UCH ZARRACHALI MODEL OPERATORNING XOS FUNKSIYALARI UCHUN FADDEYEV TENGLAMASI

Gulhayo Umirqulova
Buxoro davlat universiteti
g_umirkulova1@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada panjaradagi uch zarrachali model operator muhim spektrining tarmoqlari aniqlangan hamda muhim spektrning ko'pi bilan uchta kesmalar birlashmasidan iboratligi aytib o'tilgan. Funksional analizning chiziqli operatorning spektri bilan bog'liq yordamchi ma'lumotlari bayon qilingan. Berilgan operatorning xos funksiyalar uchun Faddeyev tenglamasi qurilgan.

Kalit so'zlar: Model operator, muhim spektr, Hilbert fazosi, xos qiymat, xos funksiya, Faddeyev tenglamasi.

FADDEYEV'S EQUATION FOR THE EIGENFUNCTIONS OF THE THREE-PARTICLE MODEL OPERATOR

Gulhayo Umirkulova
Bukhara state university
g_umirkulova1@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we define the branches of the essential spectrum of the three-particle model operator is defined and it is stated that the essential spectrum of this operator consists the union of at most three bounded closed intervals. Auxiliary informations related to the spectrum of the linear operator from functional analysis are described. The Faddeev equation for the eigenfunctions of a given operator is constructed.

Keywords: model operator, essential spectrum, Hilbert space, eigenvalue, eigenfunction, Faddeev's equation.

KIRISH

Qattiq jismlar fizikasi, statistik fizika, kvant maydon nazariyasi va zamonaviy matematik fizikaning yana ko'plab sohalarida panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operatorlar uchrab turadi. Bunday operatorlarning muhim va diskret spektrini o'rganish masalasi esa o'z navbatida chiziqli operatorlar nazariyasining keng tadqiq qilinadigan masalalaridan biridir. Eslatib o'tish joizki, panjaradagi uchta zarrachali sistemaga mos model operatorlarning muhim va diskret spektrlarini o‘rganish tadqiq qilinadigan model operatorning xos funksiyalariga mos mashhur Faddeev tenglamasi bilan chambarchas bog‘liqdir. Shu nuqtai nazardan ushbu maqolada o‘rganilayotgan masala zamonaviy matematik fizikaning dolzarb muammolaridan biridir. Panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operatorlarning spektral xossalari [1-12] ishlarda va operatorli matritsalarning spektral xossalari esa [13-30] ishlarda o‘rganilgan. Muhim spektrni o‘rganishda Faddeev tenglamasi va Fredgolmning analitik teoremasi, xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksizligini ko‘rsatishda esa Faddeev tenglamasining simmetrik varianti uchun Birman-Shvinger prinsipi qo‘llaniladi.

YORDAMCHI MA’LUMOTLAR

Operatorlar nazariyasida spektr tushunchasi eng muhim tushunchalardan biridir. Chiziqli operator spektrini o‘rganish matematik fizika uchun muhimdir. Masalan, kvant mexanikasida sistema Hamiltoniani - bu Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatordir, uning spektrini o‘rganish sistema fizik xususiyatlarini o‘rganish uchun muhimdir. Spektr tushunchasini dastlab chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun eslatamiz.

Faraz qilaylik, $A:C^n \to C^n$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar biror λ son uchun $Ax=\lambda x$ tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo‘lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa xos vektor deyiladi. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, ya’ni $det(A-\lambda I)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud va u C^n fazoning hamma yerida aniqlangan bo‘ladi.

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta’kidlash lozimki, chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo‘lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax=\lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya’ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o‘lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to‘plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, u A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o‘lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o‘lchamli X fazoda berilgan bo‘lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli bo‘lgan uchinchi holat ham bo‘ladi, ya’ni:

ISSN: 2181-1601

3) $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax=\lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A-\lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$.

Agar $\lambda \in C$ son uchun $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud bo‘lib u X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to‘plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

A operatorning regulyar bo‘lmagan barcha nuqtalari to‘plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A-\lambda I)x=0$ tenglama nolmas $(x\neq 0)$ yechimga ega bo‘lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.

Ko‘rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to‘plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo‘lsa, $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

a) Barcha xos qiymatlar to‘plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

Agar λ xos qiymat bo‘lmasa va $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$, ya'ni $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to‘plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun muhim spektr ta'rifini keltiramiz.

