SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842

VOLUME 3, ISSUE 5

MAY 2022

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 3, ISSUE 5

MAY 2022

2020
IMPACT FACTOR
3.567
SJIFactor

www.openscience.uz

TABLE OF CONTENTS / MUNDARIJA

EXACT SCIENCES / ANIQ FANLAR

NATURAL SCIENCES / TABIIY FANLAR

Ajralgan yadroli xususiy integralli operatorning xos qiymatlari va xos funksiyalari

Gulhayo Husniddin qizi Umirqulova
Buxoro davlat universiteti
Boymirza Eshquvvat o'g'li Dalliyev
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi T ajralgan yadroli xususiy integralli operator chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida qaraladi. Dastlab o'quvchiga qulaylik uchun ishning asosiy natijalarini bayon qilish va isbotlash uchun zarur bo'lgan Funksional analiz kursining muhim tushunchalari keltiriladi. 0 soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat bo'lishi ko'rsatiladi va unga mos keluvchi xos funksiyalar aniqlanadi. T operator noldan farqli yagona xos qiymatga ega bo'lishi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: ajralgan yadro, xususiy integralli operator, xos qiymat va uning karraligi, xos funksiya.

Eigenvalues and eigenfunctions of partial integral operators with generated kernel

Gulhayo Husniddin kizi Umirkulova
Bukhara State University
Boymirza Eshquvvat ugli Dalliyev
Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy

Abstract: In this paper, a partial integral operator T with a generated kernel acting in Hilbert space is considered as a linear, bounded, and self-joining operator. For the convenience of the reader, important concepts of the Functional Analysis course are introduced to explain and prove the main results of the work. We show that the number 0 is an infinite multiple eigenvalue for the operator T, and the eigenfunctions corresponding to it are determined. It is proved that the operator T is a unique non-zero eigenvalue.

Keywords: generated kernel, partial integral operator, eigenvalue and its multiplicity, eigenfunction.

1. BOSHLANG‘ICH TUSHUNCHALAR

Bu bo‘limda ishning asosiy natijalari o‘quvchilarga yaxshi tushunarli bo‘lishi uchun Funksional analiz va operatorlarning spektral nazariyasining ayrim tushunchalarini [1,2] eslatib o‘tamiz.

Bizga X va Y Gilbert fazolari berilgan bo‘lsin.

1-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo‘yuvchi

$$Ax = y \ (x \in X, y \in Y)$$

akslantirishga operator deyiladi.

Umuman olganda A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo‘ladigan barcha $x \in X$ elementlar to‘plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{x \in X: Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y\}.$$

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ kompleks sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$ munosabat o‘rinli bo‘lib,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A operatorga chiziqli operator deyiladi.

Agar A chiziqli operator qaralayotgan bo‘lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko‘pxillilik bo‘lishi talab qilinadi, ya'ni agar $x, y \in D(A)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

3-ta'rif. Bizga X Gilbert fazoning M qism to‘plami berilgan bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ soni topilib, barcha $x \in M$ elementlar uchun $\|x\| \leq C$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda M to‘plamga chegaralangan deyiladi.

Operatorning chegaralanganligi tushunchasiga ta'rif beramiz.

4-ta'rif. Bizga X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar A operatorning aniqlanish sohasi uchun $D(A) = X$ tenglik o‘rinli bo‘lib, har qanday chegaralangan to‘plamni yana chegaralangan to‘plamga akslantirsa, u holda A operatorga chegaralangan operator deyiladi.

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

5-ta'rif. $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator bo‘lib, $D(A) = X$ bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ soni mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in X$ elementlar uchun

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A operatorga chegaralangan operator deyiladi.

6-ta'rif. (1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to‘plamining aniq quyi chegarasiga A operatorning normasi deyiladi, va u $\|A\|$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\|A\| = inf\ C.$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in X$ elementlar uchun

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-teorema. X Gilbert fazoni Y Gilbert fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tengliklar o‘rinli.

1-tasdiq. Chiziqli chegaralangan A operator uchun

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

tenglik o‘rinli.

X Gilbert fazoni Y Gilbert fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to‘plamini $L(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, agar $X = Y$ bo‘lsa, u holda $L(X,X) = L(X)$ belgilash ishlatiladi.

