КРАЙНИЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА S^1

Рамазон Тухтаевич Мухитдинов
доцент кафедры «Математического анализа», Физико-математический факультет, Бухарский государственный университет

Мухайёхон Абдувохид кизи Абдуллаева
Магистр кафедры «Математического анализа», Физико-математический факультет, Бухарский государственный университет

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье дается определение $n-1$ - го симплекса S^{m-1} и квадратично стохастических опeратров, а также полное описание всех крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^1 и доказаны, что изучаемые квадратичные операторы образуют совокупность всех крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных на S^1.

Ключевые слова: квадратичные операторы, сюръективный квадратичный оператор, крайние точки.

EXTREME POINTS OF THE SET OF QUADRATIC OPERATORS DEFINED ON S^1

Ramazon Tukhtaevich Mukhitdinov
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Physics and Mathematics, Bukhara State University

Mukhayekhon Abduvokhid kizi Abdullaeva
Master Student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Physics and Mathematics, Bukhara State University

ABSTRACT

In this article, we give a definition of the $n-1$ - th simplex S^{m-1} and quadratic stochastic operators, as well as a complete description of all extreme points of the set of quadratic operators defined on S^1 and prove that the studied quadratic operators form the set of all extreme points of the set of all quadratic operators defined on S^1.

Keywords: quadratic operators, surjective quadratic operator, extreme points.

ВВЕДЕНИЕ

Сначала дадим определение $n-1$ - го симплекса S^{m-1}. Множество

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m)\} \in \mathbb{R}^m\colon\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

называется $n-1$ - мерным симплексом. Здесь, каждый элемент $x \in S^{m-1}$ является вероятностной мерой на $E = \{1, \dots, m\}$. и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из m элементов.

Оператор отображающий симплекс

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m)\} \in \mathbb{R}^m\colon\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

в себя

$$V\colon x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{P}_{ij,k} x_i x_j, k = 1, \dots, m,$$

где $\mathrm{P}_{ij,k} -$ коэффициент наследственности и

$$\mathrm{P}_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}_{ij,k} = 1, \quad i, j, k = 1, \dots, m,$$

называется квадратичным стохастическим оператором. Здесь и далее мы будем придерживается определения и обозначения работы [1-2].

МЕТОДОЛОГИЯ

Рассмотрим случай $n = 2$. В данной работе дается полное описание множество всех сюръективных квадратичных операторов, определенных на S^1. Доказывается, что множество состоит из двух классов V и $\bar{V}$:

$$V = \left\{ V_b = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 1,\ \mathrm{P}_{12,1} = \mathrm{b}, \mathrm{P}_{22,1} = 0, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 0, \mathrm{P}_{12,2} = 1 - \mathrm{b}, \mathrm{P}_{22,2} = 1, \end{cases} 0 \leq \mathrm{b} \leq 1, \right\}$$

$$\bar{V} = \left\{ \overline{V_b} = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 0,\ \mathrm{P}_{12,1} = \mathrm{b}, \mathrm{P}_{22,1} = 1, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 1, \mathrm{P}_{12,2} = 1 - \mathrm{b}, \mathrm{P}_{22,2} = 0, \end{cases} 0 \leq \mathrm{b} \leq 1 \right\}$$

каждое из которых является выпуклым множеством.

Операторы

$$V_1 = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 1,\ \mathrm{P}_{12,1} = 0, \mathrm{P}_{22,1} = 0, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 0, \mathrm{P}_{12,2} = 1, \mathrm{P}_{22,2} = 1, \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 1,\ \mathrm{P}_{12,1} = 1, \mathrm{P}_{22,1} = 0, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 0, \mathrm{P}_{12,2} = 0, \mathrm{P}_{22,2} = 1 \end{cases}$$

является крайними точками множества V и соответственно операторы

$$V_3 = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 0,\ \mathrm{P}_{12,1} = 0, \mathrm{P}_{22,1} = 1, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 1, \mathrm{P}_{12,2} = 1, \mathrm{P}_{22,2} = 0 \end{cases}$$

и

ISSN: 2181-1601

$$V_4=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0,\ \mathrm{P}_{12,1}=1,\mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1,\mathrm{P}_{12,2}=0,\mathrm{P}_{22,2}=0\end{cases}$$

является крайними точками множества $\bar{V}$.

