operatoridir. Shu sababli $T(z)$ operatorni o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan $\hat{T}(z)$ va $\tilde{T}(z)$ operatorlar orqali $T(z)=\hat{T}(z)+i\mathrm{Im}z\cdot\tilde{T}(z)$ kabi yozish mumkin, bu yerda $\hat{T}(z)$ va $\tilde{T}(z)$ operatorlar

$$\hat{T}(z):=\begin{pmatrix}(1+\mathrm{Re}z)I_0-H_{00}+H_{01}\hat{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & -H_{01}\hat{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\\ -K^{1/2}\hat{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & K^{1/2}\hat{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}(z):=\begin{pmatrix}I_0+H_{01}\tilde{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & -H_{01}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\\ -K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\end{pmatrix}$$

formulalar yordamida aniqlanadi. $\lambda\Phi=\hat{T}(z)\Phi+i\mathrm{Im}z\cdot\tilde{T}(z)\Phi$ tenglikni Φ vektorga skalyar ko‘paytirib va $T(z), \hat{T}(z), \tilde{T}(z)$ operatorlarning o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligini inobatga olib,

$$\langle\tilde{T}(z)\Phi,\Phi\rangle\,\mathrm{Im}z=0 \tag{6}$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi $\mathrm{Im}z=0$ ekanligini ko‘rsatamiz. $\|\Phi\|=1$ bo‘lganligi bois, ikkita hol bo‘lishi mumkin: $\varphi_0=0$ yoki $\varphi_0\neq 0$. Faraz qilaylik, $\varphi_0=0$ bo‘lsin. U holda $\|\Phi\|=\|\varphi_1\|=1$ bo’ladi. Bu holda

$$\langle\tilde{T}(z)\Phi,\Phi\rangle=(K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1,\varphi_1)_1=(\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1,K^{1/2}\varphi_1)_1>0.$$

$\tilde{R}_{11}^0(z)$ operatorning ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, $(\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1,K^{1/2}\varphi_1)_1=0$ bo‘lishi uchun $K^{1/2}\varphi_1=0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa $\lambda\neq 0$ soni $T(z)$ operatorning xos qiymati ekanligiga ziddir.

Endi $\varphi_0\neq 0$ deb faraz qilamiz.

$$\phi_0:=H_{10}\varphi_0, \quad \phi_1:=K^{1/2}\varphi_1;$$

$$\hat{\phi}_j(p):=\mathrm{Re}(\phi_j(p)), \quad \tilde{\phi}_j(p):=\mathrm{Im}(\phi_j(p)), \quad j=0,1$$

kabi belgilash olamiz. Ushbu

$$|\phi_0(p)|^2+|\phi_1(p)|^2-2\mathrm{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})=(|\hat{\phi}_0(p)|-|\hat{\phi}_0(p)|)^2+(|\tilde{\phi}_0(p)|-|\tilde{\phi}_0(p)|)^2,$$

munosabatdan foydalanib sodda hisoblashlar yordamida

$$\langle\tilde{T}(z)\Phi,\Phi\rangle=|\varphi_0|^2+(\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_0,\phi_0)_1-2\mathrm{Re}(\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_1,\phi_0)_1+(\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_1,\phi_1)_1$$

$$=|\varphi_0|^2+\int_D\frac{1}{[u(p)-\mathrm{Re}z]^2+(\mathrm{Im}z)^2}\{|\phi_0(p)|^2+|\phi_1(p)|^2-2\mathrm{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})\}dp\geq|\varphi_0|^2>0$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shunday qilib, $\langle\tilde{T}(z)\Phi,\Phi\rangle>0$ ekan. (6) tenglikdan $\mathrm{Im}z=0$ kelib chiqadi. 5-lemma isbotlandi.

Asosiy natijalar. Faraz qilaylik, B operator $\mathcal{H}$ Hilbert fazosidagi chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator, $\mathcal{H}_B(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ esa elementlari $(Bf,f)>\lambda\|f\|$, $f\neq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qism fazo bo‘lsin.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$n(\lambda,B):=\sup_{\mathcal{H}_B(\lambda)}\dim\mathcal{H}_B(\lambda).$$

Agar $\lambda<\max\sigma_{\mathrm{ess}}(B)$ bo‘lsa, $n(\lambda,B)$ soni cheksizga teng bo‘ladi va agar $n(\lambda,B)$ soni chekli bo‘lsa, u holda bu son B operatorninng λ dan katta xos qiymatlar soniga (karraligi bilan qo‘shib hisoblaganda) teng bo‘ladi [6].