1-natija. Ixtiyoriy $A \in L(X,Y)$ operator va $x \in D(A)$ element, $\|x\| = 1$ uchun

$$\|Ax\| \leq \|A\|$$

tengsizlik o‘rinli.

Endi chiziqli operatorlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan spektr tushunchasiga to‘xtalamiz. A chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chekli o‘lchamli va cheksiz o‘lchamli fazo bo‘lgan hollarni tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar biror λ soni uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo‘lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechimga esa xos vektor deyiladi. Ma’lumki, har bir $A: C^n \to C^n$ chiziqli operatorga $\{a_{ij}\} - n \times n$ matrisa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma’lumki, agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa, u holda $det(A - \lambda I) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi va aksincha. $n \times n$ matrisa determinanti $det(A - \lambda I)$, parametr λ ning $n-$ darajali ko‘phadi bo‘ladi va $det(A - \lambda I) = 0$ tenglama ko‘pi bilan n ta haqiqiy ildizga, roppa rosa n ta kompleks ildizga ega, ya’ni $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator ko‘pi bilan n ta haqiqiy xos qiymatga, roppa rosa n ta kompleks xos qiymatga ega. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, ya’ni $det(A - \lambda I) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud va u C^n fazoning hamma yerida aniqlangan bo‘ladi.

2-teorema. $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator chegaralangandir.

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta’kidlash lozimki, chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo‘lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, bunday λ A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o'lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1) va 2) holatlardan farqli bo'lgan uchinchi holat ham bo'ladi, ya'ni:

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax = \lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A - \lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$.

7-ta'rif. Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo'lib, teskari operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, u holda λ soniga A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

operatorga esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. A operatorning barcha regulyar nuqtalari to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

8-ta'rif. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

9-ta'rif. Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A - \lambda I)x = 0$ tenglama nolmas $(x \neq 0)$ yechimga ega bo'lsa, λ u holda soni A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas x yechimga esa xos vektor deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, u holda $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas. Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

10-ta'rif. a) A operatorning barcha xos qiymatlari to'plamiga uning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

b) Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa va $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich bo'lmasa, bunday λ lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o'z-o'ziga qo'shma operator ta'rifini keltiramiz.

Bizga H Gilbert fazosi va operator berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x, y \in H$ elementlar uchun

$$A \in L(H), (Ax, y) = (x, A^* y)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi A^* operatorga A operatorning qo'shmasi deyiladi. Agar $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ elementlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A ga o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi.

Quyidagi ikkita lemma o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari haqidagi tasdiqlarni ifodalaydi.

1-lemma. H kompleks Gilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.

2-lemma. O‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir.

Endi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorining regulyar qiymati va spektri haqidagi teoremalarni bayon qilamiz.

3-teorema. λ soni o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan A operatorning regulyar qiymati bo‘lishi uchun shunday musbat C soni topilib, barcha $x \in H$ larda

$$\| A_\lambda x \| = \| Ax - \lambda x \| \geq C \| x \|$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarlidir.

2-natija. λ soni A o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektriga tegishli bo‘lishi uchun shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlik topilib,

$$\| A_\lambda x_n \| \leq C_n \| x \|, C_n \to \infty, n \to \infty. \quad (2)$$

munosabat bajarilishi zarur va yetarlidir.

(2) munosabatda $\| x \| = 1$ deb olish mumkin. U holda

$$\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0, \|x_n\| = 1.$$

4-teorema. $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ kompleks soni o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan A operatorning regulyar qiymati bo‘ladi.

5-teorema. O‘z-o‘ziga qo‘shma A operatorning spektri haqiqiy sonlar o‘qidagi $[m, M]$ kesmada yotadi, bu yerda

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), M = \max_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

6-teorema. Agar A o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsa, u holda m va M sonlari A operatorning spektriga tegishli bo‘ladi.

3-natija. Har qanday o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘sh bo‘lmagan spektrga ega bo‘ladi.

