SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842 VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

www.openscience.uz

SCIENCE AND EDUCATION
SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME #2 ISSUE #11

TABLE OF CONTENTS / МУНДАРИЖА

EXACT SCIENCES / АНИҚ ФАНЛАР

NATURAL SCIENCES / ТАБИИЙ ФАНЛАР

Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида

Рамазон Тўхтаевич Муҳитдинов
muxitdinov-ramazon@rambler.ru
Мухайё Абдувохид кизи Абдуллаева
Бухоро давлат университети

Аннотация: мақолада гипергеометрик тенгламанинг таърифи ва таснифи баён қилинган. Унинг ечимлари - гипергеометрик функциялар ҳақида маълумотлар берилган ва хоссалари ёритилган. Бир қатор элементар ва махсус функцияларнинг гипергеометрик функциялар орқали ифодаланиши бўйича жадвал келтирилган.

Калит сўзлар: гипергеометрик тенглама, гипергеометрик функция, элементар функция, махсус функция, аналитик давом эттириш, каноник кўриниш.

About hypergeometric equation, its solutions and hypergeometric functions

Ramazan Tukhtaevich Muhitdinov
muxitdinov-ramazon@rambler.ru
Muxayyo Abduvoxid kizi Abdullaeva
Bukhara State University

Abstract: The article describes and classifies the hypergeometric equation. Its solutions, information about hypergeometric functions and their properties are described. A table is given for the representation of a number of elementary and special functions by hypergeometric functions.

Keywords: hypergeometric equation, hypergeometric function, elementary function, special function, analytical continuation, canonical view.

Сонли усулларнинг кенг ривожланиши ва сонли тажрибанинг роли ошиши муносабати билан махсус функцияларга қизиқиш ҳам ортди. Бу иккита ҳолат билан боғлиқ. Биринчидан, индивидуал ҳодисаларнинг нисбий ролини аниқлаш учун физик ҳодисанинг математик моделини ишлаб чиқиш ва осонликча таҳлил қилинадиган аналитик шаклда ечим олиш учун кўпинча асл муаммони соддалаштиришга тўғри келади. Иккинчидан, компьютерда мураккаб муаммоларни ечишда ишончли ва самарали ҳисоблаш алгоритмларини танлаш учун соддалаштирилган масалалардан фойдаланиш қулай. Шу сабабли жуда кўп ҳолларда махсус функцияларга олиб келадиган масалалар учрайди. Бундан ташқари, назарий ва амалий физиканинг кўплаб муҳим масалаларини тушуниш учун махсус функцияларни чуқур билиш керак.

Математик анализнинг махсус функциялари деб аталадиган энг кўп қўлланиладиган функциялар қаторига классик ортогонал кўпҳадлар, цилиндрик, сферик ва гипергометрик функциялар киради. Бу функциялар назарияси ва уларнинг қўлланилишига доир бир қатор тадқиқотлар бағишланган. Гипергеометрик функциялар математиканинг турли соҳаларида, хусусан, дифференциал тенгламаларни ечиш ва бошқа махсус функцияларни ўрганишда қўлланилади. Гипергеометрик функциялар ёрдамида нафақат сферик ва эллиптик функциялар, балки элементар функциялар ҳам ифодаланади.

Мақолада гипергеометрик тенглама ва гипергеометрик функциянинг таърифи келтирилган, гипергеометрик функциянинг баъзи элементар хоссалари, функционал ва махсус функционал муносабатлари баён қилинган. Бир қатор элементар ва махсус функцияларнинг гипергеометрик фунциялар орқали ифодаланиши бўйича жадвал келтирилган.

Таъриф:

$$\sigma(z)u'' + \tau(z)u' + \lambda u = 0 \; (1)$$

кўринишдаги тенглама гипергеометрик типдаги тенглама дейилади, бунда $\sigma(z) -$ иккинчи даражадан юқори бўлмаган кўпҳад, $\tau(z) -$ биринчи даражадан юқори бўлмаган кўпҳад, $\lambda -$ ўзгармас сон.

(1) тенглама $\sigma(z)$ нинг берилишига қараб уч хил типдаги каноник кўринишга келтирилади.

