4-ТАРТИБЛИ МАТРИЦА ХОС СОНЛАРИНИНГ ТАСНИФИ

Ҳакимбой Мирзо ўғли Латипов
Бухоро давлат университети
hakimboylatipov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада $\mathbb{C}^4$ фазода таъсир қилувчи 4-тартибли уч диагоналли эрмит матрицаси қаралади. Унинг хос сонларининг тўлиқ таснифи келтирилган.

Калит сўзлар :уч диагоналли матрица, эрмит матрицаци, хос сон.

DESCRIPTION OF EIGENVALUES OF A MATRIX OF ORDER 4

Hakimboy Mirzo ugli Latipov
Bukhara state university
hakimboylatipov@mail.ru

ABSTRACT

In this paper we consider tridiagonal Hermitian matrix of order 4 acting in the space $\mathbb{C}^4$. Its eigenvalues are described.

Key words: tridiagonal matrix, Hermitian matrix, eigenvalue.

КИРИШ.

Ҳилберт фазосидаги чизиқли операторларнинг юқори тартибли сонли тасвирларини ўрганиш бундай операторлар спектрининг жойлашув ўрнини кўрсатишда муҳим аҳамиятга эга. Матрицанинг блок сонли тасвири унинг барча хос қийматларини ўз ичига олади. Шу сабабли матрицанинг блок сонли тасвирларини ўрганиш операторларнинг спектрал назариясида долзарб масалалардан бири ҳисобланади. [1-10] ишларда операторли матрицаларниг сонли тасвири ва юқори тартибли блок сонли тасвирлари ўрганилган. Ушбу мақолада келтирилган натижалар блок-операторли матрицаларнинг спектрал хоссаларини ўрганишда қўлланилиш мумкин. Блок-операторли матрицаларнинг спектрал хоссалари кўплаб ишларда ўрганилган [11-30].

НАТИЖАЛАР.

Чизиқли операторларнинг спектрал назарясидан бизга яхши маьлумки, тўртта H_1, H_2, H_3, ва H_4 Ҳильберт фазоларининг тўғри йиғиндиси $\mathcal{H}$ да таъсир килувчи ҳар қандай чизиқли чегараланган оператор ҳамиша 4-тартибли блок операторли матрица кўринишида тасвирланади:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

бу ерда $A_{ij}: H_j \to H_i$, $i,j = 1,2,3,4$ чизиқли чегараланган операторлар.

Таърифга кўра $\mathcal{A}$ блок операторли матрица ўз-ўзига қўшма бўлиши учун $A_{ji} = A_{ij}^*$ $i,j = 1,2,3,4$ бўлиши зарур ва етарлидир, яьни

$$\mathcal{A}^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33} & A_{34} \\ A_{14}^* & A_{24}^* & A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix},$$

кўринишдаги блок операторли матрица учун $A_{ii}^* = A_{ii}$, $i = 1,2,3,4$ бўлса, у ҳолда $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ бўлади. S_{H_i} $i = \overline{1,4}$ орқали H_i даги бирлик сферани белгилаймиз ва қуйдаги тўпламни киритамиз:

$$S_{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4} := S_{H_1} \times S_{H_2} \times S_{H_3} \times S_{H_4}$$
$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{H}: ||x_i|| = 1, i = \overline{1,4}\}.$$

Агар $\mathcal{H}$ фазонинг $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ ёйилмаси фиксирланган бўлса, $S_{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4}$ белгилаш ўрнига S^n ёки $S_{\mathcal{H}}$ белгилашдан фойдаланиш мумкин.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4}$ элемент учун 4- тартибли

$$\mathcal{A}_x := \begin{pmatrix} (A_{11}x_1, x_1) & (A_{12}x_2, x_1) & (A_{13}x_3, x_1) & (A_{14}x_4, x_1) \\ (A_{12}^*x_1, x_2) & (A_{22}x_2, x_2) & (A_{23}x_3, x_2) & (A_{24}x_4, x_2) \\ (A_{13}^*x_1, x_3) & (A_{23}^*x_2, x_3) & (A_{33}x_3, x_3) & (A_{34}x_4, x_3) \\ (A_{14}^*x_1, x_4) & (A_{24}^*x_2, x_4) & (A_{34}^*x_3, x_4) & (A_{44}x_4, x_4) \end{pmatrix},$$

