

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

**MAXSUS SON
(2022-yil, dekabr)**

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2022

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal 2022, MAXSUS SON

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrda qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo‘yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY‘ATI:

Bosh muharrir: Adizov Baxtiyor Rahmonovich – pedagogika fanlari doktori, professor

Mas‘ul kotib: Sayfullayeva Nigora Zakiraliyevna – pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Begimqulov Uzoqboy Shoyimqulovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Navro‘z-zoda Baxtiyor Nigmatovich – iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Mahmudov Mels Hasanovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Ibragimov Xolboy Ibragimovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To‘lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent

Yanakiyeva Yelka Kirilova, pedagogika fanlari doktori, professor (N. Rilski nomidagi Janubiy-G‘arbiy Universitet, Bolgariya)

Andriyenko Yelena Vasilyevna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Fizika, matematika, axborot va texnologiya ta‘limi instituti, Novosibirsk, Rossiya)

Romm Tatyana Aleksandrovna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Tarix, gumanitar va ijtimoiy ta‘lim instituti, Novosibirsk, Rossiya)

Chudakova Vera Petrovna, psixologiya fanlari nomzodi (Ukraina pedagogika fanlari milliy akademiyasi, Ukraina)

Hamroyev Alijon Ro‘ziqulovich – pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Mahmudova Muyassar, pedagogika fanlari doktori, professor

Kozlov Vladimir Vasilyevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Yaroslavl davlat universiteti, Rossiya)

Tadjixodjayev Zokirxo‘ja Abdusattorovich, texnika fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

O‘rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Mahmudov Nosir Mahmudovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Chariyev Irgash To‘rayevich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qiyamov Nishon Sodiqovich, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Shomirzayev Maxmatmurod Xuramovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Ro‘ziyeva Dilnoza Isomjonovna, pedagogika fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc)

To‘xsanov Qahramon Rahimboyevich, filologiya fanlari doktori, dotsent

Nazarov Akmal Mardonovich, Psixologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Jumaev Rustam G‘aniyevich, siyosiy fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, dotcent.

| | | | |
|-----|--|--|-----|
| 18. | <i>JALOLOV Farhod Isomidinovich, SHARIFOV Idrisxon Shokir o'g'li, ISOMIDDINOV Bekzodjon Ozodjon o'g'li</i> | Bulutli texnologiyalardan samarali foydalanishning zamonaviy usullari va imkoniyatlari | 100 |
| 19. | <i>KARIMOV Feruz Raimovich, QUVVATOV Behruzjon Ulug'bek o'g'li, FAYZIYEV Tohir Qahramon o'g'li</i> | Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritmi va dasturlar | 105 |
| 20. | <i>BO'RONOVA Gulnora Yodgorovna</i> | Robototexnika to'garaklarida lego education to'plamlari vositasida o'quvchilarda kreativlik, tadqiqotchilik kompetensiyalarini shakllantirish | 111 |
| 21. | <i>JALOLOV Farhod Isomidinovich, MUXSINOVA Mehriniso Shavkatovna, KARIMOVA Sarvinoz Hojiqurbonovna</i> | Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishda ketma-ket differensiallashtirish metodining algoritmi | 117 |
| 22. | <i>ХАЯТОВ Хуршидҷон Усманович, ЯРАШОВ Ихтиёр Бахтиёр угли, ИСОМИДДИНОВ Бекзодҷон Озодҷон угли</i> | Методы построения квадратурных формул с помощью оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева | 122 |
| 23. | <i>ERGASHEV Aslon, QURBONOVA Kimyo</i> | O'quv jarayonida avtomatlashtirilgan tizimni ishlab chiqish va joriy qilish bosqishlari | 129 |
| 24. | <i>АТАЕВА Гулсина Исроиловна, БОЗОРОВ Дилишод Савриддинович</i> | Понятие smart-библиотеки и её задачи | 133 |
| 25. | <i>SODIQOVA Firuza Safarovna</i> | Oliy ta'limda "axborot texnologiyalari" fanini o'qitishning muammolari va yechish usullari | 138 |
| 26. | <i>БАБАДЖАНОВА Мадина Ахадовна</i> | Методы, используемые для обработки и количественной оценки неопределенности моделей искусственных нейронных сетей для прогнозирования загрязнения воздуха | 142 |
| 27. | <i>ESHONQULOV Hakim Ilhomovich</i> | O'qitishni tashkil etishda ontologiyaning tatbiqi | 152 |
| 28. | <i>ТАХИРОВ Бехзод Насриддинович, КАИМОВА Мунисахон Бахтиёр кизи, ЖУРАКУЛОВ Нажмиддин Жахон угли</i> | Защита информации – важнейшая составляющая современных информационных технологий | 157 |
| 29. | <i>ARABOV Ubaydullo Hamroqul o'g'li, FAYZIYEV Muhridin Bahriddin o'g'li</i> | Qarorlarni qo'llab-quvvatlash tizimlari tahlili | 161 |
| 30. | <i>XAYATOV Xurshidjon Usmanovich, SHERRIYEV Mirjalol Abdullayevich DJABBOROVA Nargiza Nurboyevna</i> | PHP texnologiyasi orqali fayllarni serverga yuklash metodlari | 171 |
| 31. | <i>BAHRONOVA Dilshoda Mardonovna, SUBXONQULOV Umidjon To'xtamurod o'g'li</i> | Zamonaviy axborot-kommunikatsion texnologiyalar yordamida raqamlashtirish holati va muammolari | 175 |
| 32. | <i>ESHONQULOV Hakim Ilhomovich</i> | Ontology and representation of knowledge | 181 |
| 33. | <i>SULTONOV Humoyun Ulug'murodovich, AVEZOV Abdumalik Abduxolikovich</i> | O'quv-tarbiya jarayonida elektron o'quv kursidan foydalanish | 187 |
| 34. | <i>MURODOVA Guli Bo'ronovna,</i> | Mustaqil ta'lim jarayonining zamonaviy vositalari. Elektron darslik | 190 |
| 35. | <i>NARZULLAYEVA Feruza Sodiqovna, NOROVA Fazilat Fayzulloyevna</i> | Texnologik yo'nalishlar bo'yicha bakalavrlarni tayyorlash jarayonida tasodifiy jarayonlarning ehtimollik modellarini yaratishning interaktiv texnologiyalari | 195 |