Funksional fazoda (masalan, $C[a,b], L_2[a,b], C_2[a,b]$) tenglama berilgan bo‘lib, noma’lum element funksiyadan iborat bo‘lsa, bunday tenglama funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma’lum funksiya integral ostida bo‘lsa, u holda tenglama integral tenglama deyiladi. Masalan,

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t) g(\phi(t), t) dt$$

tenglama ϕ ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $K(s,t), g(s,t) -$ berilgan funksiyalar.

Integral tenglamadagi ifoda noma’lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo‘lgan holda tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi. Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misol bo‘ladi:

$$\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s) = 0, \tag{3}$$

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s), \tag{4}$$

bu yerda $\phi -$ noma’lum funksiya, $K(s,t)$ va $f(s)$ ma’lum funksiyalar. (3) va (4) tenglamalar mos ravishda birinchi va ikkinchi tur Fredholm tenglamalari deyiladi.

Xususan, $K(s,t)$ funksiya $t > s$ qiymatlar uchun $K(s,t) = 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda (3) va (4) tenglamalar mos ravishda

$$\int_a^s K(s,t)\phi(t)dt + f(s) = 0,$$

$$\phi(s) = \int_a^s K(s,t)\phi(t)dt + f(s)$$

ko‘rinishlarga ega bo‘ladi. Bunday tenglamalar birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari deyiladi. Volterra tenglamalari Fredholm tenglamalarining xususiy holi bo‘lsada, ular alohida o‘rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o‘ziga xos bo‘lgan xossalarga ega.

Biz bu yerda faqat ikkinchi tur Fredholm tenglamasini qaraymiz. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosida ikkinchi tur Fredholm tenglamasini, ya’ni (4) tenglamani olamiz. Bu tenglamada f ma’lum, ϕ noma’lum funksiyalar bo‘lib, ular $L_2[a,b]$ fazoning elementlaridir.

(4) tenglamaning yadrosi deb nomlanuvchi $K(s,t)$ funksiyadan quyidagilarni talab qilamiz, u o‘lchovli va

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dsdt < \infty$$

shartni qanoatlantirsin, ya’ni $K(s,t)-$ kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. $L_2[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$(T\phi)(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt.$$

operatorni qaraymiz. Bu operator K yadroli Fredholm operatori deb ataladi. (4) tenglamani o‘rganish shu operatorning xossalarini tekshirishga keltiriladi.

2. AJRALGAN YADROLI XUSUSIY INTEGRALLI OPERATOR

$L_2[-\pi;\pi]$ orqali $[-\pi;\pi]$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar Gilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2[-\pi;\pi]$ fazoda

$$(Tf)(x,y) = v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t,y)dt$$

ko‘rinishdagi operatorni qaraymiz. Bu yerda $v(\cdot)$ funksiya $[-\pi;\pi]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya. Odatda T operatorga xususiy integralli operator deyiladi. Bunga sabab integral ostidagi ikki o‘zgaruvchili f funksiya *t* o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallanmoqda, *x* esa ozod o‘zgaruvchi. Yadro ajralgan hamda 1 o‘lchamlidir. Ta’kidlash joizki, bu turdagi operatorlar kvant maydon nazariyasi [3], qattiq jismlar fizikasi [4] va statistik fizikaning [5] ko‘plab masalalarida uchrab turadi. $v(x) = 1$ bo‘lgan hol [6-12] ishlarda diskret Shryodinger operatorini o‘rganishda qo‘zg‘almas operatori (ko‘paytirish operatori) uchun kompakt bo‘magan qo‘zg‘alish sifatida o‘rganilgan. [13-25] ishlarda esa $v(\cdot)$ funksiya o‘zgarmasdan farqli bo‘lgan hol qaralgan. Bu turdagi operatorlarning spektral xossalari [26-30] ishlarda Fridrixs modelining spektrini tadqiq qilish orqali o‘rganilgan.

Dastlab, T operatorning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. Shu sababli ixtiyoriy $f,g \in L_2[-\pi;\pi]$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha,\beta \in C$ kompleks sonlar uchun

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg;$$

$$\big(T(\alpha f + \beta g)\big)(x,y) = \alpha(Tf)(x,y) + \beta(Tg)(x,y);$$

tengliklarni tekshiramiz. Operatorning ta’sir formulasiga ko‘ra:

$$\big(T(\alpha f + \beta g)\big)(x,y) =$$

$$= v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\big(\alpha f(t,y) + \beta g(t,y)\big)dt$$

$$= v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\alpha f(t,y)dt + v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\beta g(t,y)dt =$$

$$= \alpha v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t,y)dt + \beta v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)g(t,y)dt =$$

$$= \alpha(Tf)(x,y) + \beta(Tg)(x,y).$$

Ta’rifga ko‘ra T chiziqli operator.