1-ҳол. Агар $\sigma(z)$ функция иккита ҳар илдизга эга, яъни $\sigma(z) = (z-a)(b-z)$ (бунда $a \neq b$) бўлса, чизиқли алмаштириш $z = a + (b-a)s$ орқали (1) тенгламани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$s(1-s)\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\tau(a+(b-a)s)}{b-a}\frac{du}{ds} + \lambda u = 0.$$

$$\gamma = \frac{\tau(a)}{b-a}$$

белгилаш киритиб ва α, β ларни шундай танлаймизки,

$$\begin{cases} \alpha\beta = -\lambda, \\ \alpha + \beta + 1 = -\tau'(a) \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда (1) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$s(1-s)u'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)s)u' - \alpha\beta u = 0. (2)$$

Бу тенглама гипергеометрик тенглама дейилади.

2-ҳол. $\sigma(z)$ функция битта илдизга эга $\sigma(z) = (z - a)$ ва $\tau'(a) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $z = a + bs$ чизиқли алмаштириш ёрдамида (2) тенглама

$$\frac{s}{b}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\tau(a+bs)}{b}\frac{du}{ds} + \lambda u = 0$$

кўринишга келтирилади.

$\gamma = \tau(a), \alpha = -b\lambda$ белгилашлар киритиб ва $b = -\frac{1}{\tau'(a)}$ деб танласак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$su'' + (\gamma - s)u' - \alpha u = 0. (3)$$

Бу тенглама айниган (вырожденная) гипергеометрик тенглама деб айтилади.

3-ҳол. Агар $\sigma(z) \equiv const$ бўлса, умумийликка зид келтирмасдан $\sigma(z) \equiv 1$ деб ҳисоблаш мумкин. Агар, $\tau'(s) = 0$ бўлса, (1) тенглама чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенглама бўлади. Бу ҳолни қарамаймиз.

$\tau'(s) \neq 0$ ҳолни қараймиз. $z = a + bs$ чизиқли алмаштириш ёрдамида (1) тенглама

$$\frac{1}{b}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\tau(a+bs)}{b}\frac{du}{ds} + \lambda u = 0$$

кўринишга келтирилади.

$a-$ сони $\tau(a) = 0$ тенгламани илдизи бўлсин. $b^2 = -\frac{2}{\tau'(s)}$ деб танлаймиз ва $b^2\lambda$ ни 2ν деб белгилаймиз. Натижада (1) тенглама

$$u'' - 2su' + 2\nu u = 0 \ (4)$$

кўринишга келади. (4) тенглама Эрмит тенгламаси деб аталади. ν нинг манфий бўлмаган бутун қийматларида кўпҳадлар учун Эрмит тенгламаси билан бир хил бўлади.

Энди (1) тенгламанинг ечимини ўрганиш билан шуғулланамиз.

Агар $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ бўлса, унда

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \equiv F(a, b; c; z)$$

(1) гипергеометрик тенгламанинг ечими бўлади ва $z = 0$ нуқтада регуляр бўлади [1].

Иккинчи томондан $Re\ c > Re\ b > 0$ da

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \ (5)$$

тенглик ўринли бўлиб, бу Эйлер формуласи дейилади.

(5) нинг ўнг томони $|\arg(1-z)| < \pi$ соҳада z га боғлиқ бир қийматли аналитик фунция, яъни $F(a, b; c; z)$ функциянинг аналитик давоми бўлади.

(5) формулани ўринли эканлигини исботлаймиз.

(5) тенгликда $|z| < 1$ да $(1 - tz)^{-a}$ ни биномиал қаторга ёямиз ва ҳосил бўлган қаторни ҳадма-ҳад интеграллаймиз. Шунда биз Бета интегралларга эга бўламиз. Улар Эйлернинг Гамма ва Бета функциялари орқали ҳисобланади.

Қуйидаги айниятдан

$$\left\{z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{\partial}{\partial z} - ab\right\}\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} =$$

$$= -a\frac{\partial}{\partial t}[t^b(1-t)^{c-b}(1-tz)^{-a-1}] \quad (2.1.28)$$

келиб чиқадики, ушбу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода (1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. $s = -t$ деб олинса, $Re\, b > 0, Re\,(a + 1 - c) > 0$ ва $|\arg z| < \pi$ да

$$\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1+sz)^{-a}ds$$

интеграл (1) гипергеометрик дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. $s = \frac{\tau}{1-\tau}$ ўрнига қўйиш орқали қуйидаги кўринишдаги интегралга келамиз:

$$\int_0^1 \tau^{b-1}(1-\tau)^{a-c}[1-\tau(1-z)]^{-a}dt.$$

Шунингдек,

$$F(a,b;a+b+1-c;1-z) =$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)}\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1+sz)^{-a}ds$$