Рассмотрим следующие операторы

$$V_5=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0,\ \mathrm{P}_{12,1}=1,\mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1,\mathrm{P}_{12,2}=0,\mathrm{P}_{22,2}=1,\end{cases}$$
$$V_6=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1,\ \mathrm{P}_{12,1}=0,\mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0,\mathrm{P}_{12,2}=1,\mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$
$$V_7=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1,\ \mathrm{P}_{12,1}=1,\mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0,\mathrm{P}_{12,2}=0,\mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$
$$V_8=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0,\ \mathrm{P}_{12,1}=0,\mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1,\mathrm{P}_{12,2}=1,\mathrm{P}_{22,2}=1.\end{cases}$$

Теорема. Квадратичные операторы $V_i,\ i=1,2,\ldots\ldots,8$ образуют совокупность всех крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных на S^1.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что любой квадратичный оператор

$$V=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=\mathrm{a}\ \mathrm{P}_{12,1}=\mathrm{b}\ \mathrm{P}_{22,1}=\mathrm{c},\\ \mathrm{P}_{11,2}=1-\mathrm{a}\ \mathrm{P}_{12,2}=1-\mathrm{b}\ \mathrm{P}_{22,2}=1-\mathrm{c},\end{cases}$$

определенных на S^1, где $0\le\alpha\le 1{,}0\le b\le 1$ и $0\le \mathrm{c}\le 1$ является выпуклой линейной комбинацией квадратичных операторов V_i при $i=1,2,\ldots\ldots,8$ и при этом не является таковой для любого меньшего числа операторов.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{a}\lambda_i\cdot V_i=V,$$

где $\lambda_i\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{a}\lambda_i=1$. Это уравнение эквивалентно системе уравнений и неравенств

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8=1,\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_6+\lambda_7=a,\\ \lambda_1+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_7=b,\\ \lambda_3+\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7=c,\\ \lambda_i\ge 0\ i=1,2,\ldots 8.\end{cases}\qquad(1)$$

Прежде чем доказывать разрешимость (1), покажем, что одно $V_i,\ i=1,2,\ldots\ldots,8$ не является выпуклой линейной комбинацией остальных операторов. Например, покажем, что V_8 не является выпуклой линейной комбинацией $V_i, i=1,2,\ldots\ldots,7$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть

$$V_8 = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i \cdot V_i.$$

Тогда имеем следующую систему уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_i \geq 0 \ i = 1, \dots \dots ..,7. \end{cases}$$

Очевидно, система не имеет решений, т.к. из неравенств и последних трех уравнений следует $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1,2, \dots ..,7.$, что противоречит

$$\sum_{i=1}^{7} \lambda_i.$$

То, что система (1) разрешима, легко следует из следующего замечания. Рассмотрим единичный куб:

$$K = \{(y_1, y_2, y_3): 0 \leq y_1 \leq 1; 0 \leq y_2 \leq 1;\ 0 \leq y_3 \leq 1\}.$$

Очевидно, что точки $B_1(1,0,0); B_2(1,1,0);\ B_3(0,0,1);\ B_4(0,0,1);\ B_5(1,0,1);\ B_6(1,1,1);\ B_7(0,1,0);$ и $B_8(0,0,0)$ - является крайними точками куба и любая точка $C(a, b, c)$ является выпуклой линейной комбинацией этих крайних точек, т.е. существуют неотрицательные λ_i, $i = 1,2, \dots 8,$

$$\sum_{i=1}^{a} \lambda_i B_i.$$

Координатная запись этого соотношения не что иное, как система (1), откуда и следует утверждение теоремы.

ОБСУЖДЕНИЕ

Крайние точки V_1, V_2, V_3, V_4 определенные выше, являются сюръективными квадратичными стохастическими операторами. Заметим, что сюръективность квадратичного оператора гарантирует, что какая-либо траектория квадратичного оператора проходит через любую наперед заданную точку симплекса, или, на языке моделей, выбрав какое-либо начальное распределение на множества разновидностей, через некоторое число шагов можем получить произвольное распределение.