Endi T operatorni chegaralanganlikka tekshiramiz. Buning uchun shunday $C > 0$ soni mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $f \in L_2[-\pi;\pi]$ element uchun

$$\|Tf\| \le C\|f\|;$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$L_2[-\pi;\pi]$ Gilbert fazosida *x* elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt}$$

Tf elementni qaraymiz hamda uning normasini baholaymiz:

$$\|Tf\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f(t,y) dt \right|^2 dxdy$$
$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |v(x)|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |v(t) f(t,y)|^2 \, dtdy \leq$$
$$\leq 2\pi \|v(x)\|^2 \max|v(t)|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t,y)|^2 \, dtdy =$$
$$= \{2\pi \|v(x)\|^2 \max|v(t)|^2\} \|f\|^2$$
$$C = \sqrt{2\pi \|v(x)\|^2 \max|v(t)|^2};$$
$$\|Tf\| \leq C\|f\|$$

Bu esa o‘z navbatida T ning chegaralangan operator ekanligini anglatadi. Bunda biz Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalandik.

Endi T operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekanligini tekshirish uchun ixtiyoriy $f, g \in L_2[-\pi;\pi]$ elementlar uchun

$$(Tf, g)(x,y) = (f, Tg)(x,y),$$

tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlaymiz.

$$(Tf, g)(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f(t,y) \, dt \, \overline{g(x,y)} dxdy =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) v(t) f(t,y) \, \overline{g(x,y)} dtdxdy =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t,y) v(t) \int_{-\pi}^{\pi} \overline{v(x) g(x,y)} dtdxdy =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \left[\overline{v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \, g(t,y) dt} \right] dxdy = (f, Tg)(x,y)$$

Ta’rifga ko‘ra T o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lar ekan.

1-tasdiq. $\lambda = 0$ soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy n natural soni uchun $f_k(x,y) = a(x) v_k(y), k = \overline{1,n}$ ko‘rinishdagi funksiyalarni olamiz. Bu yerda $a(\cdot) \in L_2[-\pi;\pi]$ fiksirlangan element, $v_k(\cdot), k = \overline{1,n}$ funksiyalar esa $v(\cdot)$ funksiyaga ortogonal chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar. Ularning mavjudligi $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosining cheksiz o‘lchami ekanligidan kelib chiqadi. Shu sababli

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(t) f_k(x,t) dt = a(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t) v_k(t) dt = 0, k = \overline{1,n}.$$

Demak, ixtiyoriy n natural soni uchun $Tf = 0$ tenglamaning n ta chiziqli bog‘lanmagan yechimlar sistemasi mavjud ekan. Bu esa o‘z navbatida 0 soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat ekanligini bildiradi.

Buni $v(x) = x$ funksiya misolida tahlil qilamiz. Mazkur holda $v_k(x) = x^{2k}, k = \overline{1,n}$ ko‘rinishdagi funksiya $v(\cdot)$ funksiyaga ortogonal chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar bo‘ladi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot x^{2k} dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+1} dx = 0, \ k = \overline{1, n}.$$

2-tasdiq. $\lambda = \|v\|^2$ soni T operator uchun 1 karrali xos qiymat bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, λ soni T operatorning nolmas xos qiymati, $f \in L_2[-\pi;\pi]$ esa unga mos xos funksiya bo‘lsin. U holda f funksiya

$$Tf = \lambda f$$

xos qiymatga nisbatan tenglamani, ya’ni

$$v(x) \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f(t,y) dt = \lambda f \ (5)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Yuqoridagi ifodaga quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$a(y) = \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f(t,y) dt. \ (6)$$