**KARIMOV Feruz
Raimovich**

Buxoro davlat universiteti
“Amaliy matematika va dasturlash
texnologiyalari”
kafedrası o‘qituvchisi

**QUVVATOV Behruzjon
Ulug‘bek o‘g‘li**

Buxoro davlat universiteti
Amaliy matematika yo‘nalishi
magistranti

**FAYZIYEV Tohir Qahramon
o‘g‘li**

Buxoro davlat universiteti
Amaliy matematika yo‘nalishi
magistranti

INTERPOLYATSION KVADRATUR FORMULALAR UCHUN ALGORITM VA DASTURLAR

Ushbu maqolada interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritmlar va dasturlar tuzish o‘rganildi. Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritmlar va dasturlar metodlari o‘rganib chiqildi va shular asosida interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritmlar va dasturlar tuzilgan.

Kalit so‘zlar: *gauss, integral, interpolyatsiya, kvadratur, ortogonal, funksiya, kvadratur formula.*

АЛГОРИТМ И ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

В статье изучены алгоритмы и программы интерполяции квадратурных формул. Исследованы алгоритмические и программные методы интерполяционных квадратурных формул, на их основе созданы алгоритмы и программы интерполяционных квадратурных формул.

Ключевые слова: *гаусс, интеграл, интерполяция, квадратура, ортогональная, функция, квадратурная формула.*

ALGORITHM AND APPLICATIONS FOR INTERPOLATION QUADRATURE FORMULA

Algorithms and programs for interpolation quadrature formulas were studied in this article. Algorithm and program methods for interpolation quadrature formulas were studied, and algorithms and programs for interpolation quadrature formulas were created based on them.

Key words: *gauss, integral, interpolation, quadrature, orthogonal, function, quadrature formula.*

Kirish. Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g‘oyani kiritdiki, u amaliy analizning tub sohalari rivojlanishi uchun asos bo‘lib qoldi. Faraz qilaylik, ba’zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o‘zgaruvchining uzliksiz oraliqni har bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda yotuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo‘lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo‘yamiz.

Oraliqni

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo‘lsin. Umuman olganda n ning katta bo‘lishidan qat’iy nazar,

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n) \quad (2)$$

ordinatalar $f(x)$ funksiyani aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyani oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$ darajali $P_{n-1}(x)$ ko‘phad topishimiz mumkinki, u ham x_n nuqtalarda

y_n qiymatga ega bo‘ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taqsimlangan qilib taqsimlanadi[1].

Gaussning g‘oyasi shundan iboratki, nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan o‘shanday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki, natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo‘lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko‘phadlar bilan teng taqsimli interpolyatsiyalashda xavfdan ham xolidir.