матрицани қараймиз. У ҳолда ушбу

$$\mathcal{W}_{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4}(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in S^n} \sigma_p(\mathcal{A}_x)$$

тўпламга $\mathcal{A}$ операторнинг (1) кўринишга мос 4 - тартибли сонли тасвири дейилади. $\mathcal{H}$ фазонииг фиксирланган ёйилмасига нисбатан.

$$\mathcal{W}^4(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4}(\mathcal{A})$$

каби ёзувдан ҳам фойдаланиш мумкин.

Маьлумки, барча $x \in S^n$ лар учун $\sigma_p(\mathcal{A}_x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathcal{A}_x - \lambda E) = 0\}$,

Шу сабабли

$$\mathcal{W}^4(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, x \in S^4, \quad \det(\mathcal{A}_x - \lambda E) = 0\}.$$

Юқоридаги мулоҳазалардан кўриниб турибдики, 4- тартибли $\mathcal{A}$ блок операторли матрицаниг 4- тартибли сонли тасвирини тадқиқ қилишда 4- тартибли сонли матрица нуқтали спектри, яьни хос сонлари тўплами муҳим аҳамиятга эга. Ушбу мақолада 4- тартибли матрицаларнинг муҳим синфларидан бири бўлган уч диогоналли эрмит матрица хос сонлари топилган.

$\mathbb{C}-$ комплекс сонлар тўплами , $\mathbb{C}^4=\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}-$ декарт кўпайтма, $M_4(\mathbb{C})$ эса элементлари комплекс сонлар бўлган барча 4×4 матрицалар тўплами бўлсин. Мақолада ишлатиладиган баъзи таърифларни келтирамиз.

$(\cdot,\cdot)$ орқали $\mathbb{C}^4$ даги одатдаги скаляр кўпайтмани белгилаймиз, яъни

$z^{(j)}=(z_{j1},z_{j2},z_{j3},z_{j4})\in\mathbb{C}^4, j=1,2$ элементлар учун уларнинг скаляр кўпайтмаси $(z^{(1)},z^{(2)})=z_{11}\cdot\overline{z_{21}}+z_{12}\cdot\overline{z_{22}}+z_{13}\cdot\overline{z_{23}}+z_{14}\cdot\overline{z_{24}}$ каби аниқланади.

Агар $\mathcal{A}\in M_4(\mathbb{C})$ матрицада исталган $z\in\mathbb{C}^4$ элемент учун $(\mathcal{A}z,z)\geq 0$ тенгсизлик бажарилса, $\mathcal{A}$ га мусбат аниқланган (ёки қисқача мусбат матрица) дейилади. Агар барча $z\in\mathbb{C}^4$ элементлар учун $(\mathcal{A}z,z)>0$ тенгсизлик бажарилса, $\mathcal{A}\in M_4(\mathbb{C})$ га қатъий мусбат аниқланган матрица (ёки қисқача қатъий мусбат матрица) дейилади.

Агар барча $z\in\mathbb{C}^4$ элементлар учун $(\mathcal{A}z,z)=(z,\mathcal{A}z)$ тенглик бажарилса, $\mathcal{A}\in M_4(\mathbb{C})$ га эрмит (ёки ўз-ўзига қўшма) матрица дейилади.

$\mathbb{C}^4$ фазо 4- тартибли

$$M:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix},$$

матрицани қараймиз, бу ерда $a_{ij}\in\ \mathbb{C}, i,j=1,2,3,4$.

