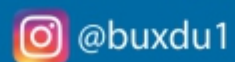
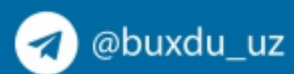




# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

Научный вестник Бухарского государственного университета  
Scientific reports of Bukhara State University

1/2023



1/2023

<https://buxdu.uz>



**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI**  
**SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY**  
**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Ilmiy-nazariy jurnal**  
**2023, № 1**

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.  
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

**Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
**Elektron manzil:** nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

**TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Bosh muharrir o'rinbosari:** Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

**Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich**, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

**Danova M.**, filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

**Margianti S.E.**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

**Minin V.V.**, kimyo fanlari doktori (Rossiya)

**Tashqarayev R.A.**, texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

**Mo'minov M.E.**, fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

**Adizov Baxtiyor Rahmonovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Abuzalova Mexriniso Kadirovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonov Muxtor Raxmatovich**, texnika fanlari doktori, professor

**Barotov Sharif Ramazonovich**, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

**Baqoyeva Muhabbat Qayumovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich**, biologiya fanlari doktori, professor

**Djurayev Davron Raxmonovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Olimov Shirinboy Sharofovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Qahhorov Siddiq Qahhorovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Umarov Baqo Bafojevich**, kimyo fanlari doktori, professor

**Murodov G'ayrat Nekovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**O'rayeva Darmonoy Saidjonovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Hayitov Shodmon Ahmadovich**, tarix fanlari doktori, professor

**To'rayev Halim Hojiyevich**, tarix fanlari doktori, professor

**Rasulov Baxtiyor Mamajonovich**, tarix fanlari doktori, professor (Andijon davlat Pedagogika instituti rektori)

**Boboyev Feruz Sayfullayevich**, tarix fanlari doktori (O'ZR FA tarix instituti yetakchi ilmiy xodimi)

**Jo'rayev Narzulla Qosimovich**, siyosiy fanlar doktori, professor

**Qurbonova Gulnoz Negmatovna**, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

**Jumayev Rustam G'aniyevich**, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

**Quvvatova Dilrabo Habibovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Axmedova Shoir Nematovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonova Zilola Qodirovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Zaripov Gulmurot Toxirovich**, texnika fanlari nomzodi, dotsent

MUNDARIJA \*\*\* СОДЕРЖАНИЕ \*\*\* CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR \*\*\* EXACT AND NATURAL SCIENCES \*\*\* ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

<b>Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.,</b>	Kompakt qo'zg'alishli umumlashgan Fridrixs modelining ba'zi spektral xossalari	4
<b>Ismoilova D.E.</b>	Fermionli fok fazodagi uchinchi tartibli operatorli matritsaga mos kanal operator va uning spektri	9
<b>Jumaev J.J., Tursunova S.F., Ibragimova Sh.E.,</b>	Inverse coefficient problem for heat equation in the bounded domain	15
<b>Djurayev D.R., Turayev A.A., To'rayev O.G'.</b>	$Bi_{1.7}Pb_{0.3}Sr_2Ca_nCu_{n-1}O_y$ vismut asosli kupratlarning olinish texnologiyasi	21
<b>Umarov Sh.A.</b>	Shifrlash algoritmlarida kriptobardoshli mantiqiy amallardan foydalanish usullari	25
<b>Ахмедов О.С.</b>	Свободные и вынужденные осесимметричные колебания систем вязкоупругих цилиндрических оболочек	30
<b>Исломов Б.И., Жураев Ф.М.</b>	Краевые задачи с условием Геллерстедта на параллельных характеристиках для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа	34
<b>Амиров С.Ф, Шаропов Ш.А, Сатторов Т.А.</b>	Дифференциал трансформатор датчиклар оддий ва махсус структурали ночизиқ магнит занжирларининг математик моделлари	43
<b>Турдиев Х.Х., Суяров Т.Р., Наврүзова М.Н.</b>	Начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных гиперболических уравнений	50
<b>Tosheva N.A.</b>	Lower bound of the essential spectrum of a family of $3 \times 3$ operator matrices	57
<b>Akramova D.I.</b>	Estimates for convolution operators related to $A_\infty$ type singularities	63
<b>Jo'raqulova F.M.</b>	Bozonli fok fazodagi operatorli matritsaga mos Faddeyev tenglamasi	72
<b>Rasulov T.H., Ne'matova Sh.B.</b>	Umumlashgan Fridrixs modeli kvadratik sonli tasvirining komponentlari	77
<b>Seytov Sh.J., Ochilova G.B.</b>	Баъзи даврий реакцияларнинг математик моделлари	82
<b>Sirliyeva F.A., Khudaybergenov K.K., Muminov Z.E.</b>	Fuzzy neural network and agent technologies in the structural-parametric modeling of technological systems	87
<b>Tosheva N. A., Qodirov S. O.</b>	Python dasturlash tili yordamida matritsa sonli tasvirini kompleks tekislikda tasvirlash algoritmi	93
<b>Хасанов И.И., Хасанов К.Х.</b>	Начально-краевая задача для адвекции - дисперсионного уравнения дробного порядка	100
<b>Husenov B. E.</b>	Poisson representation for $A(z)$ -harmonic functions belonging to some class	107
<b>TILSHUNOSLIK *** LINGUISTICS *** ЯЗЫКОЗНАНИЕ</b>		
<b>Nigmatova L. X.</b>	Lisoniy sistemaning pog'onaviyligi va unda gipo-giperonimik munosabatlar	116
<b>Sadigova S.I.</b>	Phraseological combinations with ordinal numbers in English	123
<b>Abdulxayrov D.P.</b>	-Gan ekan shaklining mazmuniy ko'rinishlari	127
<b>Xodjayeva D.I., Hoshimova G.M.</b>	Erkin Vohidov she'rlarida ritorik so'roq gaplarning o'ziga xos xususiyatlari	131