Qaysikim bu xavf u davrda ham ma'lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpolyatsiyalash nuqtalari tamoman erkin bo'lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko'phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpolyatsion formulasi sifatida ma'lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \tag{3}$$

fundamental ko'phadni qurishga va uni ketma-ket har bir n ta ikki hadlga bo'lishga asoslangandir. Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo'lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F_n'(x_i)(x - x_i)} \quad (i=1,2,\dots,n), \tag{4}$$

Ko'phadni oldik. $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} –**Kroneker** simvolini kiritsak, ya'ni

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \\ 0, & \text{agar } i \neq k \end{cases} \tag{5}$$

Bu holda qurish mumkinki,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \dots + y_n Q_n(x), \tag{6}$$

Ko'phad qo'yilgan shartni qanoatlantiradi: ya'ni $x = x_k$ nuqtalarda $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) qiymatlarni qabul qiladi.

$P_{n-1}(x)$ - ko'phadning yagonaligi shu dalildan kelib chiqadiki, $P_{n-1}(x)$ ko'phad bilan ikkinchi gipotetik $\bar{P}_{n-1}(x)$ ko'phad o'rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi. Lekin $P_{n-1}(x) - \bar{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n - 1$ darajali ko'phad bo'lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n - 1$ tadan tub ildizga ega bo'lmaydi: bu esa $P_{n-1}(x) = \bar{P}_{n-1}(x)$ ekanligini bildiradi.

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ funksiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\bar{A} = \int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n y_k \int_{-1}^1 Q_k(x) dx, \tag{7}$$

hisoblasak, amaliyotda noma'lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo'lamiz. Berilgan ayrim taqsimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko'phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^1 Q_k(x) dx = \omega_k, \tag{8}$$

aniq integrallar ba'zi bir sonli qiymatlarga ega bo'ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziqtiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog'liq emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o'zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo'shimcha nuqtani qo'shamiz. Qo'shimcha $x - x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo'shimcha ko'phadni hosil qilamiz. (4) ta'rifdan

$Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko'phad $F_n(x)$ ko'phadga proporsionaldir, qaysikim $(x - x_{n+1})$ yangi ko'paytuvchi qisqarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko'paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko'paytuvchi

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx, \quad (9)$$

aniq integralga proporsionaldir. Shunga o'xshash, agar yangi

$$x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \quad (10)$$

nuqtalarni ularni ordinalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots, \omega_{n+m} \text{ vaznlar}$$

$$\omega_{n+i} = \int_{-1}^1 F_n(x) \xi_{m-1}^i(x) dx \quad (11)$$

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)$ ayrim $m-1$ darajali ko'phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko'phad, $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx = 0, \dots, \int_{-1}^1 F_n(x) x^{m-1} dx = 0, \quad (12)$$

haqiqatdan ham bizning talablarimiz $m = n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^1 F_n(x) x^\alpha dx = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (13)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo'shsak ham baribir hech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o'zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko'rib, haqiqatdan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinalalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima tushmaydi.

Bu jarayonda biz $\bar{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \omega_k$ yig'indiga n ta hadni tejaymiz. Bu fikrlashlar yuqoridagi mulohazalar uchun yetarlicha emasdir. To'liqroq bo'lishi uchun quyidagi mulohazani tavsiya etamiz.

Haqiqatdan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) yangi ko'phadlarni qo'shadi, hatto oldingi $Q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

ko'phadlar ham o'zgaradi: har bir yangi x_{n+m} nuqta $Q_i(x)$ ga qo'shimcha $\frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$

ko'paytuvchini kiritadi[2].

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko'phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x) \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}, \quad (14)$$

ko`phadga aylantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarning haqiqat ekanligi shakli o`zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko`phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

$$1^0. \quad Q_i^*(x) = \delta_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$2^0. \quad \int_{-1}^1 Q_i^*(x) dx = \int_{-1}^1 Q_i(x) dx = \omega_i$$

endi bu xossalarni isbotini ko`ramiz.

Birinchi xossa bevosita (α) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x - x_{n+k}}{x_i - x_{n+k}} = 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{n+k}}$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (α) tenglikning o`ng tomonidagi qo`shimcha ko`paytuvchilarni ko`paytirishni $1 - \xi_{m-1}^i(x)$ ko`rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x) - m-1$ darajali ko`phad. (13) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko`rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o`zgartirmaydi.

Muhimrog`i shundan iboratki, bizlar qo`shimcha $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}$ ordinalarni bilishimiz shart emas.

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n y_k \omega_k,$$

yig`indi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o`zgarmaydi.

(13) - tipdagi integral shart ortogonallash sharti deyiladi. Biz ko`rsatamizki, $F_n(x)$ ko`phad $1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko`rib chiqqanda o`rganganmiz.

