

TRIGONOMETRIK TENGLAMALARNI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH USULLARIDAN FOYDALANIB YECHISH

Ferangis Murod qizi Jo'raqulova

Buxoro davlat universiteti

ANNOTATSIYA

Akademik litseylarda Matematika fanini o'qitishda ta'lim maqsadiga erishish jarayonining umumiy mazmuni, ya'ni, avvaldan loyihalashtirilgan ta'lim jarayonini yaxlit tizim asosida, bosqichma-bosqich amalga oshirish, aniq maqsadga erishish yo'lida muayyan metod, usul va vositalar tizimini ishlab chiqish, ulardan samarali, unumli foydalanish hamda ta'lim jarayonini yuqori darajada boshqarishni ifodalaydi. Ushbu maqolada "Trigonometrik tenglamalarni trigonometrik funksiyalarni integrallash usullaridan foydalanib yechish" mavzusini noan'anaviy dars tizimini misol qilib olingan.

Kalit so'zlar: Trigonometrik tenglama, trigonometrik funksiyalarni integrallash, ratsional funksiya.

SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS METHODS OF INTEGRATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

ABSTRACT

The general content of the process of achieving educational goals in teaching mathematics in academic lyceums, that is, the implementation of a pre-designed educational process based on an integrated system, the step-by-step development of specific methods, techniques and tools, their effective and efficient use, as well as a high level of management of the educational process. This article provides an example of an unconventional lesson system on the topic "Solving trigonometric equations using methods of integrating trigonometric functions."

Key words: Trigonometric equation, integration of trigonometric functions, rational function.

Hozirgi kunda amalga oshirilayotgan ta'lim sohasidagi islohotlar, tez sur'atda rivojlanayotgan fan-texnika talablari ta'lim usuli bilan jamiyatning raqobatbardosh yuqori malakali kadrlarni tayyorlashga, barkamol avlodni shakllantirishga bo'lgan ehtiyoji tafovudni vujudga keltirdi. Bunday malakali kadrlarni ta'lim jarayoniga yangi pedagogik texnologiyalarni qo'llash orqali tayyorlash mumkin [1-30].

Akademik litseylarda trigonometrik tenglamalarni yechish talabalar uchun ancha qiyinchilik tug'diradi.

Umumiy holda $R(\sin x, \cos x) = 0$ tenglamani qaraymiz.

Bu yerda $R(u, v)$ u va v o'zgaruvchilarga nisbatan ratsional funksiya quyidagilarni taklif etamiz.

I. Agar butun yoki ratsional $R(u, v)$ funksiya argumentlaridan biri, masalan u ning ishorasini o'zgartirganda, funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, ya'ni

$$R(-u, v) = R(u, v)$$

bo'lsa, bu holda uni u ning faqat juft darajasiga ega bo'ladigan

$$R(u, v) = R_1(u^2, v)$$

shaklga keltiramiz. Shuning uchun bu tenglamada $\cos x = t$ almashtirish tavsiya etamiz.

1-misol. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$ tenglamani yeching.

Yechish: $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$ Bu yerda $R(u, v) = 5(1 + v) - 2 - u^4 + v^4$

$R(-u, v) = R(u, v)$, $\cos x = t$, $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 = (1 - t^2)^2$ bo'ladi. Demak,

$$5 + 5t - 3 + 2t^2 = 0$$

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = -\frac{1}{2}; \quad t_2 = -2$$

$$1) \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) $\cos x = -2$ tenglama yechimga ega emas.

2-misol. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ bo'lgani uchun

$$R(u, v) = 8v^4 - 8v^2 + 1 + 2u^2, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad \cos x = t$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$8t^4 - 10t^2 + 3 = 0, \quad t^2 = 4$$

$$8u^2 - 10u + 3 = 0$$

$$u_1 = \frac{3}{4}; \quad u_2 = \frac{1}{2};$$

$$1) t^2 = u_1$$

$$t^2 = \frac{3}{4}$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) t^2 = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3- misol. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $R(u, v) = u^2 + v + 1, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad \cos x = t$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$1 - t^2 + t + 1 = 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2; \quad t_2 = -1$$

1) $\cos x = 2$ tenglama yechimga ega emas.

