# Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского

Том 66

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

# XVI Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”

## Сборник трудов

(*Казань, 22 – 27 августа 2023 г.*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2023

*М. Б. Зверева, М. И. Каменский.* О математических моделях с нелинейным условием . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
*К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа.* О существовании решения с заданным асимптотическим поведением для неоднородного уравнения Шредингера на модельных многообразиях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
*Д. Э. Исмоилова.* Спектральные соотношение для матричной модели в фермионном пространстве Фока . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
*М. В. Кабанко.* О структуре операторов в некоторых парах пространств аналитических функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
*М. В. Кабанко.* Оценка типа мероморфной функции конечного порядка . . . . 106
*М. И. Каменский, В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян, О. Ю. Петросян.* Почти периодические траектории управляемых систем с обратной связью в форме sweeping процессов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
*В. В. Капустин.* Пространства де Бранжа и свойства нулей дзета-функции Римана . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
*И. А. Кареев.* Последовательная $d$-апостериорная процедура отбора наиболее вероятного мультиномиального исхода, основанная на технике первого перескока и консервативном априорном распределении с зоной безразличия . . . 111
*М. Б. Карманова.* Субримановы свойства классов неконтактных отображений . 113
*М. Кармуши.* Семейство отображений полуплоскости на полосу с разрезом, выходящим из бесконечности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116
*A. R. Kacimov.* Analytic solution to the Laplace-Poisson equation for Strack's potential modeling transpirative drawdown, decontamination of groundwater and carbon sequestration by rectangular-shaped urban greenery zone . . . . . . . . 117
*A. R. Kacimov, Yu. V. Obnosov.* Analytical and numerical modeling of seepage in domains with a free boundary, tilted bedrock and seepage face: the Pavlovskii legacy revisited . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118
*И. Е. Каспирович.* О накоплении ошибок при численном интегрировании систем дифференциальных уравнений и стабилизации связей . . . . . . . . . 120
*И. Н. Катковская, В. Г. Кротов.* Интерполяционная теорема Марцинкевича и касательное граничное поведение функций из классов типа Харди . . . . . . 122
*С. В. Кисляков.* Оценки в разных метриках в теореме о короне и в задаче об идеалах в алгебре ограниченных аналитических функций в круге . . . . . . 125
*С. Н. Киясов.* Эффективная факторизация в некоторых классах гельдеровских матриц-функций третьего порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
*И. А. Колесников.* Конформный модуль четырехугольника . . . . . . . . . . 129
*М. А. Комаров.* Скорость аппроксимации в пространствах Бергмана наипростейшими дробями с полюсами на окружности . . . . . . . . . . . . . . . 130
*А. Н. Кондрашов.* О существовании некоторых специальных решений эллиптических уравнений на концах некомпактных римановых многообразий . . . . 132
*И. И. Костенко.* Интерполяция в пространстве мероморфных функций конечного порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134
*В. Г. Кротов, М. М. Логиновская.* Интерполяционная теорема Марцинкевича-Ханта для классов Харди-Лоренца . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

УДК 517.984

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ В ФЕРМИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Д. Э. Исмоилова[1]

1 *d.e.ismoilova@buxdu.uz*; Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан.

*Рассматривается матричная модель, ассоциированная с системой, описывающей два одинаковых фермиона и одну частицу иной природы, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения. Установлены соотношения для спектра, существенного и точечного спетра рассматриваемого оператора.*

**Ключевые слова**: матричная модель, спектр, существенный спектр, точечный спектр, оператор рождения, оператор уничтожения.

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) анти-симметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Положим

$$\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1; \quad \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2.$$

Пространство $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ $(m = 1, 2)$ называется "$m+1$–частичным обрезанным" подпространство пространства $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$. Элементы пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ представляются как векторы $f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\}$, где $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0, 1, 2$. Для двух элементов $f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\}, g = \{g_0^{(\mathrm{s})}, g_1^{(\mathrm{s})}, g_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ их скалярное произведение определяется как

$$\langle f, g\rangle := \sum_{\mathrm{s}=\pm} \Big( f_0^{(\mathrm{s})} \overline{g_0}^{(\mathrm{s})} + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1^{(\mathrm{s})}(k_1) \overline{g_1^{(\mathrm{s})}(k_1)} dk_1 + \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2) \overline{g_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2)} dk_1 dk_2 \Big).$$

В пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ рассмотрим следующую операторную матрицу

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$\mathscr{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \mathscr{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t) dt, (\mathscr{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1),$$

$$(\mathscr{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1, t) dt, (\mathscr{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2),$$

$$\{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Здесь $\varepsilon$ – фиксированное вещественное число, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\alpha > 0$ – "параметр взаимодействия".

С целью изучения спектральных свойств оператора $\mathscr{A}$ наряду с этим оператором рассмотрим еще следующие два ограниченных самосопряженных операторов $\mathscr{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, которые действуют в $\mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ как $3\times 3$ операторные матрицы

$$\mathscr{A}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathscr{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathscr{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathscr{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathscr{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathscr{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathscr{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathscr{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$\widehat{\mathscr{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0 = \mathrm{s}\varepsilon f_0, \quad \widehat{\mathscr{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)\,dt,$$
$$(\widehat{\mathscr{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1)(k_1) = (-\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1(k_1), \quad (\widehat{\mathscr{A}}_{12} f_2)(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(k_1, t)\,dt,$$
$$(\widehat{\mathscr{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2)(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2(k_1, k_2), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Можно проверить, что

$$(A_{01}^{*} f_0)(k_1) = \alpha v(k_1) f_0;\ (A_{12}^{*} f_1)(k_1, k_2) = \alpha \big(v(k_1) f_1(k_2) - v(k_2) f_1(k_1)\big),\ (f_0, f_1) \in \mathscr{F}_{\mathrm{as}}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Далее, под обозначениями $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{pp}}(\cdot)$ понимаются спектр, существенный спектр и точечный спектр ограниченного самосопряженного оператора, соответственно.

Установим связь между спектрами операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$.

**Теорема.** *Имеет место равенство* $\sigma(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma(\mathscr{A}^{(-)})$. *Более того,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{A}^{(-)}), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{A}^{(-)}).$$

Аналогичный результат получено в работе [3] для решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами (действующей в бозонное пространство Фока).

## Литература

1. *Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – V. 56.

SPECTRAL RELATIONS FOR A MATRIX MODEL IN FERMIONIC FOCK SPACE

D. E. Ismoilova

*We consider a matrix model associated with a system describing two identical fermions and one particle another nature interacting via annihilation and creation operators. The relations for the spectrum, of essential spectrum and point spectrum are established.*

Keywords: matrix model, spectrum, essential spectrum, point spectrum, creation operator, annihilation operator.