ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2021-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2021

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2021, maxsus son

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo‘yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruruiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy
Elektron manzil: ped_mahorat@umail.uz

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО

Научно-теоретический и методический журнал
2021, специальный выпуск

Журнал включен в список обязательных выпусков ВАК при Кабинете Министров Республики Узбекистан на основании Решении ВАК от 29 декабря 2016 года для получения учёной степени по **педагогике** и **психологии**.

Журнал основан в 2001г.

Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.
Учредитель: Бухарский государственный университет
Адрес редакции: Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
e-mail: ped_mahorat@umail.uz

PEDAGOGICAL SKILLS

The scientific-theoretical andmethodical journal
2021, special release

The journal is submitted to the list of the scientific journals applied to the scientific dissertations for **Pedagogic** and **Psychology** in accordance with the Decree of the Presidium of the Ministry of Legal office of Uzbekistan Republic on Regulation and Supervision of HAC (The Higher Attestation Commission) on December 29, 2016.

The journal is registered by Bukhara management agency for press and mass media in Uzbekistan.
The certificate of registration of mass media № 05-072 of 22 February 2016

Founder: Bukhara State University

Publish house: Uzbekistan, Bukhara, Muhammad Ikbol Str., 11.
e-mail: ped_mahorat@umail.uz

MUNDARIJA

F.R.KARIMOV
Buxoro davlat universiteti
amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari
kafedrasi o‘qituvchisi

EFFEKTIV KVADRATUR FORMULALAR QURISH METODLARI

Ushbu maqolada davriy funksiyalarni integrallash va effektiv interpolyatsion kvadratur formulalar qurish o‘rganildi. Effektiv kvadratur formulalar qurish metodlari o‘rganilib chiqildi va shular asosida integrallarni taqribiy hisoblash uchun algoritm va dasturlar tuzilgan.

Kalit so‘zlar: *integral, kvadratur, hosila, boshlang‘ich funksiya, effektiv kvadratur formula, kompleks.*

В этой статье исследуется интегрирование периодических функций и построение эффективных интерполяционных квадратичных формул. Изучены методы построения эффективных квадратичных формул, разработаны алгоритмы и программы для приближенного вычисления интегралов.

Ключевые слова: *интеграл, квадратичная, производная, начальная функция, эффективная квадратурная формула, комплекс.*

This paper explores the integration of periodic functions and the construction of effective interpolation quadratic formulas. Methods for constructing effective quadratic formulas have been studied, and algorithms and programs have been developed for the approximate calculation of integrals.

Key words: *integral, quadratic, derivative, initial function, effective quadrature formula, complex.*

Kirish. Amaliy analizning ko‘pgina masalalari differensial tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar bunday funksiyalarni integrallash kerak bo‘lsa, u holda faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarining qiymatlaridan foydalanish maqsadga muvofiq deb hisoblanadiki, agar chetki nuqtalarda chegaraviy nuqtalarni biz bilsak, ketma-ket hosilalarning qiymatlarini funksiyani aniqlovchi differensial tenglamalardan osongina hisoblashimiz mumkin. Shuning uchun bizning asosiy maqsadimiz shundan iboratki, effektiv kvadratur formulalarni hosil qilish uchun biz ichki ordinatalardan emas, balkim chegaraviy ordinatalardan va bu nuqtalarda hosilalarning qiymatlaridan foydalanamiz. Bunday formulalar aniqlikni oshirish uchun emas, balki integrallarni hisoblash uchun chegaraviy axborotlardan foydalaniladi. Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

<u>Teorema.</u> Agar ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda aniqlangan, uzliksiz va m -tartibli uzliksiz hosilalarga ega bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b u(x)v^{(m)}(x)dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^{\alpha}\right]\Big|_a^b + R_m(x) \quad (1)$$

bu yerda,

$$R_m(x) = \int_a^b (-1)^m v(x)u^m(x)dx \quad (2)$$

va α -hosila tartibi.