Рассмотрим подробнее остальные четыре крайние точки. Квадратичным операторам V_5 и V_7 соответствуют следующие преобразования

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,1} x_i x_j, \\ x_2 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,2} x_i x_j, \\ x_3 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,3} x_i x_j \end{cases} \qquad (2)$$

симплекса S^1:

$$V_5 = \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2, \\ x_2' = 2x_1x_2 \end{cases} \text{ и } V_7 = \begin{cases} x_1' = 2x_1x_2, \\ x_2' = x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

легко заменить, что

$$V_5(S^1) = \left\{(x_1, x_2) \in S^1 : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1\right\}$$

и

$$V_7(S^1) = \{(x_1, x_2) \in S^1 : 0 \leq x_1 \leq 1/2\},$$

причем прообраз каждой точки, принадлежащей $V_5(S^1)$ и $V_7(S^1)$, состоит из двух точек симметричных относительно центра симплекса S^1.

Квадратичным операторам V_6 и V_8 соответствуют следующие преобразования (2) симплекса S^1:

$$V_6 = \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \\ x_2' = 0 \end{cases}$$

и

$$V_8 = \begin{cases} x_1' = 0, \\ x_2' = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \end{cases}$$

откуда $V_6(S^1) = \{(1,0)\}$ и $V_8(S^1) = \{(0,1)\}$.

Таким образом, из восьми крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^1, четыре крайние точки являются сюръективными квадратичными операторами, две крайние точки являются преобразованиями, переводящими симплекс в одну из его половин, причем обратные к ним являются двузначными отображениями; и, наконец, последние две крайние точки являются квадратичными операторами, переводящими весь симплекс в одну из его вершин.

РЕЗУЛЬТАТ

Как мы отметили выше, квадратичные стохастические операторы используются при исследовании закономерностей динамике популяции замкнутой генетической системы; экономические задачи об устойчивости в моделях коллективного поведения и т.п.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Некоторые квадратичные стохастические операторы с дискретным временем исследованы в работах [3-15]. Отметим, что при изучение квадратичных стохастических операторов время играет важную роль в изучении закономерности. В зависимости от задачи изучаются операторы с непрерывным временем или с дискретным временем. Обычно, квадратичные операторы с непрерывным временем приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. Так, в работах [16-30] исследованы аналогичные квадратичные операторы с непрерывным временем и краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.

REFERENCES

1. Мухитдинов Р.Т. Описание класса сюръективных операторов, определенных на одномерном симплексе. Деп.вГФНТГКНТ РУз.-№2384-Уз.95.10 с.
2. Мухитдинов Р.Т. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции. Украинский математический журнал 2013. Том 65. С. 1152-1160.
3. Mukhitdinov R.T., GanikhodjaevN.N., Saburov M. Reprinted from the Bulletin of the Korean Mathematical Society. V. 5, 4, №2, 2017 С.607-618.
4. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С.Б. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин // Academy. **55**:4 (2020). p. 13-16.
5. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes // Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017, doi 10.1088/1742-6596/697/1/012017.
6. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes // Journal of Physics: Conferense Series. 697 (2016), 012017, doi 10.1088/1742-6596/697/1/012017.
7. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. // Quadratic stochastic processes of type $(\sigma|\mu)$ // arXiv: 2004.01702 [math.D.S]. p. 1-14.
8. Мамуров Б.Ж. Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин // Молодой учёный. 197:11 (2018). с. 3-5.
9. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite genotypes // Scientific reports of Bukhara State University. 1:5 (2018) p.18-21.
10. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С.Б. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин // Academy, 55:4 (2020) p.13-16.
11. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type $(\sigma|\mu)$ // Markov Processes Relat.Fields 26 (2020), 915-933.
12. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов // Bulletin of Institute of Mathematics, 6 (2019), p.35-39.
13. Мамуров Б.Ж., Абдуллаев Ж. Регрессионный анализ как средство изу-чения зависимости между переменными. European science. 58:2 (2021) с.7-10.

14. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора // Наука, техника и образование. 77:2-2 (2021) с.10-15.
15. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки. 63:4 (2021), с. 16-19.
16. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10, 2019.
17. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
18. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
19. Rasulov Kh.R. On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal, 4 (2018), p.126-131.
20. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
21. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
22. Джуракулова Ф.М. О численных решениях непрерывного аналога строго невольтерровского квадратичного стохастического оператора // Вестник науки и образования, 102:24-3 (2020), С. 6-9.
23. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века, 53:6 (2019), С.16-18.
24. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
25. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
26. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

27. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66
28. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), с. 7-10.
29. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
30. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.19-22.