Агар $a_{ii}\in\ \mathbb{R}$,$i,=1,2,3,4$ ва $a_{ji}=\overline{a_{ij}}$, $i<j,\ i,j=i=\overline{1,4}$ бўлса, M эрмит матрица бўлишини осонгина текшириш мумкин.

Агар M матрицада $|i-j|>1$ шартни қаноатлантирувчи i,j лар учун $a_{ij}=0$ бўлса, M га уч диоганалли матрица дейилади.

Эрмит матрицаларнинг айрим характеристик хоссаларини келтирамиз

1) M мусбат матрица бўлиши учун у эрмит матрица бўлиб, барча хос сонлари номанфий бўлиши зарур ва етарлидир. M қатъий мусбат бўлиши учун эса барча хос сонлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

2) M мусбат матрица бўлиши учун у эрмит матрица бўлиб, барча бош минорлари номанфий бўлиши зарур ва етарлидир. $\mathcal{A}$ қатий мусбат бўлиши учун эса барча бош минорлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

Ушбу мақолада $\mathbb{C}^4$ фазода

$$M:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} & 0\\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & a_{44}\end{pmatrix},$$

каби аниқланган 4- тартибли уч диоганалли матрицани қараймиз. Бунда $a_{ii}\in\mathbb{R}$,$i,=\overline{1,4}$ ва $a_{ij}\in\ \mathbb{C}, i<j,\ i,j=\overline{1,4}$

Эрмит матрица таърифига биноан бундай кўринишдаги М матрица эрмит матрица бўлишини текшириш мумкин . Шу сабабли унинг барча хос сонлари ҳақиқий бўлади. Чизиқли алгебра курсидан бизга яхши маълумки, М матрицаниинг хос сонлари $det(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{E})=0$ характеристик тенглама ечимлари сифатида аниқланади , бу ерда Е орқали $\mathbb{C}^4$ даги бирлик матрица белгиланган.

Муҳим хусусий ҳолларни қараймиз.

1-ҳол. Фараз қилайлик, $a_{23}=0$ бўлсин, бу ҳолда М матрица

$$\mathrm{M}:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

кўринишида бўлиб, у $\mathbb{C}^4=\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2$ ёйилмага нисбатан

$$\mathrm{M}:=\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_{12} \end{pmatrix},$$

диагонал блок матрица каби тасвирланади. Бунда M_{ij}, $i,j=1,2$ матрицалар

$$\mathrm{M}_{11}:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} \end{pmatrix},\ \mathrm{M}_{12}:=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ \bar{a}_{34} & a_{44} \end{pmatrix};$$

каби аниқланган 2- тартибли эрмит матрицалар. Кўриниб турибдики

$$\sigma(\mathrm{M})=\sigma(\mathrm{M}_{11})\cup\sigma(\mathrm{M}_{12}). \qquad (2)$$

Одий ҳисоблашлар ёрдамида

$$\sigma(\mathrm{M}_{11})=\{\lambda_{11},\lambda_{12}\},\sigma(\mathrm{M}_{12})=\{\lambda_{13},\lambda_{14}\}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу ерда λ_{11}, λ_{12}, λ_{13}, λ_{14} хос қийматлар қуйдагича ҳисобланади:

$$\sigma(\mathrm{M}_{11})=\{\lambda_{11},\lambda_{12};\ det(\mathrm{M}_{11}-\lambda E_2)=0\};$$
$$\sigma(\mathrm{M}_{12})=\{\lambda_{13},\lambda_{14};\ det(\mathrm{M}_{12}-\lambda E_2)=0\};$$

E_2 –2- тартибли бирлик матрица.

$$det(\mathrm{M}_{11}-\lambda E_2)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

тенгламанинг ечимлари қуйдагича булади

$$\lambda_{11}:=\frac{(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-|a_{12}|^2)}}{2};$$
$$\lambda_{12}:=\frac{(a_{11}+a_{22})-\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-|a_{12}|^2)}}{2}.$$