Isbot: Har bir $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda differensiallanuvchi va undan tashqari bu oraliqda $u(x)\ \ v'(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘lsin. U holda $[a,b]$ oraliqda $u(x)\ v'(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘lib, bo‘laklab integrallash formulalari o‘rinlidir. Ya’ni

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (3)$$

yoki boshqacha yozsak

$$\int_a^b u(x)v'(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (4)$$

Shunday qilib (1) formulaning o‘ng tomoni uchun (4) formulani m marta qo‘llasak quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_a^b u(x)\,v^m(x) - \int_a^b (-1)^m v(x)\,u^{(m)}(x)\,dx = \left[u(x)\,v^{(m-1)}(x) - u'(x)\,v^{(m-2)}(x) + \ldots +\right]\Big|_a^b = \tag{5}$$

$$= \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)\,v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^{\alpha}\right]\Big|_a^b$$

Bundan esa quyidagini olamiz:

$$\int_a^b u(x)v^m(x)dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^{\alpha}\right]\Big|_a^b + \int_a^b (-1)^m u^{(m)}(x)v(x)dx, \tag{6}$$

va teorema shu bilan isbotlanadi.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad \left(x_k \in [0,2\pi]\right) \tag{7}$$

formuladan biz quyidagicha foydalanamiz. Integrallash oralig‘ini $(0,1)$ oraliqqacha normallaymiz. Ya’ni quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$u(x) = f(x),\; v(x) = \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} \tag{8}$$

Bu yerda

$$g_m(x) = \beta_m^m x^m + \beta_{m-1}^m x_{m-1} + \ldots + \beta_0^m \tag{9}$$

ko‘phadni erkin tanlaymiz. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarni bunday tanlashlar natijasida (7) formula quyidagi ko‘rinishda yozilishi mumkin:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\beta_m^m m!}\left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x)g_m^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^{\alpha}\right]\Big|_0^1 + R_m \tag{10}$$

Bu yerda $R_m(x)$ - quyidagi aniq integralni bildiradi:

$$R_m = (-1)^m \int_0^1 \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} f^{(m)}(x)dx \tag{11}$$

(8) formulani biz quyidagicha tushunamiz va u shundan iboratki, oraliqning chetki nuqtalarida egri chiziqning chegaraviy qiymatlari va hosilalarining qiymatlari uchun tegishli yuzani hisoblaydigan kvadratur formulani ifodalaydi.

$$\bar{g}_m \frac{1}{\beta_m^m m!}\left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x)g_m^{m-\alpha-1}(x)(-1)^{\alpha}\right]\Big|_0^1 \tag{12}$$

Shu vaqtda (8) formuladagi qiymat kvadratur formulaning R_m qoldig‘ini tasvirlaydi.

Shunday qilib biz funksiya va uning hosilalarining chegaraviy qiymatlarida hisoblanadigan kvadratur formulalar va uning qoldiq hadiga ega bo‘ldik.

Effektiv kvadratur formula qurish metodidagi teoremaga asosan, ya’ni

$$\int_a^b u(x)v^{(m)}(x)dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^m\right]\Big|_a^b + R_m(x) \tag{13}$$

formuladan quyidagicha foydalanamiz $[a,b]$ oraliqni (a,b) gacha normallaymiz va undan tashqari,

$$u(x) = f(x), (v) = g(x),\; [g(x)]^{(m)} = P(x) \tag{14}$$

bu yerda

$$P_m(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g(x)dx \tag{15}$$

belgilarni kiritsak,

$$\int_0^1 P(x)\; f(x)dx = \sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x)P^{m-\alpha-1}(x)\Big|_0^1 + R_m(x) \tag{16}$$

bu yerda

$$R_m(x) = \int_0^1 P(x)\,f^{(m)}(x)dx \tag{17}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. (16) formulaga biz qoldiq hadi (18) iborat bo‘lgan vaznli effektiv kvadratur formula deb ataymiz.

Endi biz shu qoldiq hadga e’tiborni qaratamiz va quyidagi teorema o‘rinlidir:

Teorema 2. (12) ko‘rinishdagi vaznli effektiv kvadratur formula qoldiq hadi uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir.

$$R_m = \frac{(-1)^m}{\beta_m^m (m!)^2} \int_0^1 f^{(2m)}(x)\left[x(x-1)\right]^m dx \text{, (19)}$$

Bu yerda

$$\beta_m^m = (-1)^m \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

Isbot. $g(x)$ funksiya sifatida biz Gauss kvadratur formulasini aniqlik darajasini $(2m-1)$ gacha ta’minlaydigan Lagranj ko‘phadlaridan foydalangan, ya’ni

$$L(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(m+\alpha)!}{(m-\alpha)!(\alpha!)^2}(-x)^\alpha \text{. (20)}$$

Uning $[-1,1]$ oraliqdagi ba’zi bir ajoyib xossalariga asosan uni

$$L(x) = \frac{1}{m!} \frac{d^m\left[(1-x)x\right]^m}{dx^m} \quad (21)$$

ko‘rinishda yoza olamiz.