U holda (5) tenglamani quyidagi ko’rinishda yozib olish mumkin:

$$v(x) a(y) = \lambda f(x,y). \ (7)$$

(7) tenglikdan $f(x,y)$ ni topib olamiz:

$$f(x,y) = \frac{v(x)a(y)}{\lambda} \ (8)$$

$f(x,y)$ uchun topilgan (8) ifodani (6) tenglikga qo‘yamiz va

$$a(y) = \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \frac{v(t)a(y)}{\lambda} dt$$

tenglikni, ya’ni

$$a(y) \left[1 - \frac{\|v\|^2}{\lambda} \right] = 0$$

$$a(y) = 0 \Longrightarrow \ f(x,y) = 0$$

ifodani hosil qilamiz. Agar $a(y) = 0$ bo‘lsa, u holda (8) tenglikga ko‘ra $f(x,y) = 0$. Bu esa $f(x,y)$ ning xos funksiya ekanligiga zid. Demak, $a(y) \neq 0$. Shu sababli,

$$a(y) \neq 0 \ \Longrightarrow \ \lambda = \|v\|^2$$

ekanligi kelib chiqadi. Ushbu tenglik orqali yuqoridagi tasdiqning o‘rinli ekanligi isbotlandi. Isbot jarayonidan xos qiymatga mos xos funksiya (8) ko‘rinishda bo‘lishi va 1 karrali ekanligi kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdullayev J.I., G’anixo’jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz. O’quv-qo’llanma. Toshkent-Samarqand, 2009.

2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т. 4: Анализ операторов, Мир, М., 1982.

3. Friedrichs K.O. Perturbation of spectra in Hilbert space, 1965, AMS., Providence, Rhode Island.

4. Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schroedinger operators: problems and results, Advances in Sov. Math., 5 (1991), pp. 139-194.

5. Minlos R., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 177 (1996), pp. 159-193.

6. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 5 (2004), pp. 743-772.

7. Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теор. и мат. физика, 135:3 (2003), С. 478–503.

8. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices. Mathematische Nachrichten, 280:7 (2007), pp. 699–716.

9. Лакаев С.Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц. Теор. и мат. физика, 89:1 (1991), С. 94– 104.

10. Лакаев С.Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц. Функцион. анализ и его прил., 27:3 (1993), С. 15–28.

11. Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теор. и мат. физика, 136:2 (2003), С. 231–245.

12. Лакаев С.Н., Муминов З.Э. Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Функцион. анализ и его прил., 37:3 (2003), С. 85–88.

13. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices. Russian Journal of Mathematical Physics, 14:4 (2007), pp. 377–387.

14. Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles. Reports on Mathematical Physics, 63:3 (2009), pp. 359–380.

15. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), pp. 327-342.

16. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. Сибирские электронные математические известия. 12 (2015), С. 168-184.

17. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Известия вузов. Математика. № 1 (2014), С. 61-70.

18. Расулов Т.Х. Структура существенного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 26:2 (2012), С. 24-32.

19. Расулов Т.Х., Рахмонов А.А. Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра одного трехчастичного модельного оператора. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки, 23:2 (2011), С. 170-180.

20. Расулов Т.Х. Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теор. и мат. физика. 166:1 (2011), С. 95-109.

21. Т.Х.Расулов. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теор. и мат. физика.163:1 (2010), -С. 34-44.

22. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. European science. 51:2 (2020), Part II, pp. 19-22.

23. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. Academy. 55:4 (2020), pp. 8-13.

24. Rasulova Z.D. Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice. J. Pure and App. Math.: Adv. Appl., 11:1 (2014), pp. 37-41.

25. Rasulova Z.D. On the spectrum of a three-particle model operator. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, 25 (2014), pp. 57-61.

26. Расулова З.Д., Хамроева Х.Ю. Числовой образ модели Фридрихса с одномерным возмущением. Молодой учёный. 61:7 (2014), С. 27-29.

27. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbation. J. Math. Anal. Appl. 330:2 (2007), pp. 1152-1168.

28. Бахронов Б.И. Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. Вестник науки и образования. 94:16-2 (2020), С. 9-13.

29. Бахронов Б.И. О виртуальном уровне модели Фридрихса с двумерным возмущением. Наука, техника и образование. 72:8 (2020), С. 13-16.

30. Умиркулова Г.Х. Существенный и дискретный спектры семейства моделей Фридрихса. Наука и образование сегодня. 60:1 (2021), С. 17-20.