Endi maqolaning asosiy natijalarini bayon qilamiz va isbotlaymiz.

1-teorema. *$z\in\mathbb{C}\backslash\sigma(H_{11}^0)$ soni H operatorning regulyar nuqtasi bo‘lishi uchun $n(1,T(\cdot))$ funksiya $z=z_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $z=z_0$ soni $T(z)$ operatorning regulyar nuqtasi bo‘lsin. U holda 2-lemmaga ko‘ra $I-T(z_0)$ operator teskarilanuvchan bo‘ladi. $\lambda^{-1}T(z)$ operator-funksiyaning $(\lambda,z)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\backslash\sigma(H_{11}^0)$ bo‘yicha uzluksizligi va $T(z)$ operatorning kompaktligidan $(1,z_0)$ nuqtaning biror atrofidagi barcha (λ,z) lar uchun $I-\lambda^{-1}T(z)$ operator teskarilanuvchan bo‘ladi. Shu sababli biror $\rho>0$ soni uchun barcha $z\in[z_0-\rho,z_0+\rho]$ larda $\sigma(T(z))\cap(1-\rho,1+\rho)=\emptyset$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $n(a,T(\cdot))$ funksiya ta’rifidan barcha ξ va $\delta\in[0,z_0+\rho)$ lar uchun

$$n(1\pm\delta,T(z_0\pm\xi))=n(1,T(z_0\pm\xi))$$

tenglikni hosil qilamiz. Kompakt operatorlar yig‘indisi hamda istalgan musbat a_1 va a_2 sonlari uchun

$$n(a_1+a_2,A_1+A_2)\leq n(a_1,A_1)+n(a_2,A_2) \tag{7}$$

Veyl tengsizligini [6] qo‘llab biror $\eta_0\in(0,\delta)$ soni va barcha yetarlicha kichik $\xi>0$ soni uchun

$$n(1+\eta_0,T(z_0\pm\xi))\leq n(1,T(z_0\pm\xi))+n(\eta_0,T(z_0\pm\xi)-T(z_0))=n(1,T(z_0))$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shunga o‘xshash mulohazalar yuritib, yetarlicha kichik $\xi>0$ soni uchun $n(1,T(z_0\pm\xi))=n(1,T(z_0))$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu esa o‘z navbatida $n(1,T(\cdot))$ funksiya $z=z_0$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

Yetarliligi. Teskarisini faraz qilamiz. $n(1,T(\cdot))$ funksiya $z=z_0$ nuqtada uzluksiz, z_0 soni esa H operatorning xos qiymati bo‘lsin.

Yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib va (7)-Veyl tengsizligidan foydalanib, biror $\delta_0>0$, $c_0=c_0(\delta_0)>0$ sonlari va barcha $\varepsilon\in[-c_0,c_0]$ sonlari uchun

$$n(1,T(z_0))=n(1+\delta_0,T(z_0))=n(1+\delta_0/4,T(z_0+\varepsilon)) \qquad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz. 4-lemmaga ko‘ra $D(1,z_0)=0$ tenglik o‘rinli. Γ_δ orqali z_0 nuqtaning δ kompleks atrofi bo’lgan $U_\delta(z_0)$ to’plamning chegarasini belgilaymiz. Bu holda δ ning yetarlicha kichik ekanligidan barcha $z\in\Gamma_\delta$ lar uchun $D(1,z_0)\neq 0$ ekanligini hosil qilamiz. Belgilash kiritamiz:

$$d:=\min_{z\in\Gamma_\delta}|D(1,z)|,\quad \psi_\varepsilon(z):=D(1+\varepsilon,z)-D(1,z).$$