Agar biz (7)da quyidagi almashtirishlarni bajarsak, ya’ni $u(x)$ ni $f^{(m)}(x)$ va $v(x)$ ni $[x(1-x)]^m$ bilan akslantirsak, u holda biz

$$R_m = \frac{(-1)^m}{\beta_m^m (m!)^2} \int_0^1 f^{(m)}(x) \frac{d^m[x(1-x)]^m}{dx^m} dx =$$

$$\left(\int_0^1 f^{(2m)}(x)[x(1-x)]^m dx\right) \frac{(-1)^m}{\beta_m^m (m!)^2};$$

tengliklarga ega bo‘lamiz, shu bilan teorema isbotlandi.

Effektiv kvadratur formulalarning qo‘llanishi.

Odatda xos qiymat deb ataluvchi nom’alum doimiy λ parametrni o‘z ichiga olgan chiziqli differensial tenglama berilgan bo‘lsin. Ya’ni shunday bir jinsli chegaraviy shartlar berilganki, tenglamaning yechimi faqat λ parametrni tanlash bilan topish mumkin. Masala shundan iboratki, shunday λ eng kichik qiymatni yoki bir nechta λ eng kichik qiymatlarni topish mumkin bo‘lsaki, masala yechimga ega bo‘lsin.

Bunday xos qiymatlar bilan bog‘liq masalalarni yechish uchun effektiv kvadratur formulalarning qo‘llanilishi yaqqol yordam berishi mumkin, chunki u faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarini bilishga asoslangandir. Bu qiymatlar esa berilgan differensial tenglamalar va chegaraviy shartlar asosida olinadi.

Bu metodning qo‘llanishini namoyish qilish uchun biz oddiy bir misol olamiz. Lekin metod esa murakkab shartlar asosida qo‘llaniladi. Bizning asosiy maqsadimiz metodning jiddiy qirralarini o‘rganishdan iborat bo‘ladi. Murakkablashgan texnik qiyinchiliklari bundan mustasnodir. Shuning uchun biz o‘zgarmas koeffisentli ikkinchi tartibli differensial tenglamaga to‘xtalamiz.

$$y'' + y' + \lambda y = 0 \text{. (22)}$$

Chegaraviy shartlari quyidagicha

$$y(0), = y(1) = 0 \text{. (23)}$$

Berilgan oraliq $[0,1]$ga keltirilgan. Bir jinsli chiziqli differensial tenglama o‘zgarmas amplitudali ko‘paytuvchi qoldirganligidan $x = 0$ nuqtadagi hosila uchun ixtiyoriy $y'(0) = 1$ qiymatni yozish mumkin. Bu shartlar bilan (22) differensial tenglama $x = 0$ nuqtada barcha hosilalarning qiymatlarini aniqlaydi. Biz ularni ketma-ket differensiallash bilan yoki uni quyidagi $y = a_0 + a_1 x + a_2 x + \ldots$ darajali qatorga yoyib va o‘rniga qo‘yib olamiz. Barcha o‘xshash hadlarni to‘playmiz va x^k oldidagi olingan koeffisentlarni nolga tenglashtiramiz. Bizning oddiy misolimizda $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1-\lambda}{6}$, $y(0)$, $y^{'}(1)=0$, $y^{''}(1)=-1$, $y^{'''}(1)=1-\lambda$ ni topamiz.

Agar biz koeffisentlarni ketma-ket topishni qancha davom ettirsak, shuncha katta aniqlikni kutishimiz mumkin. Bizning maqsadimiz uchun bu yerda biz a_3 ga to‘xtalamiz. Boshqa chetki nuqta uchun xuddi shunday

$$x=1+\xi, \quad y=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2+b_3\xi^3$$

deb olamiz.

