Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №12, с. 53–58 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Т.Х. РАСУЛОВ, Э.Б. ДИЛМУРОДОВ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА ДЛЯ 2×2 ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Аннотация. Рассматривается 2×2 операторная матрица H. Предложен аналог известного уравнения Фаддеева для собственных векторов H и изучены некоторые его важные свойства, относящиеся к количеству собственных значений. В частности, для H доказан принцип Бирмана–Швингера.

Ключевые слова: операторная матрица, спектр, уравнение Фаддеева, операторнозначная функция, принцип Бирмана–Швингера.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-53-58

1. Введение и постановка задачи

Пусть $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ — два гильбертова пространства, причем $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. В данной статье мы рассматриваем операторную матрицу вида

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

в $\mathcal{H}$ с элементами $H_{00} = H_{00}^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, $H_{01} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ и $H_{11} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — линейными ограниченными операторами. Будем предполагать, что H_{11} допускает представление

$$H_{11} = H_{11}^0 - K, \tag{2}$$

где H_{11}^0 и K — линейные ограниченные самосопряженные операторы, в частности, K является компактным оператором, причем $K \geq 0$.

При этих предположениях операторная матрица H является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Одним частным классом таких операторных матриц является обобщенная модель Фридрихса [1]. Для описания этой модели мы сначала определим двухканальное гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, состоящее из одномерного "молекулярного" пространства $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ (канал 1) и "ядерного" пространства $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ (канал 2), — это гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплексных) функций, заданных на d-мерном торе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Элементы $\mathcal{H}$ представимы как векторы $f = (f_0, f_1)$, где $f_0 \in \mathcal{H}_0$ и $f_1 \in \mathcal{H}_1$, при этом f_0 — комплексное число. Скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := f_0 \overline{g}_0 + \langle f_1, g_1 \rangle$$

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 07.05.2023. Принята к печати 29.05.2023.

любых двух элементов $f = (f_0, f_1)$, $g = (g_0, g_1) \in \mathcal{H}$ задается естественным образом через скалярные произведения $f_0 \overline{g}_0$ в $\mathcal{H}_0$ и

$$\langle f_1, g_1 \rangle = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t) \overline{g_1(t)} dt$$

в $\mathcal{H}_1$. В работе [1] были рассмотрены как матричные элементы следующие операторы:

$$H_{00} f_0 = a f_0, \quad H_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt,$$
$$(H_{11} f_1)(x) = u(x) f_1(x), \quad (K f_1)(x) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} k(x,t) f_1(t) dt, \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{R}$ — фиксированное вещественное число, функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $k(\cdot,\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции, заданные на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ соответственно. Следует отметить, что гамильтониан H_{11}, определенный формулой (2), напоминает гамильтониан одной известной модели Фридрихса [2], [3]. В работе [4] гамильтониан такого типа изучался, чтобы явно обозначить механизм, ведущий к увеличению вероятности слияния в случае узкого околопорогового ядерного резонанса. В работах [5]–[9] изучались спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса, а количество собственных значений модели Фридрихса исследовано в [10], [11].

В настоящей статье мы строим аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H, заданного формулой (1), и изучаем некоторые его важные свойства, относящиеся к количеству собственных значений.

2. Аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов H. Основные свойства

Поскольку H_{00}, H_{01} и K являются компактными операторами, по теореме Вейля [12] для существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ оператора H имеем $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{11}^0)$.

Пусть I_i — тождественный оператор на $\mathcal{H}_i, i = 0, 1$, и $R_{11}^0(z) := (H_{11}^0 - z I_1)^{-1}, z \in \rho(H_{11}^0)$. В нашем анализе дискретного спектра H важную роль играет 2×2 блочная операторная матрица

$$T(z) := \begin{pmatrix} T_{00}(z) & T_{01}(z) \\ T_{10}(z) & T_{11}(z) \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad z \in \rho(H_{11}^0), \tag{4}$$

