МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ СЕМЕЙСТВ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Умиркулова Г.Х. Email: Umirkulova1177@scientifictext.ru

Умиркулова Гулхаё Хусниддин кизи – магистр,
кафедра математического анализа, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет,
г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *данная работа посвящена исследованию числа и местонахождения собственных значений двух семейств моделей Фридрихса* $h_\mu^{(1)}(x)$ *и* $h_\gamma^{(2)}(x)$ $\mu,\gamma>0$, $x\in(-\pi;\pi]^1$, *ассоциированных с системами двух квантовых частиц на одномерной решетке. Рассматриваемые семейства являются линейными, ограниченными и самосопряженными операторами в комплексном гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций, определенных на* $(-\pi;\pi]^1$. *Определено число собственных значений моделей Фридрихса* $h_\mu^{(1)}(x)$ *и* $h_\gamma^{(2)}(x)$, *изучено местоположение этих собственных значений, а также найдены их условия существования.*

Ключевые слова: *семейства моделей Фридрихса, определитель Фредгольма, собственные значения.*

LOCATION OF THE EIGENVALUES OF THE TWO FAMILIES OF FRIEDRICHS MODELS

Umirkulova G.H.

Umirkulova Gulhayo Husniddin kizi – Master Student,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL ANALYSIS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY,
BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this paper is devoted to the number and location of the eigenvalues of the two families of the Friedrichs models* $h_\mu^{(1)}(x)$ *u* $h_\gamma^{(2)}(x)$ $\mu,\gamma>0$, $x\in(-\pi;\pi]^1$, *associated with the system of two quantum particles on the one dimensional lattice. Considered families are linear bounded and self-adjoint operator in complex Hilbert space of square integrable functions defined on* $(-\pi;\pi]^1$. *The number of the eigenvalues of the Friedrichs models* $h_\mu^{(1)}(x)$ *u* $h_\gamma^{(2)}(x)$ *are defined, the location of these eigenvalues are studied and its existence conditions are found.*

Keywords: *Friedrichs model, system of two particles, essential spectrum.*

УДК 517.984

Пусть T^1 - одномерный тор и $L_2(T^1)$-гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на T^1. В гильбертовом пространстве $L_2(T^1)$ рассматривается два семейства моделей Фридрихса вида

$$h_\mu^{(1)}(x)=h_0^{(1)}(x)-\mu v_1;\; h_\gamma^{(2)}(x)=h_0^{(2)}(x)-\gamma v_2.$$

Здесь операторы $h_0^{(\alpha)}(x)$ и v_α, $\alpha = 1,2$ определены следующим образом:

$$(h_0^{(1)}(x)f)(y) = u(x,y)f(y),$$

$$(h_0^{(2)}(x)f)(y) = u(x,x-y)f(y), \quad f \in L_2(T^1);$$

$$(v_1 f)(y) = v(y)\int_{T^1} v(t)f(t)dt, \ (v_2 f)(y) = \int_{T^1} f(t)dt; \quad f \in L_2(T^1).$$

Где $\mu, \gamma > 0$ – положительные вещественные числа, $v(\cdot)$- вещественнозначная непрерывная функция на T^1 и $u(\cdot,\cdot)-$ вещественнозначная непрерывная функция T^2.

Пользуясь определениями линейности, ограниченности, самосопряженности оператора, можно показать, что оба семейства моделей Фридрихса $h_\mu^{(1)}(x)$ и $h_\gamma^{(2)}(x)$ являются линейными, ограниченными и самосопряженными в $L_2(T^1)$. Легко можно проверить, что

$$\sigma_{ess}(h_\mu^{(1)}(x)) = [m(x);M(x)]; \ \sigma_{ess}(h_\gamma^{(2)}(x)) = [m(x);M(x)];$$

где числа $m(x)$ и $M(x)$ определяются равенствами:

$$m(x) := \min_{y\in T^1} u(x,y), \ M(x) := \max_{y\in T^1} u(x,y).$$

При каждом фиксированном $x \in T^1$ определим регулярные в области $C \setminus [m(x);M(x)]$ функции

$$\Delta_\mu^{(1)}(x;z) = 1 - \mu\int_{T^1} \frac{v^2(t)}{u(x;t)-z}dt; \ \Delta_\gamma^{(2)}(x;z) = 1 - \gamma\int_{T^1} \frac{dt}{u(x;t)-z}.$$

Обычно функции $\Delta_\mu^{(1)}(x;\cdot)$ и $\Delta_\gamma^{(2)}(x;\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_\mu^{(1)}(x)$ и $h_\gamma^{(2)}(x)$ соответственно.

Лемма 1. Для дискретного спектра $\sigma_{disc}(h_\mu^{(1)}(x))$ и $\sigma_{disc}(h_\gamma^{(2)}(x))$ операторов $h_\mu^{(1)}(x)$ и $h_\gamma^{(2)}(x)$ имеют места равенства:

$$\sigma_{disc}(h_\mu^{(1)}(x)) = \{z \in C \setminus [m(x);M(x)]; \Delta_\mu^{(1)}(x;z) = 0\};$$

$$\sigma_{disc}(h_\gamma^{(2)}(x)) = \{z \in C \setminus [m(x);M(x)]; \Delta_\gamma^{(2)}(x;z) = 0\}.$$

Обозначим

$$m := \min_{x,y\in T^1} u(x,y), \quad M := \max_{x,y\in T^1} u(x,y).$$

Рассмотрим задачу о существовании собственных значений, операторов $h_\mu^{(1)}(x)$ и $h_\gamma^{(2)}(x)$, лежащих левее точки m и правее точки M.