Oldingiga o‘xshagan differensial tenglamaga eltib qo‘yish metodidan foydalansak, biz b_0 ni emas, balki barcha keyingi koeffisentlar b_0 koeffisentning chiziqli funksiyasi bo‘lar ekan.

$$b_0=b_1\,,\; b_2=-\frac{\lambda b_0}{2}\,,\; b_3=-\frac{\lambda b_0}{6}$$

$$y(+1)=b_0\,,\; y^{'}(1)=0\,,\; y^{''}(1)=-\lambda b_0\,,\; y^{'''}(1)=\lambda b_0$$

Endi biz $y^{''}(x)$ ni $f(x)$ boshlang‘ich funksiya sifatida qabul qilamiz va kvadratur formulani qo‘llaymiz. Xuddi shunday $f(x)=y^{''}(x)$ va $f^{'}(x)=y^{'''}(x)$ ikkala chetki nuqtalarda berilgan.

$$f(0)=-1 \quad f(1)=-\lambda b_0$$

$$f^{'}(0)=1-\lambda \quad f^{'}(1)=\lambda b_0$$

$n=2$ bo‘lganda effektiv kvadratur formula

$$\int_0^1 y^{''}(x)dx=y^{'}(1)-y^{'}(0)=\frac{6(-1-\lambda b_0)+1(1-\gamma-\gamma b_0)}{12}\,;$$

$$-1=\frac{-5-7\lambda b_0-\lambda}{12}$$

ni hosil qilamiz, bu quyidagi munosabatga olib keladi:

$$b_0=\frac{7-\lambda}{7\lambda}\,, \quad (24)$$

Endi biz yana bir marta $y^{'}(x)$ ni $f(x)$ sifatida olib, effektiv kvadratur formuladan foydalanamiz:

$$f(0)=1,\; f(1)=0$$

$$f^{'}(0)=1\,,\; f^{'}(1)=-\lambda b_0$$

$$f^{''}(0)=1-\lambda\,,\; f^{''}(1)=\lambda b_0$$

Hozir biz ikkala chetkilar uchun uch juft berilganlarga egamiz va formulani $n=3$ bo‘lganda qo‘llaymiz.

$$\int_0^1 y^{'}(x)dx=y(1)-y(0)=\frac{60(1+0)+12(-1+\lambda b_0)+(1-\lambda+\lambda b_0)}{120}$$

$$b_0=\frac{49-\lambda+13\lambda b_0}{120}$$

Bu esa yangi munosabatni beradi.

$$b_0=\frac{49-\lambda}{120-13\lambda} \quad (25)$$

(24) va (25)larning o‘ng tomonlarini tenglashtirib λ -xos qiymatni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamani olamiz.

$$20\lambda^2-554\lambda+840=0$$

Biz ikkita

$$\lambda_1=1{,}6095\,,\; \lambda_2=26{,}0905\,, \quad (26)$$

ildizlarga ega bo‘lamiz.

Faqat kichik ildizning o‘ziga xos qiymati bor, kattasini olsak, hisoblashlarda katta o‘zgarishlar bo‘ladi. Kichik ildiz uchun biz differensiallash jarayonini davom ettirsak, unda o‘zgarish bo‘lmaydi. Biz $y'''(x)$ ga kelib qoldiq. Agar biz yana bir qadam qilsak, $y'''(0)$ va $y'''(1)$ ni kiritsak, effektiv kvadratur formulaning birinchi yaqinlashishi $n=3$ da ikkinchisi esa $n=4$ da bo‘ladi. Bu uchun biz ikkita munosabatni olamiz.

$$b_0 = \frac{71-10\lambda}{\lambda(73-\lambda)} \text{ va } b_0 = \frac{679-18\lambda}{168-201\lambda+\lambda^2)}$$

va ular λ ni aniqlash uchun

$$28\lambda^3 - 4074\lambda^2 + 80638\lambda - 119280 = 0$$

kub tenglamani beradi. Bu yerda yechimi

$$\lambda_1 = 1{,}608467,$$

dan iborat bo‘ladi. λ_1 qiymatning kichkina o‘zgarishi, (26) da topilganga nisbatan ko‘rsatadiki, birinchi qo‘pol yaqinlashish haqiqatga juda yaqin ekanki, aniqlik 0,07% gacha bo‘ldi. Ko‘rgan oddiy misolimizda natijalarimizni tekshirishimiz mumkin. λ_1 - nazariy jihatdan

$$\lambda = \frac{1}{4} + \theta^2, \ \theta \text{ esa } tg\theta = 2\theta$$

transendent tenglamaning yechimidir. Bu tenglamaning eng kichik ildizi $\theta_1 = 1{,}1655618$ yoki $\lambda_1 = 1{,}608534$ ni beradi. Shunday qilib $n = 2{,}3$ uchun yaqinlashish xatoligi $\eta = -0{,}0010$ ga, $n = 3{,}4$ da esa $\eta = 0{,}000067$ ga teng bo‘ldi.