$D(\cdot,\cdot)$ funksiya uzluksiz bo‘lganligi bois, shunday $\rho=\rho(\delta)>0$ soni topilib, barcha $\varepsilon\in[-\rho,\rho]$ va $z\in\Gamma_\delta$ sonlari uchun $|\psi_\varepsilon(z)|<d$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, har bir tayinlangan $\varepsilon\in[-\rho,\rho]$ soni uchun $\overline{U_\delta(z_0)}$ to‘plamda aniqlangan $D(1,\cdot)$ va $\psi_\varepsilon(\cdot)$ funksiyalar Rushe teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Shu sababli $D(1,\cdot)$ va $D(1+\varepsilon,\cdot)$ funksiyalarning $U_\delta(z_0)$ to‘plamda yotuvchi nollari soni tengdir. Faraz qilaylik, biror $z_\varepsilon\in U_\delta(z_0)$ uchun $D(1+\varepsilon,z_\varepsilon)=0$, $\varepsilon>0$ bo‘lsin. U holda 4-lemmaga ko‘ra barcha $\varepsilon\in(0,\rho')$ lar uchun $1+\varepsilon$ soni $T(z_\varepsilon)$ operatorning xos qiymati bo‘ladi. Shuning uchun 5-lemmaga ko‘ra z_ε haqiqiy son bo‘ladi. Bundan va (8) tenglikdan barcha $\varepsilon\in(0,\rho')$ sonlari uchun

$$n(1,T(z_\varepsilon))-n(1,T(z_0))\geq n(1+\varepsilon/2,T(z_\varepsilon))-n(1,T(z_0))$$
$$\geq 1+n(1+\delta_0/4,T(z_\varepsilon))-n(1,T(z_0))=1$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz. Demak $n(1,T(z_0))\neq\lim_{\varepsilon\to 0}n(1,T(z_\varepsilon))$, ya’ni $n(1,T(\cdot))$ funksiya $z=z_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lmaydi. Bu esa farazimizga ziddir. 1-teorema isbotlandi.

2-teorema. *Faraz qilaylik $z_0\in\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$ bo‘lsin. U holda yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topilib,*

$$\mathrm{card}\{z\in U_\delta(z_0): D(1+\varepsilon,z)=0\}=\mathrm{card}\{z\in U_\delta(z_0): D(1-\varepsilon,z)=0\}$$
$$=\mathrm{card}\{z\in U_\delta(z_0): D(1,z)=0\}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $\mathrm{card}M$ orqali M to‘plamning quvvati belgilangan.

Isbot. Agar $z_0\in\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$ bo‘lsa, 4-lemmaga ko‘ra $D(1,z_0)=0$ bo‘ladi. U holda shunday $\delta>0$ soni topilib, barcha $z\in\Gamma_\delta$ lar uchun $D(1,z_0)\neq 0$ bo‘ladi. Bu holda 1-teoremaning yetarlilik qismi isbotidagi kabi mulohazalar yuritib, yetarlicha kichik $\rho>0$ soni uchun har bir $\varepsilon\in[-\rho,\rho]$ da $D(1,\cdot)$ funksiyaning $U_\delta(z_0)$ to‘plamda yotuvchi nollari soni va $D(1+\varepsilon,\cdot)=\psi_\varepsilon(\cdot)+D(1,\cdot)$ funksiyaning $U_\delta(z_0)$ to‘plamda yotuvchi nollari soni teng bo‘ladi. 2-teorema isbotlandi.

Xulosa. Maqolada zamonaviy matematikaning bir qator sohalarida uchraydigan panjaradgi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos H kompakt qo‘zg‘alishli umumlashgan Fridrixs modeli qaralgan. Bu model Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosidagi chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida tadqiq qilingan. Ishda H operatorning muhim spektri bo‘shliqqa (lakunaga) ega bo‘lgan hol tahlil qilinib, o‘rganilayotgan operatorning xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi qurilgan hamda uning xos qiymatlar soni bilan bog‘liq asosiy xossalari o‘rganilgan.

ADABIYOTLAR:

1. K.O.Friedrichs. Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators. Math. Ann., 115:1 (1938), 249–272.

2. С.Н.Лакаев. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 11 (1986), 210–223.

3. К.Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М., 1969.

4. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

5. М.Э.Муминов. О выражении числа собственных значений модели Фридрихса. Матем. заметки, 82:1 (2007), 75–83.

6. A.V.Sobolev. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics. Comm. Math. Phys., 156 (1993), 101–126.