Journal of New Century Innovations

VOLUME
3
ISSUE-1

Journal of new century innovations

AREAS

Exact and natural sciences

Pedagogical sciences

Social sciences and humanities

Engineering and Medical Sciences

JOURNAL OF NEW CENTURY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

UDK 517.984

BIR O’LCHAMLI YADROGA EGA FREDGOLM OPERATORINING SONLI TASVIRI

Latipov Hakimboy Mirzo o‘g‘li
Buxoro davlat universiteti
Abrayev Abdumalik Mamarajabovich
Samarqand davlat universitetining Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada Fredgolm operatorlari va chiziqli operatorning sonli tasviri haqida umumiy ma’lumotlar keltirilgan. Bir o’lchamli yadroga ega Fredgolm operatorining nuqtali spektri tahlil qilingan hamda uning sonli tasviri hisoblangan.

Kalit so’zlar: Fredgolm operatori, funksional fazo, sonli tasvir, nuqtali spektr.

NUMERICAL RANGE OF A FREDHOLM OPERATOR WITH RANK ONE KERNEL

Latipov Hakimboy Mirzo ugli
Bukhara State University
Abrayev Abdumalik Mamarajabovich
Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy of the Samarkand State University

ANNOTATION

In this paper we give a general information about the Fredholm operator and the numerical range of a linear operator. The point spectrum of a Fredholm operator with rank one kernel is discussed and its numerical range is calculated.

Key words: Fredholm operator, functional space, numerical range, point spectrum.

1. Fredgolm operatorlari. Ushbu bo'limda biz Funksional analiz [1] kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan Fredgolm operatorlari haqida umumiy ma'lumotlarni keltiramiz.

Elementlari funksiyalardan iborat bo'lgan to'plamga funksional to'plam deyiladi. Bunday to'plamlarga misol sifatida $C[a,b], L_2[a,b], C_2[a,b]$ fazolarni keltirish mumkin. Funksional fazoda tenglama berilgan bo'lib, noma'lum element funksiyadan iborat bo'lsa, bunday tenglamaga funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma'lum funksiya integral ostida bo'lsa, u holda bunday tenglamaga integral tenglama deyiladi. Masalan,

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)g(\phi(t),t)dt$$

tenglama ϕ ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $K(s,t), g(s,t)-$ berilgan funksiyalar.

Integral tenglamadagi ifoda noma'lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo'lgan holda tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi. Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misol bo'ladi:

$$\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s), \tag{2}$$

bu yerda $\phi-$ noma'lum funksiya, $K(s,t)$ va $f(s)$ ma'lum funksiyalar. (1) va (2) tenglamalar mos ravishda birinchi va ikkinchi tur Fredholm tenglamalari deyiladi.

Xususan, $K(s,t)$ funksiya $t > s$ qiymatlar uchun $K(s,t) = 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda (1) va (2) tenglamalar mos ravishda

$$\int_a^s K(s,t)\phi(t)dt + f(s) = 0, \tag{3}$$

$$\phi(s) = \int_a^s K(s,t)\phi(t)dt + f(s) \tag{4}$$

ko‘rinishlarga ega bo‘ladi. Bunday tenglamalar birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari deyiladi. Volterra tenglamalari Fredholm tenglamalarining xususiy holi bo‘lsa-da, ular alohida o‘rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o‘ziga xos bo‘lgan xossalarga ega.

Agar (1)-(4) tenglamalarda f funksiya nolga teng bo‘lsa, bu tenglamalar bir jinsli deyiladi.

$L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosida ikkinchi tur Fredholm tenglamasini, ya’ni (2) tenglamani olamiz. Bu tenglamada f ma’lum, ϕ noma’lum funksiyalar bo‘lib, ular $L_2[a,b]$ fazoning elementlaridir.

(2) tenglamaning yadrosi deb nomlanuvchi $K(s,t)$ funksiyadan quyidagilarni talab qilamiz, u o‘lchovli va

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dsdt < \infty \tag{5}$$

shartni qanoatlantirsin, ya’ni $K(s,t)-$ kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. $L_2[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$(T\phi)(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt. \tag{6}$$

operatorni qaraymiz. Bu operator K yadroli Fredholm operatori deb ataladi. (2) tenglamani o‘rganish shu operatorning xossalarini tekshirishga keltiriladi.

