УДК 517.988.52

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мухитдинов Рамазон Тухтаевич, доцент кафедры “Математики и естественных наук” Бухарского филиала Ташкентского института инженеров ирригации и сельского хозяйства

Абдуллаева Мухайехон Абдувохид кизи - магистр кафедры Математического анализа, Физико-математический факультет Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Аннотация. В настоящей статье дано определение класса одного квадратичных операторов (квадратичные операторы, для которых правила наследования согласуются с законами Менделя. Г.Мендель - чешско-австрийский биолог-ботаник, основоположник учения о наследственности). Изучены эргодические свойства соответствующих квадратичных мер, то есть для менделевских операторов. Также для этого класса операторов дается подробное конструкция мер. Изучены способа построения семейства функций $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ (схемы Бернульи и Маркова).

Ключевые слова: квадратичные операторы, эргодические свойства, семейства функций.

ERGODIC PROPERTIES OF MEASURES GENERATED BY ONE CLASS OF QUADRATIC OPERATORS

Mukhitdinov Ramazon Tukhtaevich, Associate Professor of the Department of Mathematics and Natural Sciences, Bukhara branch of the Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Engineers

Abdullaeva Mukhayekhon Abduvoxid qizi - Master Student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Physics and Mathematics, Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Annotation. In this article, a definition of a class of one quadratic operators is given (quadratic operators for which the rules of inheritance are consistent with Mendel's laws. G. Mendel is a Czech-Austrian biologist-botanist, the founder of the theory of heredity). The ergodic properties of the corresponding quadratic measures, that is, for Mendelian operators, are studied. A detailed construction of measures is also given for this class of operators. The methods of constructing a family of functions $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ (Bernoulya and Markov schemes) have been studied.

Keywords: quadratic operators, ergodic properties, families of functions.

Определим класс менделевских операторов и для этого класса операторов дадим конструкция мер, названных менделевскими. Пусть (E, m) произвольное пространства с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω , согласованной с мерой m на E.

Для этого достаточно по теореме Колмогорова [1] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Эта конструкция необходима для дальнейшего изложения, приведем ее для случая конечного множества E.

Пусть $E = \{1,2, \dots \dots, n\}$ и $m(\{i\}) = p_i$ – вероятностная мера на E, т.е. $p_i \geq 0$ и $\prod_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $w = (w_1, w_2, w_3, \dots .)$ элементов множества E. Пусть ξ_n -функция, ставящая в соответствие точке $w \in \Omega$ значения w_n её $n^{-й}$ координаты. Функцию ξ_n называют $n^{-й}$ координатной функцией. Пусть $\mathcal{F} - \sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\, w: (\, \xi_n(w), \xi_{n+1}(w), \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w)) \in A \,\}$$

$$\{\, w: (\, \xi_n(w), \xi_{n+1}(w), \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w)) \in A \,\}$$

где A- подмножества прямого произведения $E^k = \prod_{i=1}^{k} E$. Эта σ −алгебра $\mathcal{F}$ порождается совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\, w: \xi_n(w) = i_1, \xi_{n+1}(w) = i_2, \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w) = i_k \,\}$$

где i_l элементы множества Е, $n \leq l < n + k$, т.е. цилиндрическое множества называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. В силу этого замечания мера Р на $(\Omega, \mathcal{F})$ однозначно определяется своими значениями

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = P\{\, w\colon \xi_n(w) = i_1, \xi_{n+1}(w) = i_2, \dots\dots, \xi_{n+k-1}(w) = i_k \,\}$$

на этих цилиндрах, где $n-$ номер первой фиксированной координаты тонького цилиндра и k - размерность цилиндра. По теореме Колморова [1], если для множества функций $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ справедливы следуюшие условия согласования $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, l) = P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ и $\sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1$ при всех k,n и $i_l \in E, 1 \leq l \leq k,$ то существует единственная вероятностная мера Р на $\mathcal{F}$, для которой имеет место. Кроме того, если $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = \sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ при всех $k, n,$ и $i_l \in E, 1 \leq l \leq k,$ то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры Р на $\mathcal{F}$ составляет указание способа задания семейства функций $\{P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)\}$, n и k натуральные$\}$.

