ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2022-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2022

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2022, MAXSUS SON

Jurnal Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari boʻyicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruruiy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

KARIMOV Feruz Raimovich

Buxoro davlat universiteti "Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari" kafedrasi o'qituvchisi

QUVVATOV Behruzjon Ulug'bek o'g'li

Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika yo'nalishi magistranti

FAYZIYEV Tohir Qahramon o'g'li

Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika yo'nalishi magistranti

INTERPOLYATSION KVADRATUR FORMULALAR UCHUN ALGORITM VA DASTURLAR

Ushbu maqolada interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar tuzish o'rganildi. Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar metodlari o'rganib chiqildi va shular asosida interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar tuzilgan.

Kalit so'zlar: *gauss, integral, interpolyatsiya, kvadratur, ortogonal, funksiya, kvadratur formula.*

АЛГОРИТМ И ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

В статье изучены алгоритмы и программы интерполяции квадратурных формул. Исследованы алгоритмические и программные методы интерполяционных квадратурных формул, на их основе созданы алгоритмы и программы интерполяционных квадратурных формул.

Ключевые слова: *гаусс, интеграл, интерполяция, квадратура, ортогональная, функция, квадратурная формула.*

ALGORITHM AND APPLICATIONS FOR INTERPOLATION QUADRATIVE FORMULA

Algorithms and programs for interpolation quadrature formulas were studied in this article. Algorithm and program methods for interpolation quadrature formulas were studied, and algorithms and programs for interpolation quadrature formulas were created based on them.

Key words: *gauss, integral, interpolation, quadrature, orthogonal, function, quadrature formula.*

Kirish. Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g'oyani kiritdiki, u amaliy analizning tub sohalari rivojlanishi uchun asos bo'lib qoldi. Faraz qilaylik, ba'zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o'zgaruvchining uzliksiz oraliqni har bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda yotuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo'lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo'yamiz.

Oraliqni

$$-1 \le x \le 1 \qquad (1)$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo`lsin. Umuman olganda $n$ ning katta bo`lishidan qat'iy nazar,

$$y_1 = f(x_1)\ ,\ y_2 = f(x_2), \ldots,\ y_n = f(x_n) \qquad (2)$$

ordinatalar $f(x)$ funksiyani aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyani oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$ darajali $P_{n-1}(x)$ ko'phad topishimiz mumkinki, u ham x_n nuqtalarda y_n qiymatga ega bo'ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taqsimlangan qilib taqsimlanadi[1].

Gaussning g'oyasi shundan iboratki, nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan o'shanday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki, natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo'lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko'phadlar bilan teng taqsimli interpolyatsiyalashda xavfdan ham xolidir.

Qaysikim bu xavf u davrda ham ma’lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpolyatsiyalash nuqtalari tamoman erkin bo‘lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko`phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpolyatsion formulasi sifatida ma’lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n). \qquad (3)$$

fundamental ko‘phadni qurishga va uni ketma-ket har bir n ta ikki hadliga bo‘lishga asoslangandir.
Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo‘lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F_n^{'}(x_i)(x - x_i)} \quad (i=1,2,…,n), \qquad (4)$$

Ko‘phadni oldik. $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} –**Kroneker** simvolini kiritsak, ya’ni

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, агар \ \ i = k \\ 0, агар \ \ i \neq k \end{cases}, \qquad (5)$$

Bu holda qurish mumkinki,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + ... + y_n Q_n(x), \qquad (6)$$

Ko‘phad qo‘yilgan shartni qanoatlantiradi: ya’ni $x = x_k$ nuqtalarda y $y = y_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ qiymatlarni qabul qiladi.

$P_{n-1}(x)$ - ko‘phadning yagonaligi shu dalildan kelib chiqadiki , $P_{n-1}(x)$ ko`phad bilan ikkinchi gipotetik $\overline{P}_{n-1}(x)$ ko‘phad o‘rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi. Lekin $P_{n-1}(x) - \overline{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n-1$ darajali ko‘phad bo‘lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n-1$ tadan tub ildizga ega bo‘lmaydi: bu esa $P_{n-1}(x) = \overline{P}_{n-1}(x)$ ekanligini bildiradi.