1-teorema. *Agar* $K(x,y)$ *yadro* (5) *shartni qanoatlantirsa, u holda* $L_2[a,b]$ *fazoda* (6) *tenglik bilan aniqlanuvchi* T *operator chiziqli, kompakt va*

$$\|T\| \le \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dsdt}$$

tengsizlik o‘rinli.

2. Chiziqli operatorning sonli tasviri va uning asosiy xossalari

H orqali kompleks Gilbert fazoni belgilaymiz, $A: H \to H$ chiziqli operator bo’lib $D(A) \subset H$ uning aniqlanish sohasi bo’lsin. Ushbu

$$W(A) := \{(Ax, x): x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

to'plamga A operatorning sonli tasviri deyiladi. $W(A)$ to'plamning aniqlanishiga ko'ra u kompleks tekislikning qism to'plami bo'ladi. $W(A)$ to'plamning geometrik xossalari yordamida A operator haqida ayrim xulosalarni olish mumkin.

H fazodagi birlik operatorni I orqali belgilaymiz. N, R va C lar orqali mos ravishda barcha natural, batcha haqiqiy va barcha kompleks sonlar to'plamini belgilaymiz. O'quvchiga qulaylik uchun, chiziqli operator sonli tasvirining asosiy xossalarini isbotsiz bayon qilamiz, batafsil ma'lumotlar [2] adabiyotda keltirilgan.

1-xossa. Agar A chiziqli chegaralangan operator bo'lsa, u holda

$$W(A) \subset \{\lambda \in C: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

munosabat o'rinli.

2-xossa. Agar A chiziqli chegaralangan operator bo'lsa, A^* qo'shma operatorning sonli tasviri uchun

$$W(A^*) = \{\bar{\lambda}: \lambda \in W(A)\}$$

tenglik o'rinlidir.

3-xossa. I −birlik operator sonli tasviri uchun

$$W(I) = \{1\}$$

tenglik o'rinlidir. Agar α va β istalgan kompleks sonlar bo'lsa, u holda

$$W(\alpha A + \beta) = \alpha W(A) + \beta$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4-xossa. O'z – o'ziga qo'shma A operator uchun $W(A) \subset R$ munosabat o'rinli.

5-xossa. Agar $H -$ chekli o'lchamli fazo bo'lsa, u holda $W(A)$ kompakt to'plam bo'ladi.

6-xossa. Agar $A, B: H \to H -$ unitar ekvivalent operatorlar bo'lsa, u holda

$$W(A) = W(B)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

7-xossa. A operatorning nuqtali spektri va sonli tasviri o'rtasida

$$\sigma_p(A) \subset W(A)$$

munosabat o'rinlidir.

7-xossaga ko'ra A operatorning barcha xos qiymatlari $W(A)$ da yotadi. Tabiiy savol paydo bo'ladi: A operator spektrining qolgan qismi haqida nima deyish mumkin? Yaxshi ma'lumki, chegaralangan operator spektri yopiq bo'ladi. 5-xossaga ko'ra, agar H chekli o'lchamli fazo bo'lsa, u holda $W(A)$ yopiq bo'ladi. Agar H cheksiz o'lchamli bo'lsa, u holda $W(A)$ umuman olganda yopiq bo'lmasligi mumkin.