2) $\cos x = -1, \quad x = -\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

4- misol. $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $R(u, v) = 2u^2 + v - 1, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad \cos x = t$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$2 - 2t^2 + t - 1 = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{1}{2}$$

1) $\cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

II. Agar butun yoki ratsional $R(u, v)$ argumentlaridan biri, masalan, v ning ishorasini o'zgartirganda, funksiya o'zgartirganda, funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, ya'ni

$$R(-u, v) = R(u, v)$$

bo'lsa bu holda uni v ning faqat juft darajasiga ega bo'ladigan

$$R(u, v) = R_1(u, v^2)$$

shaklga keltirish mumkin. Shuning uchun bu tenglamada $t = \sin x$ almashtirishni bajarishni tavsiya etamiz.

5- misol. $\cos^4 x + 3\sin x - \sin^4 x - 2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $R(u, v) = v^4 + 3u - u^4 - 2, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad t = \sin x$

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = (1 - t^2)^2$$

$$1 - 2t^2 + t^4 + 3t - t^4 - 2 = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

1) $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$2) \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6- misol. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $R(u, v) = 2v^2 + 5u - 4, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad t = \sin x$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

$$2 - 2t^2 + 5t - 4 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = 2; \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

1) $\sin x = 2$ tenglama yechimga ega emas.

$$2) \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

7- misol. $\cos^4 x - \sin^4 x - \sin x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $R(u, v) = v^4 - u^4 - u, \quad R(-u, v) = R(u, v), \quad t = \sin x$

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = (1 - t^2)^2$$

$$(1 - t^2)^2 - t^4 - t = 0$$

$$1 - 2t^2 + t^4 - t^4 - t = 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}; \quad t_2 = -1$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

III. Agar $R(\sin x, \cos x) = 0$ tenglamada

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \quad (1)$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \quad (2)$$

(1) va (2) almashtirishlar bajarilib, $tg \frac{x}{2} = t$ o'rniga qo'yish tatbiq etilsa, chap tomoni t ga nisbatan ratsional funksiya bo'lgan tenglama hosil bo'ladi.

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 0 \quad (3)$$

(3) tenglama ildizlarini birma - bir $tg \frac{x}{2} = t$ ga qo'yib x ning izlanayotgan qiymatlarni topiladi.

8- misol. $3\sin x - \cos x = 3$ tenglamani yeching.

Yechish. (1) va (2) formulalardan foydalanib, $\sin x$ va $\cos x$ ni $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ orqali ifodalaymiz. So'ng $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ almashtirish kiritamiz. Natijada

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

tenglik hosil bo'ladi.

$$3 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 3$$

$$6t - 1 + t^2 = 3 + 3t^2$$

$$2t^2 - 6t + 4 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

9- misol. $2\sin x + \cos x = 2$ tenglamani yeching.

$$\textbf{Yechish.} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$2 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$$

$$4t + 1 - t^2 = 2 + 2t^2$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{3}$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

10- misol. $2\sin z - \cos z = \frac{2}{5}$ tenglamani yeching.

$$\textbf{Yechish.} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{5}$$

$$20t + 5t^2 - 5 = 2 + 2t^2$$

$$3t^2 - 20t - 7 = 0$$

$$t_2 = -7 \quad t_1 = \frac{1}{3}$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -7, \quad \frac{x}{2} = -\operatorname{arctg} 7 + \pi k, \quad x = -2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

IV. $R(-u, v) = R(u, v)$ bo'lsa $t = \operatorname{tg} x$ deb belgilash kiritamiz.

11- misol. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $R(u, v) = 2u^2 - 5uv + 3v^2, \quad t = \operatorname{tg} x$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

$$1) \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad x = \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

12-misol. $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$ tenglamani yeching.

Yechish. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

$$R(u, v) = 2u^2 - uv - v^2, \quad t = \operatorname{tg} x$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$1) \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pi k - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$$

$$x = -2\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bu usullar orqali tenglamalarni akademik litsey talabalari uchun bir qancha qulayliklar tug'diradi.

Akademik litsey ta'limning yana bir vazifasi o'quvchilarda faqatgina tushunchalar berib bormasdan ularda masalalar yechish yordamida mustaqil mantiqiy fikrlash kabi erkin matematik mushohada yurita olish, ma'lum qarorlar qabul qila olish kabi xislatlarni shakllantirishdan iborat.