**KOMPAKT QO‘ZG‘ALISHLI UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING BA‘ZI  
SPEKTRAL XOSSALARI**

**Rasulov To‘lqin Husenovich,**  
fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor,  
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston  
[t.h.rasulov@buxdu.uz](mailto:t.h.rasulov@buxdu.uz)

**Dilmurodov Elyor Baxtiyorovich,**  
fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),  
V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti  
Buxoro bo‘linmasi, Buxoro, O‘zbekiston  
[e.b.dilmurodov@buxdu.uz](mailto:e.b.dilmurodov@buxdu.uz)

**Annotatsiya.** Panjaradgi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos  $H$  kompakt qo‘zg‘alishli umumlashgan Fridrixs modeli chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida qaraladi.  $H$  operatorning muhim spektri bo‘shliqqa (lakunaga) ega bo‘lgan hol tahlil qilinadi.  $H$  operatorning xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi quriladi va uning asosiy xossalari o‘rganiladi.

**Kalit so‘zlar:** kompakt qo‘zg‘alish, umumlashgan Fridrixs modeli, yo‘qotish operatori, paydo qilish operatori, Faddeyev tenglamasi, Veyl tengsizligi, Rushe teoremasi.

**Аннотация.** Обобщённая модель Фридрикса  $H$  с компактным возмущением, соответствующая системе частиц на решётки, число которых не сохраняется и не превышает двух, рассматривается как ограниченный самосопряжённый оператор. Обсуждается случай, когда существенный спектр оператора  $H$  имеет лауну. Построено уравнение Фаддеева, соответствующее собственным вектор-функциям оператора  $H$ , и изучены его основные свойства.

**Ключевые слова:** компактное возмущение, обобщённая модель Фридрикса, оператор уничтожения, оператор рождения, уравнение Фаддеева, неравенство Вейля, теорема Руше.

**Abstract.** The generalized Friedrichs model  $H$  with compact perturbation, corresponding to a system of particles on a lattice, the number of which is not conserved and does not exceed two, is considered as a bounded self-adjoint operator. We analyze the case when the essential spectrum of the operator  $H$  has a gap. The Faddeev equation corresponding to the eigenvector functions of the operator  $H$  is constructed and its main properties are studied.

**Keywords:** compact perturbation, generalized Friedrichs model, annihilation operator, creation operator, Faddeev equation, Weyl inequality, Rouche theorem.

**Kirish.** Analizning, matematik fizika va ehtimollar nazariyasining ko‘plab masalalari Fridrixs modeli [1] va umumlashgan Fridrixs modeli [2] deb nomlanuvchi operatorlarning spektral xossalari o‘rganish masalasiga keltiriladi.

$\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  va  $\mathbb{N}$  to‘plamlar orqali mos ravishda barcha kompleks, haqiqiy va natural sonlar to‘plamini belgilaymiz. Faraz qilaylik,  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) –  $d$  o‘lchamli  $\mathbb{R}^d$  fazodagi Yevklid o‘lchovli chegaralangan soha bo‘lib,

$$1) D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j;$$

$$2) D := \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i$$

shartlar bajarilsin.