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ funksiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\overline{A} = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \int_{-1}^{1} Q_k(x)dx, \qquad (7)$$

hisoblasak, amaliyotda noma’lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo‘lamiz. Berilgan ayrim taqsimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko‘phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^{1} Q_k(x)dx = \omega_k, \qquad (8)$$

aniq integrallar ba’zi bir sonli qiymatlarga ega bo‘ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziqtiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog‘liq emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o‘zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo‘shimcha nuqtani qo‘shamiz. Qo‘shimcha $x - x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo‘shimcha ko‘phadni hosil qilamiz. (4) ta’rifdan

$Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko‘phad $F_n(x)$ ko‘phadga proporsionaldir, qaysikim $(x-x_{n+1})$ yangi ko‘paytuvchi qisqarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko‘paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko‘paytuvchi

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)dx, \qquad (9)$$

aniq integralga proporsionaldir. Shunga o‘xshash, agar yangi

$$x = x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \qquad (10)$$

nuqtalarni ularni ordinatalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots, \omega_{n+m}$ vaznlar

$$\omega_{n+i} = \int_{-1}^{1} F_n(x)\, \xi_{m-1}^{i}(x)\, dx \qquad (11)$$

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^{i}(x)$ ayrim $m-1$ darajali ko‘phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko`phad, $x^0, x^1, \quad x^2, ..., x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)dx = 0, ..., \int_{-1}^{1} F_n(x)\, x^{m-1}\, dx = 0, \qquad (12)$$

haqiqatdan ham bizning talablarimiz $m = n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0 \qquad (\alpha = 0,1,2,\ldots,n-1), \qquad (13)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo‘shsak ham baribir hech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o‘zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko‘rib, haqiqatdan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinatalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima tushmaydi.

Bu jarayonda biz $\overline{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k\ \omega_k$ yig‘indiga n ta hadni tejaymiz. Bu fikrlashlar yuqoridagi mulohazalar uchun yetarlicha emasdir. To‘liqroq bo‘lishi uchun quyidagi mulohazani tavsiya etamiz.

Haqiqatdan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ $(m = 1,2,\ldots,n)$ yangi ko‘phadlarni qo‘shadi, hatto oldingi $Q_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ko‘phadlar ham o‘zgaradi: har bir yangi x_{n+m} nuqta $Q_i(x)$ ga qo‘shimcha $\dfrac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$ ko‘paytuvchini kiritadi[2].

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko‘phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x)\ \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}, \qquad (14)$$

ko`phadga aylantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarning haqiqat ekanligi shakli o‘zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko‘phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

$$1^0.\quad Q_i^*(x)=\delta_{ik}(k=1,2,...,n).$$

$$2^0.\quad \int_{-1}^{1}Q_i^*(x)\,dx=\int_{-1}^{1}Q_i\,(x)\,dx=\omega_i$$

endi bu xossalarni isbotini ko‘ramiz.

Birinchi xossa bevosita (α) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x-x_{n+k}}{x_i-x_{n+k}}=1+\frac{x-x_i}{x_i-x_{n+k}}$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (α) tenglikning o‘ng tomonidagi qo‘shimcha ko‘paytuvchilarni ko‘paytirishni $1-\xi_{m-1}^i(x)$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)-\quad m-1$ darajali ko‘phad. (13) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko`rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o‘zgartirmaydi.

Muhimrog‘i shundan iboratki, bizlar qo‘shimcha $y_{n+1},y_{n+2},...,y_{2n}$ ordinatalarni bilishimiz shart emas.

$$\overline{A}=\sum_{k=1}^{n}y_k\ \omega_k\ ,$$

yig‘indi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o‘zgarmaydi.

(13) - tipdagi integral shart ortogonallash sharti deyiladi. Biz ko‘rsatamizki, $F_n(x)$ ko‘phad $1,x^1,\quad x^2,...,x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko‘rib chiqqanda o‘rganganmiz.

Biz Yakobi ko‘phadlarini tekshirib chiqdikki, u (2.13) shart ma’nosida ko‘phad darajasidan past bo‘lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalariga egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko‘paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda “Lagranj ko‘phadlari” da bu vazn ko‘paytuvchi birga teng bo‘ladi va shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lagranj ko`phadlari bilan mos qo‘yishni talab qiladi: bu ko‘phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo‘ladi. ω_i koeffisentlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (2.8) formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma’lumki, $[a,b]$ da n nuqtali interpolyatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x)\,f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k\,f(x_k)\,, \tag{15}$$

tugun nuqtalari $[a,b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat’iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko‘phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a,b]$ oraliq va $\rho(x)\equiv1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. $x_1,x_2,...,x_n$ tugunlar shunday tanlanganki, (15) formula mumkin qadar darajasi eng yuqori bo‘lgan ko‘phadlarni aniq integrallasin. (15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo‘li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni kutish mumkin. Haqiqatdan ham $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (15) formulaning darajasini $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko‘phadlar uchun aniq bo‘lishga erishishni Gauss ko‘rsatdi. Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi [3].