Худди шу каби M_{12} матрица хос қийматларини топиш учун

$$det(\mathrm{M}_{12}-\lambda E_2)=\begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{34} \\ \bar{a}_{34} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг ечимлари қуйдагича булади:

$$\lambda_{13}:=\frac{(a_{33}+a_{44})+\sqrt{(a_{33}+a_{44})^2-4(a_{33}a_{44}-|a_{34}|^2)}}{2};$$

$$\lambda_{14} := \frac{(a_{33}+a_{44}) - \sqrt{(a_{33}+a_{44})^2 - 4(a_{33}a_{44} - |a_{34}|^2)}}{2}.$$

У ҳолда (2) муносабатдан

$$\sigma(\mathrm{M}) = \{\lambda_{11}; \lambda_{12}; \lambda_{13}; \lambda_{14}\}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

2-ҳол. Фараз қилайлик $a_{12} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда M матрица

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

кўринишида бўлиб, $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^3$ ёйилмага нисбатан

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_{33} \end{pmatrix},$$

диагонал блок матрица каби тасвирланади. Бунда

$$\mathrm{M}_{11} := (a_{11}),\ \mathrm{M}_{33} := \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ \bar{a}_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & \bar{a}_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

У ҳолда M матрица спектри учун

$$\sigma(\mathrm{M}) = \{a_{11}\} \cup \sigma(\mathrm{M}_{33})$$

тенглик ўринли бўлади.

Одий ҳисоблашлар ёрдамида $\sigma(\mathrm{M}_{33}) = \{\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}\}$ тенгликни ҳосил

Бу ерда $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$, сонлари $det(\mathrm{M}_{33} - \lambda E_3) = 0$ тенгламанинг ечими, E_3 —3- тартибли бирлик матрица

$$det(\mathrm{M}_{33} - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & 0 \\ \bar{a}_{23} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Бундан қуйдаги кубик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\lambda^3 - \lambda^2(a_{22} + a_{33} + a_{44}) + \lambda(a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} + a_{22}a_{33} - |a_{34}|^2 - |a_{23}|^2) + a_{22}|a_{34}|^2 + a_{44}|a_{23}|^2 - a_{22}a_{33}a_{44} = 0.$$

Бу тенгламада

$$a_2 := (a_{22} + a_{33} + a_{44}), \qquad b_2 := (a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} + a_{22}a_{33} - |a_{34}|^2 - |a_{23}|^2),$$
$$c_2 := a_{22}|a_{34}|^2 + a_{44}|a_{23}|^2 - a_{22}a_{33}a_{44}$$

каби белгилашларни киритиб

$$\lambda^3 - a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2 = 0$$

тенгламага эга бўламиз

$\lambda = \mu + \frac{a_2}{3}$ алмаштириш ёрдамида

$$\mu^3 + p\mu + q = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$p := \frac{-a_2{}^2}{3} + b_2, \qquad q := \frac{a_2 b_2}{3} - \frac{2a_2{}^3}{27} + c_2.$$

Ҳосил бўлган, кубик тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$\lambda_{2k} := \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3}, \qquad k = 1,2,3;$$

$$\varphi := \arccos\left(\frac{-3q}{2p}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right).$$

3-ҳол. Фараз қилайлик, $a_{34} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда M матрица

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

кўринишида бўлиб, у $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^1$ ёйилмага нисбатан

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{33} & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_{11} \end{pmatrix}$$

диагонал блок матрица каби тасвирланади. Бунда

$$\mathrm{M}_{11} := (a_{44}),\ \ \mathrm{M}_{33} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

У ҳолда M матрица спектри учун

$$\sigma(\mathrm{M}) = \{a_{44}\} \cup \sigma(\mathrm{M}_{33})$$

тенглик ўринли бўлади. M_{33} матрица спектри учун

$$\sigma(\mathrm{M}_{33}) = \{\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}\}$$