где элементы $T_{ij}(z) : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i, i, j = 0, 1$, определяются формулами

$$\begin{aligned} T_{00}(z) &:= (1+z) I_0 - H_{00} + H_{01} R_{11}^0(z) H_{01}^*, \\ T_{01}(z) &:= -H_{01} R_{11}^0(z) K^{1/2}, \\ T_{10}(z) &:= -K^{1/2} R_{11}^0(z) H_{01}^*, \\ T_{11}(z) &:= K^{1/2} R_{11}^0(z) K^{1/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем будем через $P_j, j = 0, 1$, обозначать ортогональные проекции из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_j$. Множество $\rho(H_{11}^0) \cap \mathbb{R}$ является открытым. Поэтому имеем представление

$$\rho(H_{11}^0) \cap \mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k, \quad 1 \le N \le \infty, \tag{6}$$

где Δ_k — открытые попарно не пересекающиеся интервалы в $\mathbb{R}$. В дальнейшем будем называть интервалы Δ_k открытыми компонентами множества $\rho(H_{11}^0) \cap \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть $T(z), z \in \rho(H_{11}^0)$, — операторнозначная функция, заданная формулами* (4) *и* (5).

(i) *$T(\cdot)$ является функцией Неванлинны, допускающей представление*

$$T(z) = C_0 + zC_1 + L^*(H_{11}^0 - z)^{-1}L, \quad z \in \rho(H_{11}^0), \tag{7}$$

где

$$C_0 := \begin{pmatrix} 1 - H_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_0^*, C_1 := \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_0 \geq 0$$

и

$$L := (H_{01}^* - K) : \begin{array}{c} \mathcal{H}_0 \\ \oplus \\ \mathcal{H}_1 \end{array} \to \mathcal{H}.$$

(ii) *Функция $T(\cdot)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по операторной норме.*

(iii) *На каждой открытой компоненте Δ_k множества $\rho(H_{11}^0) \cap \mathbb{R}$ функция $T(\cdot)$ является неубывающей и удовлетворяет включению $\ker(T'(x)) \subseteq \ker(T(x)), x \in \Delta_k$.*

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что $T(z)$ допускает представление (6). Из (7) сразу вытекает, что $T(z)$ является функцией Неванлинны.

(ii) Используя представление (6), легко проверяется, что $T(\cdot)$ непрерывна по операторной норме. Если $z \in \rho(H_{11}^0)$, то

$$T'(z) := \frac{d}{dz}T(z) = C_1 + L^*(H_{11}^0 - z)^{-2}L, \quad z \in \rho(H_{11}^0). \tag{8}$$

Значит, $T'(\cdot)$ также непрерывна по операторной норме.

(iii) В частности, из (8) следует $T'(z) \geq 0$ при $x \in \Delta_k$. Используя представление

$$T(x') - T(x) = \int_x^{x'} T'(t)dt, \quad x', x \in \Delta_k, \quad x \leq x',$$

получаем $T'(x) \geq T(x)$, откуда $T(x)$ является неубывающей функцией на интервале Δ_k. Если

$$T'(x) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + L^*(H_{11}^0 - x)^{-2}L \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0,$$

то

$$C_1 \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad L^*(H_{11}^0 - x)^{-2}L \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Из первого условия имеем $\phi_0 = 0$, а из второго — $K\phi_1 = 0$. Обратное также верно. Значит, $\ker(T'(x)) = \{0\} \oplus \ker(K)$. Легко проверить, что равенство $\ker(T'(x)) = \{0\} \oplus \ker(K)$ влечет $\ker(T'(x)) \subseteq \ker(T(x))$, $x \in \Delta_k$. □

Следующее утверждение описывает известный принцип Бирмана–Швингера и устанавливает связь между собственными значениями H и $T(z)$.

Теорема 2. *Число $x_0 \in \mathbb{R} \cap \rho(H_{11}^0)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $1 \in \sigma_p(T(x_0))$. Более того, собственные числа x_0 и 1 имеют одинаковую кратность.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \rho(H_{11}^0)$ — собственное значение H с соответствующей собственной функцией $\phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathcal{H}$. Тогда ϕ_0 и ϕ_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &(H_{00} - x_0 I_0)\phi_0 + H_{01}\phi_1 = 0, \\ &H_{01}^*\phi_0 + (H_{11}^0 - x_0 I_1)\phi_1 - K\phi_1 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $x_0 \in \rho(H_{11}^0)$, из второго уравнения системы (9) имеем

$$\phi_1 = R_{11}^0(x_0)K\phi_1 - R_{11}^0(x_0)H_{01}^*\phi_0. \tag{10}$$

Умножая (10) слева на $K^{1/2}$, получаем

$$K^{1/2}\phi_1 = K^{1/2}R_{11}^0(x_0)K\phi_1 - K^{1/2}R_{11}^0(x_0)H_{01}^*\phi_0.$$