Biz Yakobi ko`phadlarini tekshirib chiqdikki, u (2.13) shart ma`nosida ko`phad darajasidan past bo`lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalari egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko`paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda “Lagranj ko`phadlari” da bu vazn ko`paytuvchi birga teng bo`ladi va shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lagranj ko`phadlari bilan mos qo`yishni talab qiladi: bu ko`phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo`ladi. ω_i koeffisientlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (2.8) formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma`lumki, $[a, b]$ da n nuqtali interpolatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (15)$$

tugun nuqtalari $[a, b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat`iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko`phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a, b]$ oraliq va $\rho(x) \equiv 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. x_1, x_2, \dots, x_n tugunlar shunday tanlanganki, (15) formula mumkin qadar darajasi eng yuqori bo`lgan ko`phadlarni aniq integrallasin. (15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda

tanlash yo‘li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni kutish mumkin. Haqiqatdan ham x_1, x_2, \dots, x_n tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (15) formulaning darajasini $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko‘phadlar uchun aniq bo‘lishga erishishni Gauss ko‘rsatdi. Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi [3].

Qulaylik uchun x_n tugunlar o‘rnida $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ko‘phad bilan ish ko‘ramiz. Agar x_k lar ma’lum bo‘lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma’lum bo‘ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak, u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a, b]$ oraliqda yotishini ko‘rsatishimiz shart.

Teorema. (1) kvadratur formula darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir: 1) u interpolyatsion va 2) $\omega_n(x)$ ko‘phad $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha $Q(x)$ ko‘phadlarga ortogonal bo‘lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0, \quad (16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (15) formula darajasi $2n - 1$ dan oshmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolyatsiondir. Endi darajasi n dan kichik bo‘lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko‘phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko‘rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan ko‘phad. Shuning uchun ham uni (1) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_n(x_k) Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n})$ ni hisobga olsak (16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko‘phad va (15) formula interpolyatsiondir[4].

Yetarliligi. Faraz qilaylik (1) formula interpolyatsion va $\omega_n(x)$ ko‘phad darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha ko‘phadlarga $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo‘lsin. Endi (15) formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko‘phadlarni aniq integrallashini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham $f(x)$ ni $\omega_n(x)$ ga bo‘lib,

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x) \quad (17)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $Q(x)$ va $r(x)$ larni darajalari n dan kichik. Bu tengliklarning har ikkala tomonini $\rho(x)$ ga ko‘paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx + \int_a^b r(x) \rho(x) dx$$

Teorema shartiga ko‘ra o‘ng tomondagi birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral esa $\int_a^b r(x) \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$. Chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko‘phad va (15) formula interpolyatsiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k),$$

lekin (17) ga ko‘ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo‘ldi.

$\omega_n(x)$ ko‘phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha ko‘phadlar bilan ortogonal va bosh koeffisienti birga teng bo‘lishi uchun ish natijalariga ko‘ra, bunday $\omega_n(x)$ ko‘phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a, b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o‘z ishorasini saqlasa, u holda har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun $2n - 1$ darajali ko‘phadlarni aniq integrallaydigan yagona kvadratur formula mavjud.

Teorema-2 Agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o‘z ishorasini saqlasa, u holda x_k va A_k lar qanday tanlanganda ham (15) tenglik $2n$ darajali barcha ko‘phadlar uchun aniq bo‘la olmaydi.

Isbot. Kvadratur formulaning tugunlarini x_1, x_2, \dots, x_n lar orqali belgilab, quyidagi

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2$$

$2n$ - darajali ko‘phadni qaraymiz.

Ko‘rinib turibdiki, (1) formula bu ko‘phad uchun aniq emas, chunki

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx > 0$$

va ixtiyoriy A_k koeffisientlar uchun $\sum_{k=1}^n A_k \omega_n^2(x_k) = 0$.

Gauss tipidagi kvadratur formula koeffisientlarining xossasi. Gauss tipidagi kvadratur formulaning barcha koeffisientlari A_k musbatdir. Haqiqatdan ham, $2n-2$ darajali $f(x) = \varphi_{k,n}^2(x) = \frac{\omega_n(x)^2}{x-x_k}$ Ko‘phad uchun quyidagi tengliklar bajarilishi ayondir. Bu ko‘phad uchun Gauss tipidagi formula aniqdir:

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx = A_k [\omega_n'(x_k)]^2.$$

Bundan:
$$A_k = \frac{\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx}{[\omega_n'(x_k)]^2} \quad (18)$$

O‘z navbatida bundan barcha A_k larning musbatligi kelib chiqadi [5].

Adabiyotlar:

1. Бабушка И. Оптимальные квадратурные формулы // ДАН СССР. -Москва, 1963. Т.149, № 2.- С. 227-229.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.
3. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: Дис... докт.физ.-мат.наук. –Ташкент, 2002. – 218 с.
4. McLaren D.A. Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.1963,t.83, -Pp.361-383.
5. Freedon W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere. - computing,1980, t.23,N2., -Pp.131-146.