$\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  orqali ikki kanalli Hilbert fazo belgilangan bo‘lib, bu fazo  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$  (1-kanal) bir o‘lchamli Hilbert fazo va  $\mathcal{H}_1 := L_2(D)$  (2-kanal) –  $D$  da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosining to‘g‘ri yig‘indisidan iborat.  $\mathcal{H}$  fazoning elementlari  $f = (f_0, f_1)$  kabi vektor-funksiya ko‘rinishiga ega, bu yerda  $f_0 \in \mathcal{H}_0$  va  $f_1 \in \mathcal{H}_1$ . Istalgan ikkita  $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1) \in \mathcal{H}$  elementlar uchun ularning  $\mathcal{H}$  fazodagi skalyar ko‘paytmasi

$$\langle f, g \rangle = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1$$

kabi aniqlanib,

$$(f_0, g_0)_0 = f_0 \overline{g_0}, \quad (f_1, g_1)_1 = \int_D f_1(t) \overline{g_1(t)} dt$$

tengliklar o'rinlidir.

$\mathcal{H}$  Hilbert fazosida umumlashgan Fridriks modeli deb ataluvchi va

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} \end{pmatrix} \quad (1)$$

kabi  $2 \times 2$  blok operatorli matritsa ko'rinishida tasvirlanuvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda  $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i \leq j, i, j = 0, 1$  matritsaviy elementlar quyidagicha aniqlangan:

$$H_{00}f_0 = \omega f_0, \quad H_{01}f_1 = \alpha \int_D v(t)f_1(t)dt,$$

$$H_{11} := H_{11}^0 - K, \quad (H_{11}^0 f_1)(p) = u(p)f_1(p), \quad (Kf_1)(p) = \alpha \int_D K(p, t)f_1(t)dt.$$

Bunda  $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1; \omega$  – tayinlangan haqiqiy son,  $v(\cdot)$  va  $K(\cdot, \cdot)$  – mos ravishda  $D$  va  $D^2$  to'plamlarda aniqlangan haqiqiy qiymatli, chegaralangan funksiyalar,  $u(\cdot)$  –  $D$  to'plamda aniqlangan bo'lakli uzluksiz, chegaralangan funksiya,  $\alpha > 0$  esa ta'sirlashish parametri.

Parametrlarga qo'yilgan bunday shartlarda  $\mathcal{H}$  Hilbert fazosida (1) tenglik orqali aniqlanuvchi  $H$  operator chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi. Bu holda  $H_{01}^*: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$  operator  $H_{01}$  operatorga qo'shma operator bo'lib,

$$(H_{01}^* f_0)(p) = v(p)f_0, \quad f_0 \in H_0$$

tenglik o'rinlidir. Odatda  $H_{01}$  operatorga yo'qotish operatori,  $H_{01}^*$  operatorga esa paydo qilish operatori deyiladi [3].

**H operator xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi.**  $\sigma(\cdot), \sigma_{\text{ess}}(\cdot), \sigma_{\text{disc}}(\cdot)$  va  $\rho(\cdot)$  to'plamlar orqali mos ravishda chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operatorning spektrini, muhim spektrini, diskret spektrini va rezolventa to'plamini belgilaymiz.

Kompakt qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra  $H$  operatorning  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  muhim spektri  $H_{11}^0$  operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi. Bunda  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  to'plam  $u(\cdot)$  funksiyaning  $\text{Ran}(u)$  qiymatlar sohasi yopig'iga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_{11}^0) = \overline{\text{Ran}(u)}.$$

Keyingi tadqiqotlarimizda qulaylik uchun  $K$  operatorni musbat va izli operatorlar sinfiga tegishli deb faraz qilamiz.

Quyida yordamchi tasdiqni bayon qilamiz va isbotini keltiramiz.

**1-lemma.**  $K$  operatorning  $K^{1/2}$  musbat kvadrat ildizi

$$(K^{1/2}f)(p) = \int_D \tilde{K}(p, t)f(t)dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda  $\tilde{K}(\cdot, \cdot)$  orqali  $K^{1/2}$  operatorning yadrosi belgilangan va bu yadro  $D^2$  to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya bo'ladi.