муносабат ўринли. Бу ерда $\lambda_{31}, \lambda_{32},\ \lambda_{33},$ хос қийматлар қуйдагича ҳисобланади

$$\sigma(\mathrm{M}_{33}) = \{\lambda_{31}, \lambda_{32},\ \lambda_{33};\ det(\mathrm{M}_{33} - \lambda E_3) = 0\};$$

$E_3 -$ матрицамиз 3- тартибли бирлик матрица

$$det(\mathrm{M}_{33} - \lambda E_3) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^3 - \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{22}a_{11} - |a_{12}|^2 - |a_{23}|^2) + a_{11}|a_{23}|^2 + a_{33}|a_{12}|^2 - a_{22}a_{33}a_{11} = 0$$

кубик тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламада қуйдаги алмаштиришларни киритиб соддароқ кўринишга олиб келамиз:

$$a_3 = (a_{11} + a_{22} + a_{33}), b_3 = (a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{22}a_{11} - |a_{12}|^2 - |a_{23}|^2),$$
$$c_3 = a_{11}|a_{23}|^2 + a_{33}|a_{12}|^2 - a_{22}a_{33}a_{11}.$$

Натижада тенгламамиз

$$\lambda^3 - a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3 = 0$$

кўринишга келади.

$\lambda = \mu + \frac{a_3}{3}$ алмаштириш ёрдамида $\mu^3 + p\mu + q = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу ерда

$$p:=\frac{-{a_3}^2}{3}+b_3,\qquad q:=\frac{a_3 b_3}{3}-\frac{2{a_3}^3}{27}+c_3.$$

Бу тенгламанинг ечими

$$\lambda_{3k}:=\frac{a_3}{3}+2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3},\qquad k=1,2,3;$$

$$\varphi:=\arccos\left(\frac{-3q}{2p}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

кўринишда бўлади.

4-ҳол. Фараз қилайлик $a_{ii}=0;\ i=1,2,3,4$ бўлсин. Бу ҳолда $\mathrm{M}:\mathbb{C}^4\rightarrow\mathbb{C}^4$ матрица

$$\mathrm{M}:=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & 0 & a_{23} & 0\\ 0 & \bar{a}_{23} & 0 & a_{34}\\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & 0\end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади .

Агар $\mathrm{a}_{ii}\in\mathbb{R}$, $\mathrm{a}_{ij}\in\mathbb{C}, i\neq j$, бўлса, у ҳолда M —эрмит (ўз - ўзига қўшма) матрица бўлиб, унинг спектри учун $\sigma(\mathrm{M})\subset\mathbb{R}$ муносабат ўринли бўлади. Яъни,

$$\sigma(\mathrm{M})=\{\lambda_{41},\ \lambda_{42},\ \lambda_{43},\ \lambda_{44}\in\mathbb{R}:\ det(\mathrm{M}-\lambda E_4)=0\};$$

E_4 — 4 - тартибли бирлик матрица.

$$det(\mathrm{M}-\lambda E_4)=\begin{vmatrix}-\lambda & a_{12} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & -\lambda & a_{23} & 0\\ 0 & \bar{a}_{23} & -\lambda & a_{34}\\ 0 & 0 & \bar{a}_{34} & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

тенглама

$$\lambda^4-\lambda^2(|a_{12}|^2+|a_{23}|^2+|a_{34}|^2)+|a_{12}|^2|a_{34}|^2=0$$

кўринишидаги 4- даражали тенгламага келади.

Бу тенгламада

$$|a_{12}|^2+|a_{23}|^2+|a_{34}|^2=b,\ \ |a_{12}|^2|a_{34}|^2=c.$$

каби белгилашларни киритиб, $\lambda^2=t$ десак, у ҳолда

$$t^2-bt+c=0$$

квадрат тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг ечимлари

$$t_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4*c}}{2}$$

кўринишда бўлади .