REFERENCES

1. Умарова У.У. (2020). Использование педагогических технологий в дистанционном обучении moodle. Проблемы педагогики **51**:6, С. 31-34
2. Умарова У.У. (2020). Применение триз технологии к теме «Нормальные формы для формул алгебры высказываний». Наука, техника и образование. **73**:9, С. 32-35.
3. Умарова У.У. (2020). Роль современных интерактивных методов в изучении темы «Множества и операции над ними», Вестник науки и образования. **94**:16, часть 2, С. 21-24.
4. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. (2020). Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. Academy, **55**:4, pp. 65-68.
5. Расулов Х.Р., Джўракулова Ф.М. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Scientific progress, 2:1, С. 455-462.
6. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. Academy, **55**:4, pp. 68-71.
7. Бахронов Б.И. (2021). Функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги мавзусини ўқитишга доир баъзи методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 1355-1363 б.
8. Марданова Ф.Я. (2020). Использование научного наследия великих предков на уроках математики. Проблемы педагогики, **51**:6, С. 40-43.
9. Расулов Т.Х., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар, Scientific progress, 2:1, 559-567 б.
10. Тошева Н.А. (2021). Использование метода мозгового штурма на уроке комплексного анализа и его преимущества. Проблемы педагогики, **53**:2, С. 31-34.
11. Марданова Ф.Я. (2021). Математика фани олимпиадаларида тайёрлаш бўйича услубий кўрсатмалар. Science and education, 2(9), С. 297-308.
12. Расулов Т.Х. (2020). Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения, Наука, техника и образование, **73**:9, С. 74-76.
13. Дилмуродов Э.Б. (2016). Формула для числового образа трехдиагональной матрицы размера 3×3 , Молодой ученый, 10, С. 3-5.
14. Латипов Х.М. (2021). О собственных числах трехдиагональной матрицы порядка 4. Academy, 3 (66), С. 4-8.
15. Бобоева М.Н. (2021). “Номанфий бутун сонлар тўплами” мавзусини ўқитишда айрим интерфаол методлардан фойдаланиш. Scientific progress, 2:1, pp. 53-60.
16. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. Молодой учёный, 9, С. 17-20.
17. Тошева Н.А. (2020). Технология обучения теме метрического пространства методом «Инсерт». Проблемы педагогики, 6 (51), С. 43-44
18. Латипов Х.М. (2021). 4-тартибли матрица хос сонларининг таснифи. Scientific progress, 1(2), 1380-1388 б.

19. Бобоева М.Н. (2021). Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел» кластерным методом. Проблемы педагогики, 53:2, С. 23-26.
20. Ахмедов О.С. (2021). Актуальные задачи в предметной подготовке учителя математики. Scientific progress, 2:4, р. 516-522.
21. Хайитова Х.Г. (2021). Преимущества использования метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ». Проблемы педагогики, 53:2, С. 35-38.
22. Марданова Ф.Я. (2021). Нестандартные методы обучения высшей математике. Проблемы педагогики, 53:2, С. 19-22.
23. Дилмуродов Э.Б. (2016). Числовой образ матрицы размера 3×3 в частных случаях, Молодой ученый, 10, С. 5-7.
24. Ахмедов О.С. (2021). Основные требования к языку учителя математики. Наука, техника и образование, 2-2:77, С. 74-75.
25. Умиркулова Г.Х. (2020). Использование MathCad при обучении теме «Квадратичные функции». Проблемы педагогики. 51:6, С. 93-95.
26. Ахмедов О.С. (2021). Необходимость изучения математики и польза этого изучения. Scientific progress, 2:2, р. 538-544.
27. Бобоева М.Н. (2020). Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными. Наука, техника и образование, 73:9, С. 48-51.
28. Akhmedov O.S. (2020). Implementing «Venn diagram method» in mathematics lessons. Наука, техника и образование, 8:72, С. 40-43.
29. Umirqulova G.H. (2021). Sferik koordinatalar sistemasining ba'zi tadbiqlari. Scientific progress. 8:2, pp. 8-18.
30. Хайитова Х.Г. (2020). Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ». Вестник науки и образования, 16 2 (94). С. 25-28.