**Isbot.**  $K$  musbat operator bo'lganligi bois,  $K$  operatorning har bir  $\lambda_m$  trivial bo'lmagan xos qiymati musbat bo'ladi. Hilbert-Shmidt teoremasiga [4] ko'ra

$$K = \sum_m \lambda_m (\varphi_m, \cdot)_1 \varphi_m$$

yoyilma o'rinli bo'lib,  $\sum_m \lambda_m < \infty$  shart bajariladi, bu yerda  $\varphi_m$  orqali  $K$  operatorning  $\lambda_m$  xos qiymatiga mos xos vektor-funksiyasi belgilangan. Faraz qilaylik,  $K^{1/2}$  operator  $K$  operatorning musbat kvadratik ildizi bo'lsin. U holda

$$K^{1/2} = \sum_m \sqrt{\lambda_m} (\varphi_m, \cdot)_1 \varphi_m.$$

Ushbu  $\sum_m \lambda_m < \infty$  shartga ko'ra  $K^{1/2}$  operator Hilbert-Shmidt operatori bo'ladi. Shu sababli  $K^{1/2}$  integral operatorning  $\tilde{K}(\cdot, \cdot)$  yadrosi kvadrati bilan integrallanuvchi bo'ladi. 1-lemma to'liq isbotlandi.

Faraz qilaylik,  $I_i - \mathcal{H}_i, i = 0, 1$  fazodagi birlik operator va  $R_{11}^0(z) := (H_{11}^0 - zI_1)$  bo'lsin.  $H$  operator diskret spektrini o'rganishda  $\mathcal{H}$  Hilbert fazosida aniqlangan kompakt (simmetriklashtirilgan)

$$T(z) := \begin{pmatrix} T_{00}(z) & T_{01}(z) \\ T_{10}(z) & T_{11}(z) \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$$

kabi aniqlangan  $2 \times 2$  o'lchamli blok operatorli matritsa muhim ahamiyatga ega bo'ladi, bu yerda  $T_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 0, 1$  matritsaviy elementlar quyidagicha aniqlangan:

$$T_{00}(z) := (1+z)I_0 - H_{00} + H_{01}R_{11}^0(z)H_{01}^*, \quad T_{01}(z) := -H_{01}R_{11}^0(z)K^{1/2},$$

$$T_{10}(z) := -K^{1/2}R_{11}^0(z)H_{01}^*, \quad T_{11}(z) := K^{1/2}R_{11}^0(z)K^{1/2}.$$

Quyidagi lemma mashhur Birman-Shmidt prinsipini tavsiflaydi hamda  $H$  va  $T(z)$  operatorlar xos qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

**2-lemma.**  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  soni  $H$  operatorning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni  $T(z)$  operator uchun xos qiymat bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari,  $z$  va 1 xos qiymatlarning karralıkları ustma-ust tushadi.

**Isbot.** Faraz qilaylik,  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  soni  $H$  operatorning xos qiymati,  $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$  esa unga mos xos vektor-funksiya bo'lsin. U holda  $f_0$  va  $f_1$  koordinatalar

$$\begin{cases} (H_{00} - zI_0)f_0 + H_{01}f_1 = 0; \\ H_{01}^*f_0 + (H_{11}^0 - zI_1)f_1 - Kf_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

$z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  bo'lganligi bois (2) tenglamalar sistemasining ikkinchi tengligida  $f_1$  uchun

$$f_1 = R_{11}^0(z)Kf_1 - R_{11}^0(z)H_{01}^*f_0 \quad (3)$$

ifodani hosil qilamiz.

Endi  $K^{1/2}$  operatorning  $f_1$  funksiyaga ta'sirini hisoblaymiz:

$$K^{1/2}f_1 = K^{1/2}R_{11}^0(z)Kf_1 - K^{1/2}R_{11}^0(z)H_{01}^*f_0.$$

$\tilde{f}_1 := K^{1/2}f_1$  belgilash kiritib oxirgi tenglikdan

$$\tilde{f}_1 = K^{1/2}R_{11}^0(z)K^{1/2}\tilde{f}_1 - K^{1/2}R_{11}^0(z)H_{01}^*f_0 \quad (4)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Undan foydalanib (3) tenglikni