ҳам гипергеометрик тенгламанинг ечими бўлади. Бундан ташқари, қуйидаги кўринишдаги ихтиёрий интеграл

$$\int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

(1) гипергеометрик тенгламанинг ечими бўлади, агарда C интегралости функциянинг риман сиртида ёпиқ контур ёки контур чеккалари $t^b(1 - t)^{c-b}(1 - tz)^{-a-1}$ функциянинг ноллари бўлса.

$(1 - tz)^{-a}$ ни биномиал қаторга ёйиб ва Бета функция учун контур интегралларини қўллаб, қуйидагиларни топамиз:

$$F(a,b;c;z) = \frac{i\Gamma(c)\exp[i\pi(b-c)]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2\sin[\pi(c-b)]}\int_0^{(1+)} \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,$$

$$\mathrm{Re}\, b > 0, |\arg(1-z)| < \pi, c - b \neq 1,2,3, \dots;$$

$$F(a,b;c;z)=\frac{-i\Gamma(c)\exp[i\pi b]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2\sin[\pi b]}\int_0^{(1+)}\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,$$

$$\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b, |\arg(-z)|<\pi, b\neq 1,2,3,\dots;$$

$$F(a,b;c;z)=$$

$$=\frac{-\Gamma(c)\exp[i\pi c]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)4\sin\pi b\sin[\pi(c-b)]}\int^{(1+,0+,1-,0-)}\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,$$

$$|\arg(-z)|<\pi, b, 1-c, c-b\neq 1,2,3,\dots.$$

Фараз қиламиз, барча ҳолларда интеграллаш йўли $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}$ учун риман сиртидаги нуқтадан бошланади, t ҳақиқий, $0\leq t\leq 1$ ва t^b, $(1-t)^{c-b}$ лар функциянинг бош қийматлари, $(1-tz)^{-a}$ аниқланган ва $z\to 0$ да $(1-tz)^{-a}\to 1$ бўлади.

Агар $z=1$ ни қўйсак, (5) нинг ўнг томони Бета интеграл бўлади ва қуйидаги келиб чиқади:

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

бунда $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0, \operatorname{Re}(c-a-b)>0$.

Ушбу тенгликни параметрларга кучсиз шартлар қўйилганда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин, хусусан $c\neq 0,-1,-2,\dots$ ва $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$ бўлиши формуланинг ўринли бўлиши учун етарли.

Илмий изланишларда қулайлик туғдириш учун бир нечта адабиётлардан гипергеометрик функция ҳақида тўлиқроқ маълумотлар тўплашга ҳаракат қилинди. Хусусан, унинг бир нечта хоссаларини келтирамиз:

1. $F(a,b,c;z)=F(b,a,c,z)$ (гипергеометрик фунция биринчи ва иккинчи аргументлари бўйича симметрик);

2. $F(a,b,b;z)=(1-z)^{-a}$;

3. $F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, Re(c-a-b)>0$;

4. $F(a,b,c;0)=F(0,b,c,z)=1$;

5. $F(a,b,c;z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b,c;\frac{z}{z-1}\right)=$

$$=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b,c;\frac{z}{z-1}\right), |\arg(1-z)|<\pi;$$

6. $F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(1-z)^{-a}F\left(a,c-b,a-b+1;\frac{1}{z-1}\right)+$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}(1-z)^{-b}F\left(c-a,b,b-a+1;\frac{1}{z-1}\right),$$

$a-b\neq 0,\pm 1,\pm 2,\dots, |\arg(-z)|<\pi, |\arg(1-z)|<\pi$;

7. $F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}z^{-a}F\left(a,a-c+1,a+b+1-c;1-\frac{1}{z}\right)+$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+a-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F\left(c-a,1-a,c+1-a-b;1-\frac{1}{z}\right),$$
$c-a-b\neq 0,\pm 1,\pm 2,\dots,|\arg(-z)|<\pi,|\arg(1-z)|<\pi;$

8. $F(a,1-a,c;z)=(1-z)^{c-1}F\left(\frac{c-a}{2},\frac{c+a-1}{2},c;4z(1-z)\right);$