Agar biror $\lambda \in \sigma(A)$ son uchun nolga kuchsiz yaqinlashuvchi $f_n \in H$ birlik vektorlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)f_n\|=0$$

bo‘lsa, u holda λ son $A=A^*$ operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi. A operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(A)$ bilan belgilanadi.

Operatorning nuqtali va qoldiq spektrlari o‘zaro kesishmaydi. Nuqtali va muhim spektrlar o‘zaro kesishishi mumkin.

NATIJALAR

T^1 - bir o'lchamli tor va $T^2=T^1\times T^1$ - dekart ko'paytma bo'lsin. $L_2^s(T^2)$ orqali T^2 da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2^s(T^2)$ Hilbert fazosida

$$(Hf)(x,y)=u(x,y)f(x,y)-\mu v_1(x)\int_{T^1} v_1(t)f(t,y)dt-\mu v_1(y)\int_{T^1} v_1(t)f(x,t)dt-$$
$$-\gamma\int_{T^1} v_2(t)f(t,x+y-t)dt;$$

formula bilan aniqlanuvchi model operatorni qaraymiz. Bu yerda $\mu,\gamma-$ ta'sirlashish parametri deb ataluvchi musbat sonlar, $v_\alpha(\cdot),\alpha=1,2$ $-T^1$ da aniqlanuvchi haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar va $u(\cdot,\cdot)$ $-T^2$da aniqlanganhaqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya.

$C\setminus[m;M]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_\mu^{(1)}(x;z):=1-\mu\int_{T^1}\frac{v_1^2(t)dt}{u(x,t)-z};$$
$$\Delta_\gamma^{(2)}(x;z):=1-\gamma\int_{T^1}\frac{v_2(t)dt}{u(t,x-t)-z};$$

funksiyalarni qaraymiz, bu yerda m va M sonlar quyidagicha aniqlangan:

$$m:=\min_{x,y\in T^1}u(x,y),\quad M:=\max_{x,y\in T^1}u(x,y).$$

$\sigma_\mu^{(1)}$ $(\sigma_\gamma^{(2)})$ orqali biror $x\in T^1$ uchun $\Delta_\mu^{(1)}(x;z)=0$ $(\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)=0)$ bo'ladigan z lar to'plamini belgilaymiz: $\sum_{\mu,\gamma}=\sigma_\mu^{(1)}\cup\sigma_\gamma^{(2)}\cup[m;M]$.

Har bir fiksirlangan $z\in C\setminus\sum_{\mu,\gamma}$ uchun $L_2^{(S)}(T^1)$ fazoda ta'sir qiluvchi $T_{\mu,\gamma}(z)$ blok-operatorli matritsani qaraymiz:

$$T_{\mu,\gamma}(z):=\begin{pmatrix}T_{11}(z) & T_{12}(z)\\ T_{21}(z) & 0\end{pmatrix}.$$

Bu yerda $T_{ij}(z):L_2(T^1)\to L_2(T^1),\ i,j=1,2$ –integral operatorlar:

$$(T_{11}(z)\varphi_1)(x)=\frac{\mu v_1(x)}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_1(t)dt}{u(x,t)-z};$$
$$(T_{12}(z)\varphi_2)(x)=\frac{\gamma}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(t-x)\varphi_2(t)dt}{u(t,t-x)-z};$$
$$(T_{21}(z)\varphi_1)(x)=\frac{\mu}{\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(x-t)(v_2(t)+v_2(x-t))\varphi_1(t)dt}{u(t,x-t)-z}.$$

Qu yidagi teorema $H_{\mu,\gamma}$ va $T_{\mu,\gamma}(z)$operatorlarning xos qiymatlari o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalaydi.

Teorema. $z\in C\setminus\sum_{\mu,\gamma}$ soni $H_{\mu,\gamma}$ operatorlarning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni $T_{\mu,\gamma}(z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, $z\in C\setminus\sum_{\mu,\gamma}$ soni $H_{\mu,\gamma}$ operatorning xos qiymati va f esa bu xos qiymatga mos xos funksiya bo'lsin. U holda f funksiya $H_{\mu,\gamma}f=zf$ tenglamani qanoatlantiradi. Bu tenglamani quyidagicha ko'rinishda yozib olamiz:

$$u(x,y)f(x,y)-H_{\mu,\gamma}(\alpha f+\beta g)\mu v_1(y)\int_{T^1} v_1(t)f(x,t)dt-$$
$$-\gamma\int_{T^1} v_2(t)f(t,x+y-t)dt=zf(x,y); \qquad (1)$$

quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$\varphi_1(x)=\int_{T^1} v_1(t)f(x,t)dt; \qquad (2)$$
$$\varphi_2(x)\int_{T^1} v_2(t)f(t,x-t)dt. \qquad (3)$$