$$f_1 = R_{11}^0(z)K^{1/2}\tilde{f}_1 - R_{11}^0(z)H_{01}^*f_0 \quad (5)$$

kabi yozib olamiz.  $f_1$  uchun topilgan yangi (5) ifodani (2) tenglamalar sistemasining birinchi tengligiga qo'yib, (2) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{cases} (H_{00} - zI_0 - H_{01}R_{11}^0(z)H_{01}^*)f_0 + H_{01}R_{11}^0(z)K^{1/2}\tilde{f}_1 = 0 \\ K^{1/2}R_{11}^0(z)H_{01}^*f_0 + (I_1 - K^{1/2}R_{11}^0(z)K^{1/2})\tilde{f}_1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yoki  $\Phi - T(z)\Phi = 0$ ,  $\Phi = (f_0, \tilde{f}_1) \in \mathcal{H}$  operatorli tenglama nolmas yechimga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. (2) tenglamalar sistemasi va  $\Phi - T(z)\Phi = 0$  operatorli tenglamaning chiziqli bog'lanmagan yechimlari soni bir xil ekanligi chiziqli algebra va funksional analiz elementlaridan foydalanib oson ko'rsatiladi. Bu esa  $H$  va  $T(z)$  operatorlarning mos ravishda  $z$  va 1 xos qiymatlari bir xil karralikka ega ekanligini bildiradi. 2-lemma isbotlandi.

**1-izoh.** Odatda  $T(z)\Phi = \Phi$  operatorli tenglamaga  $H$  umumlashgan Fridriks modelining xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tenglamasining analogi deyiladi.

**2-izoh.** Ta'kidlash joizki,  $T(\cdot)$  operatorli funksiya monotonlik xossasiga ega emas, shu sababli [5] maqolada ishlab chiqilgan usuldan maqolaning asosiy natijalarini isbotlashda foydalanib bo'lmaydi.

Aniqlanishiga ko'ra  $T(\cdot)$  operatorli funksiya  $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  sohada analitik funksiya bo'ladi. Bundan tashqari, har bir tayinlangan  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  soni uchun  $T(z)$  operator izli operatorlar sinfiga tegishli bo'ladi.

Haqiqatan ham, 1-lemmaga ko'ra  $K^{1/2}$  operator Hilbert-Shmidt operatori bo'ladi.  $R_{11}^0(z)$  chegaralangan operator bo'lganligi bois,  $T_{11}(z)$  operator izli operatorlar sinfiga tegishli bo'ladi.  $T_{00}(z)$ ,  $T_{01}(z)$  va  $T_{01}^*(z)$  operatorlarning 1 o'lchamli ekanligidan har bir tayinlangan  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  uchun  $T(z)$  operatorli matritsa izli operatorli sinfiga tegishli bo'ladi. Shu sababli  $\lambda \neq 0$  uchun  $I - \lambda^{-1}T(z)$  operatorning  $D(\lambda, z) := \det[I - \lambda^{-1}T(z)]$  determinanti yaxshi aniqlangan va analitik bo'ladi, bu yerda  $I := \text{diag}\{I_0, I_1\}$ . [4] kitobdagi XIII.105 teoreмага ko'ra quyidagi lemma o'rinli.

**3-lemma.**  $\lambda \neq 0$  soni  $T(z)$  operatorning  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  bo'lganda xos qiymati bo'lishi uchun  $D(\lambda, z) = 0$  bo'lishi zarur va yetarlidir.

2- va 3-lemmalardan quyidagi lemma kelib chiqadi.

**4-lemma.**  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  soni  $H$  operatorning xos qiymati bo'lishi uchun  $D(1, z) = 0$  bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ta'kidlash joizki,  $T(z)$  operator har bir  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  da aniqlangan.

**5-lemma.** Agar  $\lambda \neq 0$  soni biror  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  uchun  $T(z)$  operatorning xos qiymati bo'lsa, u holda  $z$  haqiqiy son bo'ladi.

**Isbot.** Faraz qilaylik,  $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$  vektor-funksiya  $T(z)$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  operatorning  $\lambda \neq 0$  xos qiymatiga mos normalangan xos vektor-funksiyasi bo'lsin.  $(u(p) - z)^{-1}$  funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib,  $R_{11}^0(z)$  operatorni

$$R_{11}^0(z) = \hat{R}_{11}^0(z) + i\text{Im}z \cdot \tilde{R}_{11}^0(z)$$

ko'rinishda tasvirlab olamiz, bu yerda  $\hat{R}_{11}^0(z)$ ,  $\tilde{R}_{11}^0(z)$  operatorlar mos ravishda

$$\frac{u(p) - \operatorname{Re} z}{[u(p) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \quad \frac{1}{[u(p) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

funksiyalarga ko'paytirish operatoridir. Shu sababli  $T(z)$  operatorni o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan  $\hat{T}(z)$  va  $\tilde{T}(z)$  operatorlar orqali  $T(z) = \hat{T}(z) + i\operatorname{Im} z \cdot \tilde{T}(z)$  kabi yozish mumkin, bu yerda  $\hat{T}(z)$  va  $\tilde{T}(z)$  operatorlar