9. $F(a,1-a,c,-z)=(1+z)^{c-1}\left(\sqrt{1+z}+\sqrt{z}\right)^{2-2a-2c}\cdot$
$F\left(c+a-1,c-\frac{1}{2},2c-1;4\sqrt{z(1+z)}\left(\sqrt{1+z}+\sqrt{z}\right)^{-2}\right);$

10. $F(a,b,c;z)=\frac{b}{c}F(a,b+1,c+1;z)+\frac{c-b}{c}F(a,b,c+1;z);$

11. $\frac{d^k}{dz^k}F(a,b,c,z)=\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}F(a+k,b+k,c+k;z);$

12. $\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{c-1}(1-z)^{b-c+k}F(a,b,c;z)\right]=$
$(c-k)_k z^{c-1-k}(1-z)^{b-c}F(a-k,b,c-k;z).$

Гипергеометрик функция турли хил хоссаларга эга. Унинг универсал функция эканлиги ҳам шундаки, параметрларининг турли қийматларида у бир қатор элементар ва махсус қийматларни ифодалайди.

Жумладан, параметрларнинг хусусий қийматларида гипергеометрик функциянинг элементар ва махсус фунцияларни ифодалашига доир жадвални келтирамиз:

1) $\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}=K(k);$

2) $\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}d\varphi=E(k);$

3) $F\left(n+1,-n;1;\frac{1-x}{2}\right)=P_n(x),$

4) $P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)}\cdot$

5) $F\left(n+m+1,m-n;\ m+1;\frac{1-x}{2}\right);$

6) $J_\nu(x)=\lim_{a,b\to\infty}\left[\frac{\frac{x^\nu}{2}}{\Gamma(\nu+1)}F\left(a,b;\nu+1;\frac{-x^2}{4ab}\right)\right];$

7) $F(1,\beta;\beta;x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x};$

8) $F(-m,\beta;\beta;x)=(1+x)^m;$

9) $\left.\frac{F(\alpha,\beta;\beta;-x)-1)}{\alpha}\right|_{\alpha=0}=\log(1+x);$

10) $F(n,\beta;\beta;x) = (1+x)n;$

11) $F(\alpha,\beta;\beta;x) = (1-x)^{-\alpha};$

12) $xF(1,1;2;x) = \ln\frac{1}{1-x};$

13) $2xF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\right) = \ln\frac{1+x}{1-x};$

14) $\lim\limits_{b\to 0} F(1,b;1;x/b) = e^x;$

15) $F\left(k+1,-k;1;\frac{1-x}{2}\right) = P_k(x)$, бу ерда $P_k(x) -$ Лежандр кўпҳади;

16) $\lim\limits_{a,b\to 0} F\left(a,b;\nu+1;-\frac{x^2}{4ab}\right) = J_\nu(x),$

$J_\nu(x) -$ Бесель функцияси;

17) $xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right) = arcsinx;$

18) $xF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right) = arctgx;$

19) $F\left(\frac{\nu}{2},-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};x^2\right) = \cos(\nu arcsinx)\,;$

20) $\nu xF\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};x^2\right) = sin(\nu arcsinx)\,;$

21) $F\left(\frac{1}{2},1;1;x\right) = (1-x)^{-\frac{1}{2}};$

22) $F(-n,1;1;1-x) = x^n;$

23) $F(\alpha,-2;\gamma;x) = 1-2\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2;$

24) $F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha+1;x\right) = \left[\frac{1+(1-x)^{1/2}}{2}\right]^{-2\alpha};$

25) $F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha;x\right) = (1-x)^{-1/2}\left[\frac{1+(1-x)^{1/2}}{2}\right]^{1-2\alpha};$

26) $F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2-\sqrt[3]{4}}}+\sqrt[3]{4}+4}-\sqrt{2-\sqrt[3]{4}}-2}}.$

Юқорида келтирилганлардан хулоса қилиб, шуни айтишимиз мумкинки, гипергеометрик функцияларнинг энг кўп қўлланиладиган соҳаларидан бири математиканинг дифференциал тенгламалар соҳаси ҳисобланади. Ҳозирги вақтда дифференциал тенгламалар назарияси билан бир қаторда, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг муҳим йўналишларидан бири - қаралаётган соҳада бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламаларни ўрганиш ҳам жадал ривожланиб бормоқда. Иккинчи томондан бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламаларнинг ечимлари механика, физика ва техника масалаларида кенг кўламли тарзда амалиётда тадбиқ этилиши катта қизиқиш уйғотади.