Схема Бернулли. Пусть $m(\{i\}) = p_i$ распределения на $E = \{1,2, \dots\dots, N\}$. Если положить $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3} \cdot \dots \cdot p_{i_k}$, т.е. $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ не зависит от n. Соответствующая мера P называется бернуллиевский и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайних величин.

Схема Маркова. Пусть $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1}^{N}$ стохастическая по строкам матрица. Если положить $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) =$ $p_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1} i_k}$ т.е. $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения. Соответствующая мера P называется марковской.

Для произвольных тонких цилиндров функции $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ при $k > 1$ определим следующим образом: $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) =$

$$= x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1 \dots m_{k-1=1}}^{N} P_{i_1 m_{1,} i_2} \cdot P_{i_2 m_{2,} i_3} \cdot \dots \cdot P_{i_{k-1} m_{k-1,} i_k} \; x_{m_1}^{(n)} \, x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_{k-1}}^{(n+k-1)}.$$

По построению функции зависят не только от $n, k,$ а также зависят от выбора начального распределения $x^{(O)} \in S^{N-1}$ на E (где S^{N-1} – N-мерный симплекс). Покажем справедливость второго условия:

$\sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k,, i) = x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1,\dots,m_k,i=1}^{N} P_{i_1 m_1, i_2} \cdot$

$P_{i_2 m_2, i_3} \dots P_{i_{k-1} m_{k-1}, i_k} P_{i_k m_k, i}\, x_{m_1}^{(n)} x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_k}^{(n+k)} =$

$$x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1,\dots,m_{k-1},i=1}^{N} P_{i_1 m_1, i_2} \cdot P_{i_2 m_2, i_3} \dots P_{i_{k-1} m_{k-1}, i_k}\; x_{m_1}^{(n)} x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_{k-1}}^{(n+k-1)}$$

$= P_n(i_1, i_2, i_3, \dots., i_k)$, так как $\sum_{i=1}^{N} P_{i_k m_k, i} = 1$ и $\sum_{i=1}^{N} x_{m_k}^{(n+k)} = 1$.

Таким образом, существует единственная мера P, которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным оператором V и начальным распределением $x^{(O)} \in S^{N-1}$.

Задача изучения свойства мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений [3-9]. В этой работе мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным оператором, которые описывают некоторые модели наследственной передачи.

В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом [2], передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

$$\begin{cases} P_{AA,A} - \text{от родителя с генотипом АА ребенку передается} \\ \text{аллель А}, P_{AA,a} = 1 - P_{AA,A} \\ P_{Aa,A} - \text{от родителя с генотипом Аа ребенку передается} \\ \text{аллель А}, P_{Aa,a} = 1 - P_{Aa,A} \\ P_{aa,A} - \text{от родителя с генотипом аа ребенку передается} \\ \text{аллель А}, P_{aa,a} = 1 - P_{aa,A} \end{cases}$$

В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования вероятности определены следующим образом: $P_{AA,A} = 1$ $P_{Aa,A} = \frac{1}{2}$ $P_{aa,A} = 0$, $P_{AA,a} = 0$ $P_{Aa,a} = \frac{1}{2}$ $P_{aa,a} = 1$. Это подробно изучено в работе [1].

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для менделевских мер P_x при любом $x \in [0,1]$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_x(\xi_k = i, \xi_{k+l} = j) = P_x(\xi_k = i) \cdot P_x(\xi_{k+l} = j) + \frac{(-1)^{i+j} x(1-x)}{2^l}.$$

Следствие. Менделевские меры эргодичны относительно сдвига T (определение сдвига [3]).