$$\hat{T}(z) := \begin{pmatrix} (1 + \operatorname{Re} z)I_0 - H_{00} + H_{01}\hat{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & -H_{01}\hat{R}_{11}^0(z)K^{1/2} \\ -K^{1/2}\hat{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & K^{1/2}\hat{R}_{11}^0(z)K^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}(z) := \begin{pmatrix} I_0 + H_{01}\tilde{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & -H_{01}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2} \\ -K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)H_{01}^* & K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2} \end{pmatrix}$$

formular yordamida aniqlanadi.  $\lambda\Phi = \hat{T}(z)\Phi + i\operatorname{Im} z \cdot \tilde{T}(z)\Phi$  tenglikni  $\Phi$  vektorga skalyar ko'paytirib va  $T(z)$ ,  $\hat{T}(z)$ ,  $\tilde{T}(z)$  operatorlarning o'z-o'ziga qo'shma ekanligini inobatga olib,

$$\langle \tilde{T}(z)\Phi, \Phi \rangle \operatorname{Im} z = 0 \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi  $\operatorname{Im} z = 0$  ekanligini ko'rsatamiz.  $\|\Phi\| = 1$  bo'lganligi bois, ikkita hol bo'lishi mumkin:  $\varphi_0 = 0$  yoki  $\varphi_0 \neq 0$ . Faraz qilaylik,  $\varphi_0 = 0$  bo'lsin. U holda  $\|\Phi\| = \|\varphi_1\| = 1$  bo'ladi. Bu holda

$$\langle \tilde{T}(z)\Phi, \Phi \rangle = (K^{1/2}\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1, \varphi_1)_1 = (\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1, K^{1/2}\varphi_1)_1 > 0.$$

$\tilde{R}_{11}^0(z)$  operatorning ta'rifidan ko'rinib turibdiki,  $(\tilde{R}_{11}^0(z)K^{1/2}\varphi_1, K^{1/2}\varphi_1)_1 = 0$  bo'lishi uchun  $K^{1/2}\varphi_1 = 0$  bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu esa  $\lambda \neq 0$  soni  $T(z)$  operatorning xos qiymati ekanligiga ziddir.

Endi  $\varphi_0 \neq 0$  deb faraz qilamiz.

$$\phi_0 := H_{10}\varphi_0, \quad \phi_1 := K^{1/2}\varphi_1;$$

$$\hat{\phi}_j(p) := \operatorname{Re}(\phi_j(p)), \quad \check{\phi}_j(p) := \operatorname{Im}(\phi_j(p)), \quad j = 0, 1$$

kabi belgilash olamiz. Ushbu

$$|\phi_0(p)|^2 + |\phi_1(p)|^2 - 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)}) = (|\hat{\phi}_0(p)| - |\check{\phi}_0(p)|)^2 + (|\check{\phi}_0(p)| - |\hat{\phi}_0(p)|)^2,$$

munosabatdan foydalanib sodda hisoblashlar yordamida

$$\langle \tilde{T}(z)\Phi, \Phi \rangle = |\varphi_0|^2 + (\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_0, \phi_0)_1 - 2\operatorname{Re}(\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_1, \phi_0)_1 + (\tilde{R}_{11}^0(z)\phi_1, \phi_1)_1$$

$$= |\varphi_0|^2 + \int_D \frac{1}{[u(p) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \{|\phi_0(p)|^2 + |\phi_1(p)|^2 - 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})\} dp \geq |\varphi_0|^2 > 0$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shunday qilib,  $\langle \tilde{T}(z)\Phi, \Phi \rangle > 0$  ekan. (6) tenglikdan  $\operatorname{Im} z = 0$  kelib chiqadi. 5-lemma isbotlandi.

**Asosiy natijalar.** Faraz qilaylik,  $B$  operator  $\mathcal{H}$  Hilbert fazosidagi chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operator,  $\mathcal{H}_B(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  esa elementlari  $(Bf, f) > \lambda \|f\|$ ,  $f \neq 0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi qism fazo bo'lsin.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$n(\lambda, B) := \sup_{\mathcal{H}_B(\lambda)} \dim \mathcal{H}_B(\lambda).$$

Agar  $\lambda < \max \sigma_{\text{ess}}(B)$  bo'lsa,  $n(\lambda, B)$  soni cheksizga teng bo'ladi va agar  $n(\lambda, B)$  soni chekli bo'lsa, u holda bu son  $B$  operatorning  $\lambda$  dan katta xos qiymatlar soniga (karraligi bilan qo'shib hisoblaganda) teng bo'ladi [6].