Полагая $\widetilde{\phi}_1 := K^{1/2}\phi_1$, имеем

$$\widetilde{\phi}_1 = K^{1/2}R_{11}^0(x_0)K\widetilde{\phi}_1 - K^{1/2}R_{11}^0(x_0)H_{01}^*\phi_0.$$

Используя $\widetilde{\phi}_1 := K^{1/2}\phi_1$, получаем

$$\phi_1 = R_{11}^0(x_0)K^{1/2}\widetilde{\phi}_1 - R_{11}^0(x_0)H_{01}^*\phi_0. \tag{11}$$

Подставляя (11) в первое уравнение системы (9), можем заключить, что (9) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned}
&(H_{00} - x_0I_0 - H_{01}R_{11}^0(x_0)H_{01}^*)\phi_0 + H_{01}R_{11}^0(x_0)K^{1/2}\widetilde{\phi}_1 = 0,\\
&K^{1/2}R_{11}^0(x_0)H_{01}^*\phi_0 + (I_1 - K^{1/2}R_{11}^0(x_0)K^{1/2})\widetilde{\phi}_1 = 0
\end{aligned}$$

или матричное уравнение $\widetilde{\phi} - T(x_0)\widetilde{\phi} = 0, \widetilde{\phi} = (\phi_0, \widetilde{\phi}_1)^\perp \in \mathcal{H}$, имеет нетривиальное решение. Ясно, что линейные подпространства решений (9) и уравнения $\widetilde{\phi} - T(\lambda)\widetilde{\phi} = 0$ имеют одну и ту же размерность. Поэтому кратности собственных значений x_0 и 1 операторов H и $T(x_0)$, соответственно, совпадают. $\square$

Замечание. Отметим, что уравнение $T(x_0)\phi = \phi$, где $x_0 \in \mathbb{R} \cap \rho(H_{11}^0)$, является аналогом системы интегральных уравнений типа Фаддеева для собственных векторов оператора H.

Для ограниченного самосопряженного оператора B, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и для вещественного числа λ обозначим через $\mathcal{H}_B(\lambda) \subset \mathcal{H}$ подпространство всех элементов $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих неравенству $(Bf,f)_{\mathcal{H}} > \lambda||f||^2$ при $0 \neq f \in \mathcal{H}_\lambda$. Положим далее [13]

$$n(\lambda, B) := \sup_{\mathcal{H}_B(\lambda)} \dim(\mathcal{H}_B(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор со спектральной мерой $E_B(\cdot)$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) *Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем*

$$n(\lambda, B) = \dim(\mathrm{ran}E_B((\lambda, \infty))). \tag{12}$$

В частности, функция $n(\lambda, B)$ является неубывающей, т. е. $n(\lambda, B) \geq n(\lambda', B)$, $\lambda \leq \lambda'$.

(ii) *Функция $n(\cdot, B)$ непрерывна справа, т. е. $\lim\limits_{\mu\to\lambda+0} n(\mu, B) = n(\lambda, B)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Функция $n(\cdot, B)$ непрерывна в точке $\lambda \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда либо $n(\lambda, B) = \infty$, либо $\lambda \in \rho(B)$.*