So'ngra (2) va (3) tengliklarni (1) ifodaga qo'yib ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$(u(x,y)-z)f(x,y)=\mu v_1(x)\varphi_1(y)+\mu v_1(y)\varphi_1(x)+\gamma\varphi_2(x+y). \qquad (4)$$

Bu yerda $z\notin[m,M]$ bo'lganligi uchun barcha $x,y\in T^1$ larda $u(x,y)-z\neq 0$ munosabat bajariladi. Shu sababli, (4) ifodadan $f(x,y)$ ni topib olamiz:

$$f(x,y)=\frac{\mu v_1(x)\varphi_1(y)+\mu v_1(y)\varphi_1(x)+\gamma\varphi_2(x+y)}{u(x,y)-z}. \qquad (5)$$

Topilgan $f(x,y)$ ni (2) va (3) tengliklarga qo'yamiz:

$$\varphi_1(x)=\int_{T^1} v_1(t)\frac{\mu v_1(x)\varphi_1(t)+\mu v_1(t)\varphi_1(x)+\gamma\varphi_2(x+t)}{u(x,t)-z}dt;$$
$$\varphi_2(x)=\int_{T^1} v_2(t)\frac{\mu v_1(t)\varphi_1(x-t)+\mu v_1(x-t)\varphi_1(t)+\gamma\varphi_2(x)}{u(t,x-t)-z}dt.$$

Har ikkala tengliklarni soddalashtirib, ularni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\left(1-\mu\int_{T^1}\frac{v_1^2(t)dt}{u(x,t)-z}\right)\varphi_1(x)=\mu v_1(x)\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_1(t)}{u(x,t)-z}dt+\gamma\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_2(x+t)}{u(x,t)-z}dt;$$
$$\left(1-\gamma\int_{T^1}\frac{v_2(t)dt}{u(t,x-t)-z}\right)\varphi_2(x)=\mu\int_{T^1}\frac{v_2(t)v_1(t)\varphi_1(x-t)dt}{u(t,x-t)-z}+\mu\int_{T^1}\frac{v_2(t)v_1(x-t)\varphi_1(t)dt}{u(t,x-t)-z}.$$

Oxirgi tengliklarni qulay ko'rinishga keltirish maqsadida quyidagicha shakl almashtirishlardan foydalanamiz:

$$\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_2(x+t)}{u(x,t)-z}dt=[t\to t-x]=\int_{T^1}\frac{v_1(t-x)\varphi_2(t)}{u(x,t-x)-z}dt;$$
$$\int_{T^1}\frac{v_2(t)v_1(t)\varphi_1(x-t)dt}{u(t,x-t)-z}=[t\to x-t]=\int_{T^1}\frac{v_2(x-t)v_1(x-t)\varphi_1(t)dt}{u(x-t,t)-z};$$

Yuqoridagi tengliklardan foydalanganda quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\Delta_\mu^{(1)}(x;z)\varphi_1(x)=\mu v_1(x)\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_1(t)}{u(x,t)-z}dt+\gamma\int_{T^1}\frac{v_1(t-x)\varphi_2(t)}{u(x,t-x)-z}dt;$$
$$\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)\varphi_2(x)=\mu\int_{T^1}\frac{v_1(x-t)(v_2(t)+v_2(x-t))\varphi_1(t)dt}{u(t,x-t)-z}.$$

Aniqlanishiga ko'ra istalgan $z\notin\sigma_\mu^{(1)}$ va $x\in T^1$ lar uchun $\Delta_\mu^{(1)}(x;z)\neq 0$.

Xuddi shuningdek ixtiyoriy $z\notin\sigma_\gamma^{(2)}$ va $x\in T^1$ lar uchun $\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)\neq 0$.

Bularni inobatga olgan holda:

$$\varphi_1(x)=\frac{\mu v_1(x)}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(t)\varphi_1(t)dt}{u(x,t)-z}+\frac{\gamma}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(t-x)\varphi_2(t)dt}{u(t,t-x)-z};$$

$$\varphi_2(x)=\frac{\mu}{\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v_1(x-t)(v_2(t)+v_2(x-t))\varphi_1(t)dt}{u(t,x-t)-z};$$

tengliklarni hosil qilamiz.