Endi maqolaning asosiy natijalarini bayon qilamiz va isbotlaymiz.

**1-teorema.**  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  soni  $H$  operatorning regulyar nuqtasi bo'lishi uchun  $n(1, T(\cdot))$  funksiya  $z = z_0$  nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Isbot. Zaruriyligi.** Faraz qilaylik,  $z = z_0$  soni  $T(z)$  operatorning regulyar nuqtasi bo'lsin. U holda 2-lemmaga ko'ra  $I - T(z_0)$  operator teskarilanuvchan bo'ladi.  $\lambda^{-1}T(z)$  operator-funksiyaning  $(\lambda, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \sigma(H_{11}^0)$  bo'yicha uzluksizligi va  $T(z)$  operatorning kompaktligidan  $(1, z_0)$  nuqtaning biror atrofidagi barcha  $(\lambda, z)$  lar uchun  $I - \lambda^{-1}T(z)$  operator teskarilanuvchan bo'ladi. Shu sababli biror  $\rho > 0$  soni uchun barcha  $z \in [z_0 - \rho, z_0 + \rho]$  larda  $\sigma(T(z)) \cap (1 - \rho, 1 + \rho) = \emptyset$  tenglik o'rinli bo'ladi.  $n(a, T(\cdot))$  funksiya ta'rifidan barcha  $\xi$  va  $\delta \in [0, z_0 + \rho)$  lar uchun

$$n(1 \pm \delta, T(z_0 \pm \xi)) = n(1, T(z_0 \pm \xi))$$

tenglikni hosil qilamiz. Kompakt operatorlar yig'indisi hamda istalgan musbat  $a_1$  va  $a_2$  sonlari uchun

$$n(a_1 + a_2, A_1 + A_2) \leq n(a_1, A_1) + n(a_2, A_2) \quad (7)$$

Veyl tengsizligini [6] qo'llab biror  $\eta_0 \in (0, \delta)$  soni va barcha yetarlicha kichik  $\xi > 0$  soni uchun

$$n(1 + \eta_0, T(z_0 \pm \xi)) \leq n(1, T(z_0 \pm \xi)) + n(\eta_0, T(z_0 \pm \xi) - T(z_0)) = n(1, T(z_0))$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shunga o'xshash mulohazalar yuritib, yetarlicha kichik  $\xi > 0$  soni uchun  $n(1, T(z_0 \pm \xi)) = n(1, T(z_0))$  tenglikga ega bo'lamiz. Bu esa o'z navbatida  $n(1, T(\cdot))$  funksiya  $z = z_0$  nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

**Yetarliligi.** Teskarisini faraz qilamiz.  $n(1, T(\cdot))$  funksiya  $z = z_0$  nuqtada uzluksiz,  $z_0$  soni esa  $H$  operatorning xos qiymati bo'lsin.

Yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib va (7)-Veyl tengsizligidan foydalanib, biror  $\delta_0 > 0$ ,  $c_0 = c_0(\delta_0) > 0$  sonlari va barcha  $\varepsilon \in [-c_0, c_0]$  sonlari uchun

$$n(1, T(z_0)) = n(1 + \delta_0, T(z_0)) = n(1 + \delta_0/4, T(z_0 + \varepsilon)) \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz. 4-lemmaga ko'ra  $D(1, z_0) = 0$  tenglik o'rinli.  $\Gamma_\delta$  orqali  $z_0$  nuqtaning  $\delta$  kompleks atrofi bo'lgan  $U_\delta(z_0)$  to'plamning chegarasini belgilaymiz. Bu holda  $\delta$  ning yetarlicha kichik ekanligidan barcha  $z \in \Gamma_\delta$  lar uchun  $D(1, z_0) \neq 0$  ekanligini hosil qilamiz. Belgilash kiritamiz:

$$d := \min_{z \in \Gamma_\delta} |D(1, z)|, \quad \psi_\varepsilon(z) := D(1 + \varepsilon, z) - D(1, z).$$