Qulaylik uchun x_n tugunlar o‘rnida $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ ko‘phad bilan ish ko‘ramiz. Agar x_k lar ma’lum bo‘lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma’lum bo‘ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak , u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a,b]$ oraliqda yotishini ko‘rsatishimiz shart.

Teorema. (1) kvadratur formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir: 1) u interpolyatsion va 2) $\omega_n(x)$ ko‘phad $[a,b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha $Q(x)$ ko‘phadlarga ortogonal bo‘lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = 0, \qquad (16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (15) formula darajasi $2n-1$ dan oshmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolyatsiondir. Endi darajasi n dan kichik bo‘lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko‘phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko‘rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan ko‘phad. Shuning uchun ham uni (1) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_k(x_k)Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0 \quad (k=\overline{1,n})$ ni hisobga olsak (16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko‘phad va (15) formula interpolyatsiondir[4].

Yetarliligi. Faraz qilaylik (1) formula interpolyatsion va $\omega_n(x)$ ko‘phad darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha ko‘phadlarga $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo‘lsin. Endi (15) formula darajasi 2n-1 dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko‘phadlarni aniq integrallashini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham $f(x)$ ni $\omega_n(x)$ ga bo‘lib,

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x) \qquad (17)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $Q(x)\ va\ r(x)$ larni darajalari n dan kichik. Bu tengliklarning har ikkala tomonini $\rho(x)$ ga ko‘paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx + \int_a^b r(x)\rho(x)dx$$

Teorema shartiga ko‘ra o‘ng tomondagi birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral esa $\int_a^b r(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k)$. Chunki $r(x)$ daarajasi n dan kichik ko‘phad va (15) formula interpolyatsiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k),$$

lekin (17) ga ko‘ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo'ldi.

$\omega_n(x)$ ko'phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a,b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlar bilan ortogonal va bosh koeffisenti birga teng bo'lishi uchun ish natijalariga ko'ra, bunday $\omega_n(x)$ ko'phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a,b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a,b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda har bir $n=1,2,....$ uchun $2n-1$ darajali ko'phadlarni aniq integrallaydigan yagona kvadratur formula mavjud.

<u>Teorema-</u>2 Agar $\rho(x)$ vazn [a,b] oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda x_k va A_k lar qanday tanlanganda ham (15) tenglik 2n darajali barcha ko'phadlar uchun aniq bo'la olmaydi.

Isbot. Kvadratur formulaning tugunlarini $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar orqali belgilab, quyidagi

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]^2$$

2n- darajali ko'phadni qaraymiz.

Ko'rinib turibdiki, (1) formula bu ko'phad uchun aniq emas, chunki

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx > 0$$

va ixtiyoriy A_k koeffisentlar uchun $\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_n^2(x_k) = 0$.

Gauss tipidagi kvadratur formula koeffisentlarining xossasi. Gauss tipidagi kvadratur formulaning barcha koeffisentlari A_k musbatdir. Haqiqatdan ham, 2n-2 darajali $f(x) = \varphi_{k,n}^2(x) = \frac{\omega_n(x)}{x-x_k}^2$ Ko'phad uchun quyidagi tengliklar bajarilishi ayondir. Bu ko'phad uchun Gauss tipidagi formula aniqdir:

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_{k,n}^2(x)dx = A_k[\omega_n'(x_k)]^2.$$

Bundan: $A_k = \frac{\int_a^b \rho(x)\varphi_{k,n}^2(x)dx}{[\omega_n'(x_k)]^2}$ (18)

O'z navbatida bundan barcha A_k larning musbatligi kelib chiqadi [5].

Adabiyotlar:

1. Бабушка И. Оптимальные квадратурные формулы // ДАН СССР. -Москва, 1963. Т.149, № 2.- С. 227-229.

2. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.

3. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: Дис… докт.физ.-мат.наук. –Ташкент, 2002. – 218 с.

4. McLaren D.A. Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.1963,t.83, -Pp.361-383.

5. Freeden W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere. - computing,1980, t.23,N2., -Pp.131-146.