$W(A)$ yopiq bo'lmaydigan A operatorga misol keltiramiz. Quyidagi

$$A: l_2 \to l_2, A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$$

operatorni qaraymiz. Osongina tekshirish mumkinki

$$\sigma(A) = \left\{0, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots\right\}$$

o'rinlidir. $W(A) = (0,1]$ ekanligidan ko'rsatamiz. A o'z – o'ziga qo'shma operator bo'lganligi uchun 4-xossaga ko'ra $W(A) \subset R$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki,

$$\inf_{\|x\|=1}(Ax, x) = 0, \quad \sup_{\|x\|=1}(Ax, x) = \|A\| = 1$$

o'rinli. Biroq birorta ham $x \in l_2, \|x\| = 1$ element uchun (Ax, x) kvadratik forma 0 qiymatni qabul qilmaydi. Demak,

$$W(A) = (0,1].$$

Shunday qilib,

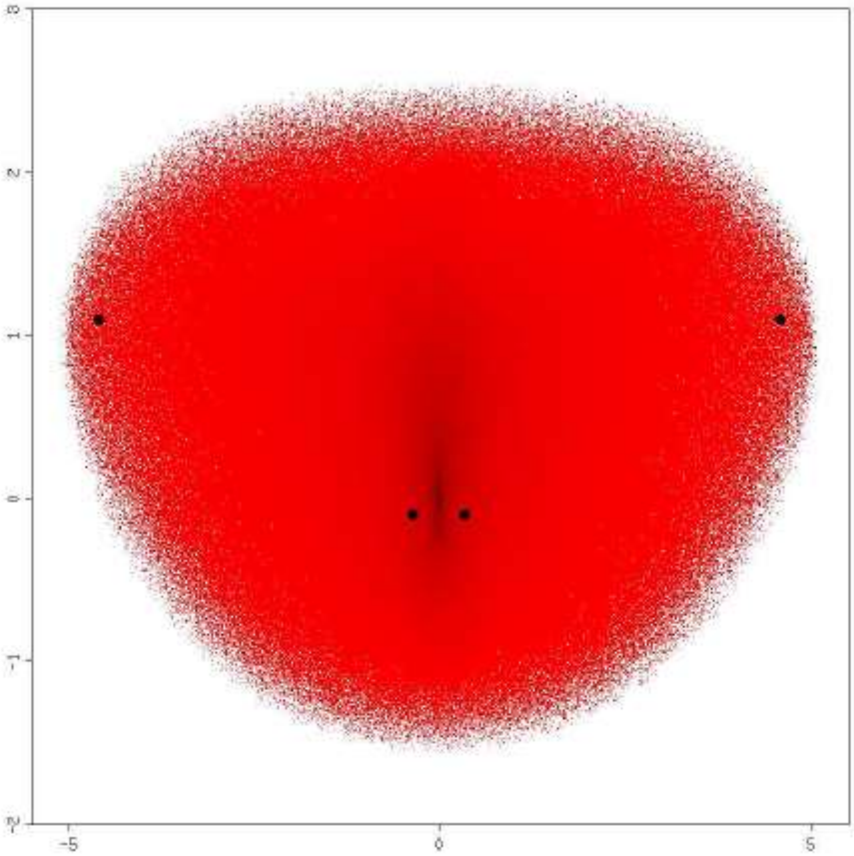
$$\sigma(A) \subset W(A)$$

hamisha ham o'rinli bo'lmaydi.

C^4 fazoda

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & i & 5i \\ -1 & -2 & -5i & i \end{pmatrix}$$

matrisani qaraymiz. Bu 4-tartibli matrisa bo'lganligi bois uning 4 ta xos qiymati bor va bu xos qiymatlar to'plami uning spektrini, xususan nuqtali spektrini tashkil etadi. Quyidagi chizmada M matrisaning sonli tasviri keltirilgan.



Chizmadan ko'rinib turibdiki, M matrisaning sonli tasviri uning barcha xos qiymatlarini o'zida saqlayapti. Xos qiymatlar chizmada qora nuqtalar orqali belgilangan.

3. Bir o'lchamli ajralgan yadroli Fredgolm operatorining spektri va sonli tasviri. $L_2[a,b]$ orqali $[a,b]$ kesmada aniqlangan, kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. Bu fazodagi $f, g \in L_2[a,b]$ elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

kabi, $f \in L_2[a,b]$ elementning normasi esa

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b | f(t) |^2 \, dt}$$

kabi aniqlanadi.