Доказательство. (i) Заметим, что всегда выполняется $\dim(\mathrm{ran}E_B((\lambda, \infty))) \leq n(\lambda, B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\dim(\mathrm{ran}E_B((\lambda, \infty))) = \infty$, то $n(\lambda, B) = \infty$, т. е. $n(\lambda, B) = \dim(\mathrm{ran}E_B((\lambda, \infty)))$. Предположим, что $\dim(\mathrm{ran}E_B((\lambda, \infty))) < \infty$. Положим

$$\mathcal{H}_{E_B}(\lambda) := E_B((\lambda, \infty))\mathcal{H} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_{E_B}^\perp(\lambda) := \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{E_B}(\lambda) = E_B((-\infty, \lambda])\mathcal{H},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\mathcal{H}_{E_B}(\lambda) \oplus \mathcal{H}_{E_B}^\perp(\lambda) = \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Более того,

$$f \in \mathcal{H}_{E_B}^\perp(\lambda) \Longleftrightarrow (Bf, f) \leq (f, f).$$

Пусть $\mathcal{H}_B(\lambda)$ — подпространство $\mathcal{H}$ такое, что $(Bf,f) > \lambda(f,f)$ при $f \in \mathcal{H}_B(\lambda)$. Положим $h := E_B((\lambda,\infty))f$ и $g := f \ominus h = E_B((-\infty,\lambda])f$. Легко проверить, что $Jh := g$, $h \in \mathrm{dom}(J) := E_B((\lambda,\infty))\mathcal{H}_B(\lambda)$, — корректно определенный замкнутый оператор, действующий из $\mathcal{H}_{E_B}(\lambda)$ в $\mathcal{H}^{\perp}_{E_B}(\lambda)$. Заметим, что $h = 0$ влечет $g = 0$, так как иначе $f = 0 \oplus g \in \mathcal{H}_B(\lambda)$ влечет $(Bf,f) \le (f,f)$, что противоречит предположению относительно $\mathcal{H}_B(\lambda)$. Поскольку график оператора J совпадает с $\mathcal{H}_B(\lambda)$, оператор является замкнутым. Рассмотрим оператор

$$\widehat{J}h := \begin{pmatrix} h \\ Jh \end{pmatrix} : h \ni E_B((\lambda,\infty))\mathcal{H}_B(\lambda) \subseteq \mathcal{H}_{E_B}(\lambda) \to \mathcal{H}_B(\lambda).$$

Из этого определения можно легко получить, что $\mathrm{ran}(\widehat{J}) = \mathcal{H}_B(\lambda)$. Значит, $\dim(\mathcal{H}_B(\lambda)) \le \dim(\mathcal{H}_{E_B}(\lambda)) \le \dim(\mathrm{ran}(E_B((\lambda,\infty))))$, откуда $n(\lambda,B) \le \dim(\mathrm{ran}(E_B((\lambda,\infty))))$. Тогда

$$n(\lambda,B) = \dim(\mathrm{ran}(E_B((\lambda,\infty)))).$$

Из (12) легко получить, что $n(\lambda,B)$ является невозрастающей функцией.

(ii) Если $\dim(\mathrm{ran}(E_B((\lambda',\infty)))) = \infty$ для некоторого $\lambda' > \lambda$, то, очевидно, $n(\lambda,B) = n(\mu,B) = \infty$ для $\mu \in (\lambda,\lambda']$, отсюда имеем непрерывность справа. Предположим, что $n(\lambda,B) = \infty$ и $n(\lambda',B) < \infty$ для любого $\lambda' > \lambda$. В этом случае на интервале (λ,∞) есть бесконечно много изолированных собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой λ. Следовательно, $\lim\limits_{\mu\to\lambda+0} n(\mu,B) = \infty$, откуда снова получаем непрерывность справа. Наконец, пусть $n(\lambda,B) < \infty$. В этом случае интервал (λ,∞) содержит лишь конечное число собственных значений конечной кратности. Значит, если λ' достаточно близко к λ, то (λ,λ') не содержит ни одного собственного значения. Отсюда $n(\lambda,B) = n(\mu,B)$ для $\mu \in (\lambda,\lambda')$, откуда следует непрерывность.