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T_{11}(z)\varphi_1)(x)+(T_{12}(z)\varphi_2)(x)\\ (T_{21}(z)\varphi_1)(x)\end{pmatrix};$$

$$T_{\mu,\gamma}(z):=\begin{pmatrix}T_{11}(z) & T_{12}(z)\\ T_{21}(z) & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

$T_{\mu,\gamma}(z)$ operatorning matritsaviy elementlari ta'rifiga ko'ra oxirgi tenglamalar sistemasini

$$\varphi=T_{\mu,\gamma}(z)\varphi \tag{7}$$

operatorli tenglamalar ko'rinishida yozish mumkin. Shunday qilib, (1) tenglamalar sisitemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun (7) tenglama nolmas yechimga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, ushbu tenglamalar sisitemasi va operatorli tenglama yechimlari qism fazosining o'lchamlari teng bo'ladi. Ya'ni agar z soni $H_{\mu,\gamma}$ operator uchun n karrali xos qiymat bo'lsa, u holda 1 soni $T_{\mu,\gamma}(z)$ operator uchun ham n karrali xos qiymat bo'ladi. Teorema to'liq isbotlandi.

Eslatma. Odatda $\varphi=T_{\mu,\gamma}(z)\varphi$ operatorli tenglamalarga $H_{\mu,\gamma}$ model operator xos funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi deyiladi.

REFERENCES

1. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. *European science,* 2(51), 19-22.
2. Расулов Т.Х., Рахмонов А.А. (2011). Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра одного трехчастичного модельного оператора. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2(23), 170-180.
3. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. (2020). Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. *Academy,* 4(55), 8-13.
4. Расулов Т.Х. (2010). Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. *Теоретическая и математическая физика,* 1(163), 34-44.
5. Умарова У.У. (2018). Аналог системы интегральных уравнений Фаддеева для трехчастичного модельного оператора. *Учёные* XXI *века,* 5-3(40), 14-15.
6. Расулов Т.Х. (2012). Структура существенного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2(26), 24-32.

7. Расулов Т.Х. (2011). Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. *Теоретическая и математическая физика*. 1(166), 95-109.
8. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. (2015). Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. *Сибирские электронные математические известия*, 12, 168-184.
9. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. (2014). Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. *Известия вузов. Математика,* 1, 61-70.
10. Rasulov T.H. (2014). Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian. *Contem. Analysis and Appl. Mathematics*, 2(2), 179-198.
11. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2014). Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 3(5), 327-342.
12. Умиркулова Г.Х. (2020). Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке. *Вестник науки и образования,* 16-2 (94), 14-17.
13. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, 42-46.
14. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 105-106.
15. Дилмуродов Э.Б. (2016). Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, 7-9.
16. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2015). Связь между числовым образом и спектром модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Молодой ученый*, 9, 20-23.
17. Тошева Н.А. (2020). Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3x3-операторных матриц. *Наука, техника и образование*, 8(72), 9-12.
18. Дилмуродов Э.Б. (2018). Спектр и квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11, 1-3.
19. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2014). Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. *Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 35 (2), 50–63.
20. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2019). Threshold effects for a family of 2x2 operator matrices. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 10(6), 4-8.
21. Бахронов Б.И., Холмуродов Б.Б. (2021). Изучение спектра одной 3x3-операторной матрицы с дискретным спектром. *НТО*, 2-2(77), 31-34.
22. Muminov M., Rasulov T., Tosheva N. (2019). Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. *Comm. in Math. Analysis*, 1(11), 17-37.

23. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), 368-390.
24. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2020). Analysis of the spectrum of a 2x2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 2(11), 138-144.
25. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2019). Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 6(10), 616-622.
26. Dilmurodov E. (2020). Discrete eigenvalues of a 2x2 operator matrix. ArXiv:2011.09650. 1-12.
27. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2020). Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices. Methods Func. Anal. Topology, 1(25), 273-281.
28. Бахронов Б.И. (2020). Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. ВНО, 16-2(94), 9-13.
29. Бахронов Б.И. (2020). О виртуальном уровне модели Фридрихса с двумерным возмущением. Наука, техника и образование, 8(72), 13-16.
30. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. (2021). Явный вид резольвенты обобщенной модели Фридрихса. Наука, техника и образование, 2-2(77), 39-43.