$D(\cdot, \cdot)$  funksiya uzluksiz bo'lganligi bois, shunday  $\rho = \rho(\delta) > 0$  soni topilib, barcha  $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$  va  $z \in \Gamma_\delta$  sonlari uchun  $|\psi_\varepsilon(z)| < d$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, har bir tayinlangan  $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$  soni uchun  $\overline{U_\delta(z_0)}$  to'plamda aniqlangan  $D(1, \cdot)$  va  $\psi_\varepsilon(\cdot)$  funksiyalar Rushe teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Shu sababli  $D(1, \cdot)$  va  $D(1 + \varepsilon, \cdot)$  funksiyalarning  $U_\delta(z_0)$  to'plamda yotuvchi nollari soni tengdir. Faraz qilaylik, biror  $z_\varepsilon \in U_\delta(z_0)$  uchun  $D(1 + \varepsilon, z_\varepsilon) = 0$ ,  $\varepsilon > 0$  bo'lsin. U holda 4-lemmaga ko'ra barcha  $\varepsilon \in (0, \rho')$  lar uchun  $1 + \varepsilon$  soni  $T(z_\varepsilon)$  operatorning xos qiymati bo'ladi. Shuning uchun 5-lemmaga ko'ra  $z_\varepsilon$  haqiqiy son bo'ladi. Bundan va (8) tenglikdan barcha  $\varepsilon \in (0, \rho')$  sonlari uchun

$$\begin{aligned} n(1, T(z_\varepsilon)) - n(1, T(z_0)) &\geq n(1 + \varepsilon/2, T(z_\varepsilon)) - n(1, T(z_0)) \\ &\geq 1 + n(1 + \delta_0/4, T(z_\varepsilon)) - n(1, T(z_0)) = 1 \end{aligned}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Demak  $n(1, T(z_0)) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n(1, T(z_\varepsilon))$ , ya'ni  $n(1, T(\cdot))$  funksiya  $z = z_0$  nuqtada uzluksiz bo'lmaydi. Bu esa farazimizga ziddir. 1-teorema isbotlandi.

**2-teorema.** Faraz qilaylik  $z_0 \in \sigma_{\text{disc}}(H)$  bo'lsin. U holda yetarlicha kichik  $\varepsilon > 0$  soni uchun shunday  $\delta > 0$  soni topilib,

$$\begin{aligned} \text{card}\{z \in U_\delta(z_0) : D(1 + \varepsilon, z) = 0\} &= \text{card}\{z \in U_\delta(z_0) : D(1 - \varepsilon, z) = 0\} \\ &= \text{card}\{z \in U_\delta(z_0) : D(1, z) = 0\} \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda  $\text{card}M$  orqali  $M$  to'plamning quvvati belgilangan.

**Isbot.** Agar  $z_0 \in \sigma_{\text{disc}}(H)$  bo'lsa, 4-lemmaga ko'ra  $D(1, z_0) = 0$  bo'ladi. U holda shunday  $\delta > 0$  soni topilib, barcha  $z \in \Gamma_\delta$  lar uchun  $D(1, z_0) \neq 0$  bo'ladi. Bu holda 1-teoremaning yetarlilik qismi isbotidagi kabi mulohazalar yuritib, yetarlicha kichik  $\rho > 0$  soni uchun har bir  $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$  da  $D(1, \cdot)$  funksiyaning  $U_\delta(z_0)$  to'plamda yotuvchi nollari soni va  $D(1 + \varepsilon, \cdot) = \psi_\varepsilon(\cdot) + D(1, \cdot)$  funksiyaning  $U_\delta(z_0)$  to'plamda yotuvchi nollari soni teng bo'ladi. 2-teorema isbotlandi.

**Xulosa.** Maqolada zamonaviy matematikaning bir qator sohalarida uchraydigan panjaradgi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos  $H$  kompakt qo'zg'alishli umumlashgan Fridrixs modeli qaralgan. Bu model Fok fazosining qirg'ilgan ikki zarrachali qism fazosidagi chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida tadqiq qilingan. Ishda  $H$  operatorning muhim spektri bo'shliqqa (lakunaga) ega bo'lgan hol tahlil qilinib, o'rganilayotgan operatorning xos vektor-funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi qurilgan hamda uning xos qiymatlar soni bilan bog'liq asosiy xossalari o'rganilgan.

#### ADABIYOTLAR:

1. K.O.Friedrichs. *Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators.* *Math. Ann.*, 115:1 (1938), 249–272.
2. С.Н.Лакаев. *Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса.* *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 11 (1986), 210–223.
3. К.Фридрихс. *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.* М., 1969.
4. М.Рид, Б.Саймон. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов.* М.: Мир. 1982.
5. М.Э.Муминов. *О выражении числа собственных значений модели Фридрихса.* *Матем. заметки*, 82:1 (2007), 75–83.
6. A.V.Sobolev. *The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics.* *Comm. Math. Phys.*, 156 (1993), 101–126.