Отметим, что квадратичные операторы используются при исследовании закономерностей, имеющие дело с взаимодействием между размножающимися и диффундирующими частицами; биологические задачи о динамике популяции замкнутой генетической системы; экономические задачи об устойчивости в моделях коллективного поведения и т.п.

При изучение квадратичных операторов время играет важную роль в изучении закономерности. В зависимости от задачи изучаются операторы с непрерывным временем или с дискретным временем. Обычно, квадратичные операторы с непрерывным временем приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. Так, в работах [10-21] исследованы аналогичные квадратичные операторы с непрерывным временем и краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.

Из курса функционального анализа известно, что линейный оператор, определенный в двумерном симплексе S^2 (случай N=3), записывается в виде матрицы второго порядка. Проблема обобщения основных свойств матрицы на операторные матрицы, в свою очередь, является важным вопросом теории операторов. Задачи связанные со спектральными свойствами операторных матриц глубоко изучается многими учеными. В частности, в работах [22-34] исследованы ряд результатов, связанных с существенными и дискретными спектрами таких операторных матриц.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1936.

2. Ганиходжаев Р.Н, Сарымсаков А.Т. О не растягивающих квадратичных стохастических операторах / / ДАН УзССР, 1988, №1, с.7.

3. Мухитдинов Р.Т. Описание класса сюръективных операторов, определенных на одномерном симплексе. Деп.в ГФНТ ГКНТ РУз.-№2384-Уз95.10 с.

4. Мухитдинов Р.Т. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции. Украинский математический журнал 2013. Том 65. С. 1152-1160.

5. Mukhitdinov R.T., Ganikhodjaev N.N., Saburov M. Reprinted from the Bulletin of the Korean Mathematical Society. V. 5, 4, №2, 2017 C.607-618.

6. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С.Б. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин // Academy. **55**:4 (2020). Pp. 13-16.

7. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes // Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017, doi 10.1088/1742-6596/697/1/012017.

8. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type ($\sigma|\mu$). // Markov Processes Relat.Fields 26, 915-933 (2020).

9. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей // Вестник науки и образования. 96:18-2 (2020), с. 5-7.

10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

11. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, 2019, с.197-199.

12. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66

13. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
14. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.
15. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
16. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
17. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
18. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
20. Джуракулова Ф.М. О численных решениях непрерывного аналога строго невольтерровского квадратичного стохастического оператора // Вестник науки и образования, 102:24-3 (2020), с. 6-9.
21. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
22. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 10:6 (2019), pp. 616-622.
23. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics // J.Stat.Phys. 127:2 (2007), P.191-220.

24. Rasulov T.H. On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix // Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1 (2016), pp. 48-61.
25. Rasulov T.H. The finiteness of the number of eigenvalues of an Hamiltonian in Fock space // Proceedings of IAM, 5:2 (2016), pp. 156-174.
26. Muminov M.I., Rasulov T.H. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space // Comm. in Mathematical Analysis. 17:1 (2014), pp. 1-22.
27. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.
28. Muminov M.I., Rasulov T.H. On the number of eigenvalues of the family of operator matrices. // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 5:5 (2014), pp. 619-625.
29. Расулов Т.Х. Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // ТМФ. 161:2 (2009), С. 164-175.
30. Расулов Т.Х. О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал, 52:2 (2011), С. 400-415.
31. Muminov M.I, Rasulov T.H. The Faddeev equation and essential spectrum of a Hamiltonian in Fock Space // Methods Funct. Anal. Topol., 17:1 (2011), pp. 47-57.
32. Rasulov T.H. Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space // Appl. Math. Inf. Sci. 4:3 (2010), pp. 395-412.
33. Расулов Т.Х. Исследование существенного спектра одного матричного оператор // ТМФ, 164:1 (2010), С. 62-77.
34. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices // Methods Func. Anal. Topology, 25:1 (2019), pp. 273-281.