Xuddi shunday silliq $f(x) = y''(x)$ $n = 3$ funksiyalar uchun uni qo‘llasak yaqinlashish juda tez bo‘ladi. Ma’lumki, xos qiymatlarni olish uchun Rem - Rits metodi ba’zi bir integrallarni minimallashtirishga asoslangandir, shuning uchun ham u metod faqat o‘ziga qo‘shma differensial operatorlarga qo‘llanishi mumkin.

Tavsiya etilgan metod uchun esa differensial operator va chegaraviy shartlar o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi talab qilinmaydi. Shuning uchun bu metod ancha umumiy hollarda ham qo‘llaniladi va hatto bu metodik qo‘llash uchun differensial tenglamaning chiziqli bo‘lishi shart emas.

Bu g‘oyani yana ham ilgari suradigan bo‘lsak shunday xulosaga kelamizki, effektiv kvadratur jarayoni nafaqat xos qiymatlarni topish uchun, balkim differensial tenglamalarning haqiqiy yechimlarini topishga ham qo‘llanilishi mumkin. Effektiv kvadratur jarayonning yaqinlashishi umumiy xususiyatlarini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun biz teng taqsimlangan polinomial interpolyatsiyaning yaqinlashishidan foydalanamiz.

$f(x)$ funksiya $[0,1]$ intervalda va shu intervalni o‘ziga oluvchi kompleks tekislikning biror sohasida analitik xarakterga ega bo‘lsin deb, faraz qilaylik. U holda $f(x)$ ni Koshining quyidagi Kontur integrali bilan tasvirlash mumkin.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{z-x}, \quad (27)$$

bu yerda integral yopiq kontur bo‘yicha olinadi, qaysikim $z = x$, hamda $z = x_i$ nuqtalarni o‘z ichiga oladi, lekin $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtalarini o‘z ichiga olmaydi. Bu esa bizga butun tekshirishimizni faqat $(z_0 - x)^{-1}$ maxsus funksiya bilan chegaralanishga imkon beradi, bu yerda z_0 - kompleks tekislikning biror fiksirlangan nuqtasidir. Quyidagi teorema o‘rinlidir.

Teorema. Agar effektiv kvadratur metod $(z_0 - x)^{-1}$ - xususiy funksiya uchun z_0 nuqta kompleks tekislikning biror to‘liq aniqlangan sohasidan tashqarida yotish sharti bilan yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu sohaning ichida va chegarasida regulyar bo‘ladigan ixtiyoriy $f(z)$ analitik funksiya yaqinlashishi ta’minlanadi.

Isbot: Ma’lumki effektiv kvadratur formulalar xatoligi uchun quyidagi baholash formasi o‘rinlidir.

$$R_m = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_0^1 f^{(2m)}(x)[x(1-x)]^m dx, \quad (28)$$

Bundan

$$f(x)=\frac{1}{z_0-x},$$

xususiy funksiya uchun,

$$\frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}=\frac{1}{(z_0-x)^{2m+1}},$$

ni olamiz va xuddi shunday

$$R_m=(-1)^m\int_0^1\frac{1}{z_0-x}\left[\frac{x(1-x)}{(z_0-x)^2}\right]^m dx, \quad (29)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Endi (3.30) tenglikka biz ko‘rsatishimiz kerakki, m ning cheksizlikka intilishi bilan R_m nolga intiladi.

E’tiborlisi shuki, hal qiluvchi qiymat

$$K(x)=\left|\frac{x(1-x)}{(z_0-x)^2}\right|,$$

integral ostidagi funksiyaning m - darajasidan iborat. Agar $K(x)$ hamma joyda birdan kichik bo‘lsa, u holda R_m ning nolga asta-sekin yaqinlashishi ta’minlanadi. Shunday bo‘lishi mumkinki, z_0 nuqta x o‘qiga [0,1] oraliqdan shunday uzoqlashtirilganki, $K(x)$ oraliqning hammasida birdan kichik bo‘ladi, bu holda esa, yaqinlashish ta’minlangan bo‘lib keyingi tekshirishlar talab qilinmaydi.