(iii) Осталось доказать непрерывность справа. Поскольку функция $n(\cdot,B)$ является невозрастающей и ее значения целые, существует $\lambda_\infty(B) \in \mathbb{R}$ такое, что $n(\lambda,B) = \infty$ при $\lambda < \lambda_\infty(B)$. Значение $n(\lambda_\infty(B),B)$ само может быть конечным или бесконечным. Если $\lambda < \lambda_\infty(B)$, то $n(\mu,B) = \infty$ при $\mu \in (\lambda,\lambda_\infty(B))$. Отсюда функция $n(\cdot,B)$ непрерывна справа в точке λ. На интервале $(\lambda_\infty(B),\infty)$ спектр B дискретен. Если $\lambda \in \rho(B) \cap (\lambda_\infty(B),\infty)$, то можно легко показать, что $n(\cdot,B)$ — константа в некоторой окрестности λ, откуда следует непрерывность. Если λ является собственным значением, то $n(\cdot,B)$ постоянна на $[\lambda,\mu)$, где $\mu > \lambda$ достаточно мало. Если $\lambda = \lambda_\infty(B)$, то $n(\lambda,B)$ может быть конечным или бесконечным. Если $n(\lambda_\infty(B),B) = \infty$, то λ является предельной точкой дискретного спектра B на $(\lambda_\infty(B),B)$. Значит, $n(\cdot,B)$ непрерывна справа. Если $n(\lambda_\infty(B),B)$ конечно, то $n(\cdot,B)$ постоянна на $[\lambda_\infty(B),\mu)$ для достаточно малого $\mu > \lambda_\infty(B)$, откуда следует непрерывность справа. □

Часть результатов теоремы 3 изучалась для модели Фридрихса в [10].

Авторы благодарны рецензенту за ценные критические замечания.

Литература

[1] Lakaev S.N. *Some spectral properties of the generalized Friedrichs model*, J. Soviet Math. **45** (6), 1540–1563 (1989).

[2] Friedrichs K.O. *Über die Spectralzerlegung eines Integral-operators*, Math. Ann. **115** (1), 249–272 (1938).

[3] Friedrichs K.O. *On the perturbation of continuous spectra*, Comm. Pure Appl. Math. **1** (4), 361–406 (1948).

[4] Motovilov A.K., Sandhas W., Belyaev Y.B. *Perturbation of a lattice spectral band by a nearby resonance*, J. Math. Phys. **42**, 2490–2506 (2001).

[5] Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А., Лакаев С.Н. *О вложенных собственных значениях и резонансах обобщенной модели Фридрихса*, Теорет. и матем. физ. **103** (1), 54–62 (1995).

[6] Акчурин Э.Р. *О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса*, Теорет. и матем. физ. **163** (1), 17–33 (2010).

[7] Лакаев С.Н, Латипов Ш.М. *О существовании и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели*, Теорет. и матем. физ. **169** (3), 341–351 (2011).

[8] Расулов Т.Х. *Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–69 (2008).

[9] Muminov M.I., Rasulov T.H. *The Faddeev equation and essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space*, Methods Funct. Anal. Topol. **17** (1), 47–57 (2011).

[10] Муминов М.И. *Выражение для числа собственных значений модели Фридрихса*, Матем. заметки **82** (1), 75–83 (2007).

[11] Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. *Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Изв. вузов. Матем. (1), 61–70 (2014).

[12] Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics*. IV. *Analysis of Operators* (Academic Press, New York, 1978).

[13] Glazman I.M. *Direct Methods of the Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators* (IPS Trans, Jerusalem, 1965).

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118 Республика Узбекистан,

e-mail: t.h.rasulov@buxdu.uz

Элёр Бахтиёрович Дилмуродов

Бухарский государственный университет,
Бухарское отделение Института Математики им. В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118 Республика Узбекистан,

e-mail: e.b.dilmurodov@buxdu.uz

T.H. Rasulov and E.B. Dilmurodov

Main properties of the Faddeev equation for 2×2 operator matrices

Abstract. In the present paper we consider a 2×2 operator matrix H. We construct an analog of the well-known Faddeev equation for the eigenvectors of H and study some important properties of this equation, related with the number of eigenvalues. In particular, the Birman–Schwinger principle for H is proven.

Keywords: operator matrix, spectrum, Faddeev equation, operator valued function, Birman–Schwinger principle.

Tulkin Husenovich Rasulov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Uzbekistan,

e-mail: t.h.rasulov@buxdu.uz

Elyor Baxtiyorovich Dilmurodov

Bukhara State University,
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Uzbekistan,

e-mail: e.b.dilmurodov@buxdu.uz