$L_2[a,b]$ Hilbert fazosida

$$(Tf)(x) = v(x)\int_a^b v(t)f(t)dt$$

formula yordamida ta'sir qiluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda $v(\cdot)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya.

T operator integral operator bo'lib, 1-bo'limda keltirilgan ta'rifga binoan u Fredgolm operatori ham bo'ladi. Uning $K(x,y)$ yadrosi uchun

$$K(x,y) = v(x)v(y)$$

tenglik o'rinlidir. Shu sababli o'rganilayotgan T operatorga bir o'lchamli yadroga ega Fredgolm operatori deyiladi.

1-tasdiq. T operator $L_2[a,b]$ Hilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlashda Funksional analizning mos ta'riflaridan foydalaniladi. Xususan, $f, g \in L_2[a,b]$ elementlar va $\alpha, \beta \in C$ kompleks sonlari uchun

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$$

tenglik o'rinli bo'lishi ko'rsatiladi. Shunday $M > 0$ soni topilib, ixtiyoriy $f \in L_2[a,b]$ element uchun

$$\| Tf \| \leq M \| f \|$$

tengsizlik bajarilishi ko'rsatiladi. Bundan tashqari, istalgan $f, g \in L_2[a,b]$ elementlar uchun

$$(Tf, g) = (f, Tg)$$

tenglik tekshiriladi.

2-tasdiq. 0 soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlash uchun

$$Tf = 0$$

tenglama qaraladi hamda bu tenglamaning yechimlari qism fazosi bo'lgan

$$\{ f \in L_2[a;b] : Tf = 0 \}$$

qism fazo cheksiz o'lchamli ekanligi, ya'ni ixtiyoriy n natural soni uchun n ta chiziqli bog'lanmagan elementlarning mavjudligi ko'rsatiladi.

Endi nolmas λ soni uchun $Tf = \lambda f$ xos qiymatga nisbatan tenglamani qaraymiz va uni

$$v(x)\int_a^b v(t)\, f(t)dt = \lambda f(x) \tag{7}$$

ko'rinishda yozib olamiz. (7) tenglamada

$$k = \int_a^b v(t)\, f(t)dt \tag{8}$$

belgilash olamiz. U holda $f(x)$ uchun

$$f(x) = \frac{k\, v(x)}{\lambda} \tag{9}$$

ifodani hosil qilamiz. Topilgan (9) ifodani (8) belgilashga qo'yib

$$k\left(1 - \frac{1}{\lambda}\| v \|^2\right) = 0$$

tenglikga ega bo'lamiz. Agar oxirgi tenglikda $k = 0$ bo'lsa, (9) tenglikga ko'ra $f(x) = 0$ bo'ladi. Bu esa λ soni xos qiymat ekanligiga ziddir. Shu sababli, $\lambda = \| v \|^2$ ekan.

Shunday qilib quyidagi tasdiq o'rinli.

3-tasdiq. $\lambda = \| v \|^2$ soni T operator uchun oddiy (1 karrali) xos qiymat bo'ladi.

Demak, T operatorning spektri, muhim spektri, diskret spektri, nuqtali spektri, uzluksiz spektri uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$\sigma(T) = \{0, \| v \|^2\}$;

$\sigma_{ess}(T) = \{0\}$, $\sigma_{disc}(T) = \{\| v \|^2\}$;

$\sigma_{pp}(T) = \{0, \| v \|^2\}$, $\sigma(T) = \varnothing$.

Endi maqolaning asosiy natijalaridan biri bo'lgan tasdiqni keltiramiz.

4-tasdiq. T operatorning sonli tasviri uchun $W(T) = [0, \| v \|^2]$ tenglik o'rinlidir.

Eslatib o'tish joizki, T operator aksariyat hollarda diskret Shryodinger operatori, Fridrixs modeli va uning umumlashmalari spektral xossalarini o'rganish jarayonida qo'zg'alish operatori sifatida qaraladi [3-37].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz. O'quv-qo'llanma. Toshkent-Samarqand, 2009.

2. Gustafson, K.E., Rao, D.K.M. Numerical Range. Universitext. Springer, New York, 1997. The field of values of linear operators and matrices.

3. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 5 (2004), pp. 743-772.

4. Khalkhuzhaev A., Kholmatov Sh., Pardabaev M. Expansion of eigenvalues of rank-one perturbations of the discrete bilaplacian. arXiv: 1910.01369, pp. 1-22.

5. Albeverio S., Lakaev S., Makarov K., Muminov Z. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Comm. Math. Phys. 262 (2006), p. 91-115.

6. Лакаев С., Халхужаев А., Лакаев Ш. Асимптотика собственного значения двухчастичного оператора Шредингера. ТМФ. 171:3 (2012), С. 438-451.

7. Lakaev S., Kholmatov Sh. Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schroedinger operators on lattices with zero range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011).

8. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbation. J. Math. Anal. Appl. 330:2 (2007), pp. 1152-1168.

9. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О спектре двухчастичного оператора Шредингера на тешетке. ТМФ. 155:2 (2008), 287-300.

10. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. ТМФ. 158:2 (2009), С. 263-276.

11. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. 152:3 (2007), С. 502–517.

12. Абдуллаев Ж., Икромов И., Лакаев С. О вложенных собственных значениях и резонансах обобщенной модели Фридрихса. ТМФ 103(1995), С.54-62.

13. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. Сибирские электронные математические известия. 12 (2015), С. 168-184.

14. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), P. 327-342.

15. Rasulova Z.D. Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice. *J. Pure and App. Math.: Adv. Appl.*, **11**:1 (2014), pp. 37-41.

16. Rasulova Z.D. On the spectrum of a three-particle model operator. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, **25** (2014), pp. 57-61.

17. Расулова З.Д., Хамроева Х.Ю. Числовой образ модели Фридрихса с одномерным возмущением. *Молодой учёный*. **61** (7) (2014), С. 27-29.

18. Расулова З.Д., Хамроева Х.Ю. Number and location of the eigenvalues of a 2x2 operator matrix. *Молодой учёный*. **66** (7) (2014), С. 7-9.

19. Бахронов Б.И., Холмуродов Б.Б. Изучение спектра одной 3x3-операторной матрицы с дискретным спектром. *НТО*, 2-2(77) (2021), 31-34.

20. Бахронов Б.И., Мансуров Т.З. Вычисление существенного спектра обобщенной модели Фридрихса в системе MAPLE. *НТО*, 2-2(77) (2021), 35-38.

21. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. Явный вид резольвенты обобщенной модели Фридрихса. *Наука, техника и образование*, 2-2(77) (2021), 39-43.

22. Бахронов Б.И. Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. *ВНО*, 16-2(94) (2020), 9-13.

23. Хайитова Х.Г. О числе собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72) (2020), 5-8.

24. Тошева Н.А. Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3x3-операторных матриц. *Наука, техника и образование*, 8(72) (2020), 9-12.

25. Бахронов Б.И. О виртуальном уровне модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72) (2020), 13-16.

26. Dilmurodov E. Discrete eigenvalues of a 2x2 operator matrix. *ArXiv:2011.09650* (2020), 1-12.

27. Muminov M., Rasulov T., Tosheva N. Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. *Comm. in Math. Analysis*, 1(11) (2019), 17-37.

28. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices. *Methods Func. Anal. Topology*, 1(25) (2020), 273-281.

29. Rasulov T.H., Tosheva N.A. Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 5(10) (2019), 511-519.

30. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Analysis of the spectrum of a 2x2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 2(11) (2020), 138-144.

31. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 6(10) (2019), 616-622.

32. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205) (2020), 368-390.

33. Dilmurodov E.B. On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1 (2019), 42-46.

34. Dilmurodov E.B., Rasulov T.H. Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation. *European science*, 2(51) (2020), 7-10.

35. Дилмуродов Э.Б. Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15 (2017), 105-106.

36. Дилмуродов Э.Б. Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8 (2016), 7-9.

37. Дилмуродов Э.Б. Спектр квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11 (2018), 1-3.

TABLE OF CONTENTS / ОГЛАВЛЕНИЯ / MUNDARIJA