Lekin shunday hol bo‘lishi mumkinki, z_0 nuqta x o‘qiga juda yaqin bo‘lib qoladi va $K(x)$ - oraliqning ba’zi bir qismlari uchun birdan katta bo‘lib qoladi. z_0 nuqta quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin.

$$z_0=\alpha-i\beta,$$

bu yerda β musbat, ya’ni z_0-x o‘qidan pastga joylashgan ba’zi bir kompleks nuqtadir. $K(x)=0$ bo‘ladigan nuqtadan boshlab, x o‘qi bo‘yicha A_1 nuqtagacha $K(x)$ ni shunday almashtiramizki, u birga teng bo‘lsin.

Shunday o‘xshash $x=1$ nuqtadan (bu yerda $K(x)=0$), A nuqtagacha orqaga qaytamizki, yana $K(x)=1$ bo‘lsin. Qiyinchilik A_1, A_2 orasida bo‘ladiki, oraliqning qismida $0A_1$ va $A_2 1$ kesmalar nolga intiladi. Endi biz ma’lum bo‘lgan analitik funksiyalar xossalariga asosan xulosa chiqaramizki, integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalarini olganda, integrallash yo‘lini ixtiyoriy deformatsiyalash mumkin. Shuning uchun biz x ni $z=x+iy$ kompleks o‘zgaruvchi bilan almashtiramiz va integral ostidagi funksiya maxsus nuqtalarga ega bo‘lmaydigan kompleks tekislikning yuqori yarim qismida integrallash yo‘lini tanlaymiz. Avval $K(x)=1$ bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rnini aniqlaymiz.

Bu esa

$$\left[x(1-x)+y^2\right]^2+(1-2x)^2y^2=\left[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2\right]^2, \quad (30)$$

shartga olib keladi.

Buni biz y ga nisbatan uchinchi darajali hadi $4\beta y^3$ va ozod hadi $\left[(\alpha-x)^2+\beta^2\right]^2+\left[x(1-x)\right]^2$ ga teng bo‘lgan kubik tenglama sifatida qarashimiz mumkin. A_1 va A_2 kritik oraliqda bu qiymat manfiy bo‘lib qoladi. Lekin, bunda kubik tenglama har qanday x ning qiymatlari uchun haqiqiy musbat ildizga ega bo‘lishi kerak. Shunday qilib biz yuqori yarim tekislikda A_1 va A_2 nuqtalarni birlashtiruvchi botiq egrilikni aniqlovchi soha ichida $K(z)>1$, tashqarisida esa $K(z)<1$ ga ega bo‘lamiz.

Kritik egrilik tashqarisida integrallash yo‘lini shunday ta’minlaymizki, $K(z)<1$ bo‘ladi. Bu bilan R_m ning nolga intilishini isbotladik. Agar biz $\beta=0$ deb olsak, u holda z_0 x o‘qida yotadi va integral ostidagi funksiya haqiqiy bo‘ladi.

$$K(x)=\frac{x(1-x)}{(\alpha-x)^2}$$

kasrni qaraymiz. Uning maksimumi

$$x = \frac{\alpha}{2\alpha - 1}$$

nuqtada yotadi. Qaysikim

$$K(x) = \frac{1}{4\alpha(\alpha - 1)}$$

Bu kasrning birdan kichik bo‘lish sharti α ga ikkita chegarani beradiki aynan musbat tomondan: $\alpha > \frac{1+\sqrt{2}}{2} = 1{,}20705$, va manfiy tomondan: $\alpha < \frac{1-\sqrt{2}}{2} = -0{,}20705$, tekshirishimizning natijasini quyidagicha tasvirlash mumkin: x o‘qida kesmani simmetrik har ikkala tomonga ham $0{,}207$ qiymatga chetki $0, \quad 1$ nuqtalardan boshlab cho‘zamiz. Bu kesmani ixtiyoriy kichik tenglik bilan o‘raymiz. Teoremani sharti bo‘yicha bu sohada $f(z)$ regulyar u holda effektiv kvadratur yaqinlashishi ta’minlanadi. Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. Бабушка И. Оптимальные квадратурные формулы // ДАН СССР. -Москва, 1963. Т.149, № 2.- С. 227-229.
2. Шадиметов Х.М. Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах // Докл. РАН. –Москва, 2001.- Т. 376, № 5. -С. 597 - 599.
3. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: Дис… докт.физ.-мат.наук. –Ташкент, 2002. – 218 с.
4. Шарипов Т.Х. Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования: Дис… канд.физ.-мат.наук. –Ташкент, 1975. – 102с.
5. McLaren D.A. Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.1963,t.83, -Pp.361-383.