$\lambda^2=t_1$ ва $\lambda^2=t_2$ тенгламалардан мосравишда

$$\lambda_{41} = \sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}},\ \lambda_{42} = \sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}};$$

$$\lambda_{43} = -\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}}, \lambda_{44} = -\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}}$$

ечимларни оламиз.

М матриcанинг $\lambda_{41}, \lambda_{42}, \lambda_{43}$ ва λ_{44} хос қийматлар учун

$$\lambda_{41} \geq \lambda_{42} \geq \lambda_{43} \geq \lambda_{44}$$

муносабат ўринлибўлади.

REFERENCES

1. Латипов Х.М. (2021). О собственных числах трехдиагональной матрицы порядка 4. *Academy,* 3(66), 4-7.
2. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 105-106.
3. Дилмуродов Э.Б. (2016). Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, 7-9.
4. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2015). Связь между числовым образом и спектром модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Молодой ученый*, 9, 20-23.
5. Дилмуродов Э.Б. (2018). Спектр и квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11, 1-3.
6. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2014). Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. *Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 35 (2), 50–63.
7. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. *European science*, 2-2(51), 15-18.
8. Rasulov T.H., Bahronov B.I. (2019). Description of the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 9(6), 15-17.
9. Rasulov T.H., Bahronov B.I. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model: 1D case with rank two perturbation. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 4, 21-28.
10. Rasulov T.Kh., Dilmurodov E.B. (2015). Estimates for quadratic numerical range of a operator matrix. *Uzbek Math. Zh.*, 1, 64-74.
11. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2020). Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices. *Methods Func. Anal. Topology*, 1(25), 273-281.
12. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2019). Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 6(10), 616-622.

13. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), 368-390.
14. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, 42-46.
15. Тошева Н.А. (2020). Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3x3-операторных матриц. *Наука, техника и образование*, 8(72), 9-12.
16. Хайитова Х.Г. (2020). О числе собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72), 5-8.
17. Исмоилова Д.Э. (2021). О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированного с обобщенной модели Фридрихса. *НТО*, 1(60), 21-24.
18. Умиркулова Г.Х. (2021). Существенный и дискретный спектры семейства моделей Фридрихса. *Наука и образование сегодня*, 1(60), 17-20.
19. Хайитова Х.Г. (2020). О числе собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72), 5-8.
20. Бахронов Б.И., Холмуродов Б.Б. (2021). Изучение спектра одной 3x3-операторной матрицы с дискретным спектром. *НТО*, 2-2(77), 31-34.
21. Хайитова Х.Г., Рахматова Д.С. (2021). Определитель Фредгольма оператора билапласиан с трехмерным возмущением на решетке. *Проблемы науки*. 63:4, 29-32.
22. Рашидов А.Ш., Халлокова О.О. (2015) Пороговое собственное значение модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 95:15, 1-3.
23. Рашидов А.Ш., Мирзаев Э.Э. (2016). Обобщенная модель Фридрихса и ее собственное пороговое значение. *Молодой ученый*, 2, 23-25.
24. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. (2021). Ikki kanalli molekulyar-rezonans modeli xos qiymatlarining soni va joylashuv o'rni. *Scientific progress,* 1(2), 61-69.
25. Muminov M., Rasulov T., Tosheva N. (2019). Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. *Comm. in Math. Analysis*, 1(11), 17-37.
26. Тошева Н.А. (2020). Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3x3-операторных матриц. *Наука, техника и образование*, 8(72), 9-12.
27. Хайитова Х., Ибодова С. (2021). Алгоритм исследования собственных значений модели Фридрихса. *Наука, техника и образование*, 2-2(77), 48-52.
28. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. *Молодой учёный*, 9, 17-20.
29. Бахронов Б.И. (2020). Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. *ВНО*, 16-2(94), 9-13.
30. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. (2015). Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. *Сибирские электронные математические известия*, 12, 168-184.