Бузилиш чизиғига эга тенгламалар деб қаралаётган соҳанинг ичида эллиптик, соҳа чегарасида параболик (ёки соҳа ичида гиперболик, соҳа чегарасида параболик) типга тегишли бўлган тенгламаларга айтилади. Бу типдаги тенгламалар учун Дирихле ва Нейман (эллиптик тип учун) ҳамда Коши - Гурса (гиперболик тип учун) масалаларининг ечимлари гипергеометрик функциялар орқали ифодаланади.

Жумладан, Ф.Франкль ясси деворли идишдан товуш тезлигидан юқори тезликда суюқлик ёки газнинг оқиб чиқиш (идиш ичида тезлик товуш тезлигидан паст) масаласи А.С.Чаплыгиннинг

$$K(y)U_{xx} + U_{yy} = 0\ (K(0) = 0, K'(\mathrm{y}) > 0)$$

тенгламаси учун чегаравий масалага келиши кўрсатилган.

Ушбу тенгламалар типига кирувчи қуйидаги тенгламани қарайлик:

$$-(-y)^m U_{xx} + x^m U_{yy} = 0.$$

Ушбу тенглама бузилиш чизиғига эга бўлган тенгламаларга киради. Тенгламани характеристик координаталарга ўтказсак

$$U_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}\left(U_\eta - U_\xi\right) = 0$$

бўлади, бунда $\sqrt{\xi} = x^p - (-y)^p, \sqrt{\eta} = x^p + (-y)^p, p = m + 2.$

Агар тенгламада $t = \xi/\eta$ алмаштириш бажарсак, тегишли параметрлар орқали ифодаланган (1) тенглама – гипергеометрик тенгламага келамиз.

Ушбу хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун Коши масаласининг ечими Риман функцияси

$$V(\xi', \eta'; \xi, \eta) = \frac{(\eta' - \xi')^{2\beta}}{(\eta - \xi')^\beta (\eta' - \xi)^\beta} F(\beta, \beta, 1, z),$$

$$z = \frac{(\eta - \eta')(\xi' - \xi)}{(\eta' - \xi)(\eta - \xi')}$$

орқали ёзилади [2], бу ерда $2\beta = m/(m + 2)$.

Бу эса гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функцияларнинг кенг амалий аҳамиятга эгалигини кўрсатади.

[2-23] илмий изланишларда гипергеометрик тенгламалар ва гипергеометрик функцияларнинг амалий аҳамияти ҳамда оддий дифференциал тенгламалар иштирок этган боғлиқ масалалар ишланган ва улар ҳақида кенгроқ маълумотлар берилган.

Шу ўринда айтиш лозимки, илмий ишларни ўрганиш ва таҳлил қилиш талабалар учун бир қатор қийинчиликлар туғдиради. Шу сабабли ушбу мақолада талабаларнинг илмий мақолаларни ўрганишларини осонлаштириш учун математикани фанини ўқитишга бағишланган илғор педагогик технологияларнинг [24-30] айрим элементлари ҳам қўлланилди.

Фойдалнилган адабиётлар

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Москва, 1965 г., 295 с.

2. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // *XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019,* с. 197-199.

3. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // *«Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция, сборник тезисов Башкортостан РФ* (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

4. Расулов Т.Х. (2011). О числе собственных значений одного матричного оператора. *Сибирский математический журнал*, 52:2, С. 400-415.

5. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Scientific progress,* 2:1 (2021), p.42-48.

6. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.39-52.

7. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

8. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.665-672.

9. Расулов Т.Х. (2016). О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами. *ТМФ*, 186:2, С. 293-310.

10. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.19-22.

11. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.81-96.

12. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.27-30.

13. Расулов Х.Р., Джўрақулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.455-462.

14. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.448-454.

15. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

16. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // *Проблемы педагогики,* № 53:2 (2021), с. 7-10.

17. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // *Scientific progress*, 2:2 (2021), p.870-879.

18. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.23-26.

19. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У., Мухитдинов Р.Т. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции // *Украинский математический журнал*, том № 65, 2013, с.1152-1160.

20. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. Уравнение Вайнберга для собственных функций модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // *Молодой учёный*, № 9, часть 1, 2015, с.23-25.

21. Мухитдинов Р.Т. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // *Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества»,* 28-29 декабря, Россия, 2016, с.127-129.

22. Мухитдинов Р.Т. Комплексный формы представления уравнения идеального твёрдого тела // *Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества»*, 28-29 декабря, Россия, 2016, с.129-131.

23. *Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А.* Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // *Проблемы науки,* 63:4 (2021), с.16-19.

24. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // *Science and Education, scientific journal*, 2:9 (2021), p.7-20.

25. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // *Наука, техника и образование*, 72:8 (2020) с.29-32.

26. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // Scientific progress, 2:1 (2021), p.559-567.

27. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.586-595.

28. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.596-607.

29. Ахмедов О.С. Преимущества историко-генетического метода при обучении математики // *Scientific progress*, 2:4 (2021), p.523-530.

30. Ахмедов О.С. Определение предмета и место математики в системе наук // *Scientific progress*, 2:4 (2021), p.531-537.

References

1. Bateman G. Higher transcendental functions. Moscow, 1965, 295 p.

2. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.

3. Rasulov Kh.R. On one boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference, collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18-22, 2019), pp.65-66.

4. Rasulov T.Kh. (2011). On the number of eigenvalues of one matrix operator. Siberian Mathematical Journal, 52: 2, pp. 400-415.

5. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 42-48.

6. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

7. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On one quadratic stochastic operator with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P. 145-146.

8. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the dynamics of a bisexual population // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.665-672.

9. Rasulov T.Kh. (2016). On the branches of the essential spectrum of the lattice model of a spin-boson with at most two photons. TMF, 186: 2, C. 293-310.

10. Rasulov Kh.R., Dzhurakulova F.M. About one dynamic system with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) p.19-22.

11. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the bisexual population and its mathematical model // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.81-96.

12. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. On the analysis of some non-Volterra dynamical systems with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp. 27-30.

13. Rasulov X.R., Djo'rakulova F.M. On numerical solutions of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.455-462.

14. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. On the analysis of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), p.448-454.

15. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. On one dynamic system with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P.115-116.

16. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. The role of mathematics in biological sciences // Problems of pedagogy, no. 53: 2 (2021), p. 7-10.

17. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. Mathematical models and laws in biology // Scientific progress, 2: 2 (2021), pp. 870-879.

18. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On some Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp.23-26.

19. Ganikhodzhaev N.N., Zhamilov U.U., Mukhitdinov R.T. Non-ergodic quadratic operators of a bisexual population // Ukrainian Mathematical Journal, Volume 65, 2013, pp. 1152-1160.

20. Rasulov T.Kh., Mukhitdinov R.T. Weinberg's equation for the eigenfunctions of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // Young Scientist, no. 9, part 1, 2015, pp.23-25.

21. Mukhitdinov R.T. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // International scientific and practical conference "Integration of modern scientific research into the development of society", December 28-29, Russia, 2016, pp. 127-129.

22. Mukhitdinov R.T. Complex forms of representation of the equation of an ideal rigid body // International scientific-practical conference "Integration of modern scientific research into the development of society", December 28-29, Russia, 2016, pp. 129-131.

23. Mukhitdinov R.T., Abdullaeva M.A. Ergodic properties of measures generated by one class of quadratic operators // Problems of Science, 63: 4 (2021), pp.16-19.

24. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Ways to solve some equations, inequalities and systems of equations involving the module // Science and Education, scientific journal, 2: 9 (2021), r.7-20.

25. Rasulov Kh.R., Rashidov A.Sh. Organization of a practical lesson based on innovative technologies in mathematics lessons // Science, technology and education, 72: 8 (2020) pp. 29-32.

26. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.559-567.

27. Rasulov X.R., Sobirov S.J. On the use of interactive methods in solving some rational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.586-595.

28. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Application of interactive methods in solving some irrational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

29. Akhmedov O.S. The advantages of the historical-genetic method in teaching mathematics // Scientific progress, 2: 4 (2021), p.523-530.

30. O.S. Akhmedov. Definition of the subject and the place of mathematics in the system of sciences // Scientific progress, 2: 4 (2021), p.531-537.