Пусть интеграл $\int_{T^1} \frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-m}$ расходится при некотором $x = x_0 \in T^1$, т.е.

$$\lim_{z\to m-0}\int_{T^1}\frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-m}=+\infty\cdot$$

Тогда $\lim\limits_{z\to m-0}\Delta_\mu^{(1)}(x_0;z)=-\infty$. Так как $\lim\limits_{z\to-\infty}\Delta_\mu^{(1)}(x_0;z)=1$ и функция $\Delta_\mu^{(1)}(x;\cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty;m)$ существует единственная точка $z=z_0$ такая, что $\Delta_\mu^{(1)}(x_0;z_0)=0$ В силу леммы. 1 при всех $\mu>0$ оператор $h_\mu^{(1)}(x_0)$ имеет единственное собственное значение $z_0\in(-\infty;m)$.

Пусть теперь при всех $x\in T^1$ интеграл $\int_{T^1}\frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-m}$

конечен. Тогда из

$$\Delta_\mu^{(1)}(x;m)=1-\mu\int_{T^1}\frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-m}\ge 0$$

следует, что

$$\mu\le\left(\int_{T^1}\frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-m}\right)^{-1}=:\mu_0(x).$$

Таким образом, в силу леммы 1 при $\mu\le\mu_0(x)$ оператор $h_\mu^{(1)}(x)$ не имеет собственных значений в $(-\infty;m)$. В противном случае, т.е. когда $\mu>\mu_0(x)$ оператор $h_\mu^{(1)}(x)$ имеет единственное собственное значение, лежащих на $(-\infty;m)$. По определению

$$\Delta_\mu^{(1)}(x;M)=1-\mu\int_{T^1}\frac{v^2(t)dt}{u(x;t)-M}>1$$

и $\lim\limits_{z\to-\infty}\Delta_\mu^{(1)}(x;z)=1$ Поэтому при всех $\mu>0$ и $x\in T^1$ оператор $h_\mu^{(1)}(x)$ не имеет собственных значений, лежащих правее точки M.

Аналогично, если при некотором $x_0\in T^1$ интеграл $\int_{T^1}\frac{dt}{u(x_0;t)-m}$ расходится, то $\Delta_\gamma^{(2)}(x_0;z)=-\infty$. В этом случае для любого $\gamma>0$ оператор $h_\gamma^{(2)}(x_0)$ имеет единственное собственное значение, ниже m.

В случае, когда интеграл $\int_{T^1}\frac{dt}{u(x;t)-m}$ сходится, обозначением его чрез $(\gamma_0(x))^{-1}$. Верны следующие утверждение: 1) При $\gamma<\gamma_0(x)$ оператор $h_\gamma^{(2)}(x)$ не имеет собственных значений, лежащих на промежутке $(-\infty;m)$; 2) Если $\gamma>\gamma_0(x)$, то оператор $h_\gamma^{(2)}(x)$ имеет единственное собственное значение, лежащее левее точки m.

Следует отметить, многие задачи, связанные с собственными значениями семейства моделей Фридрихса и обобщенных моделей Фридрихса, исследованы в работах [1-28].

Список литературы / References

1. *Umirkulova G.H., Rasulov T.H.* Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice // European science. 51:2 (2020). Part II. C. 19-22.
2. *Умиркулова Г.Х.* Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке // Вестник науки и образования. 16-2 (94), 2020. С. 14-17.
3. *Умиркулова Г.Х.* Использование Mathcad при обучении теме «квадратичные функции» // Проблемы педагогики. № 6 (51), 2020. С. 93-95.
4. *Умиркулова Г.Х.* Существенный и дискретный спектры семейства моделей Фридрихса // Наука и образование сегодня. № 1 (60), 2020. С. 17-20.
5. *Rasulova Z.D.* Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice // J. Pure and App. Math.: Adv. Appl., 11:1 (2014). C.37-41.
6. *Rasulova Z.D.* On the spectrum of a three-particle model operator // Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, 25 (2014). C. 57-61.
7. *Rasulov T.H., Rasulova Z.D.* Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014). C. 327-342.
8. *Расулов Т.Х., Расулова З.Д.* Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами // Сибирские электронные математические известия. 12 (2015). С. 168-184.
9. *Расулова З.Д., Хамроева Х.Ю.* Числовой образ модели Фридрихса с одномерным возмущением // Молодой учёный. 61:7 (2014). С. 27-29.
10. *Ekincioglu I., Ikromov I.A.* On the boundedness of integral operators // Turkish journal of Mathematics. 23:2 (2000). C. 257-264.
11. *Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А.* Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. 152:3 (2007). С. 502–517.
12. *Икромов И.А., Шарипов Ф.* О дискретном спектре неаналитической матричнозначной модели Фридрихса // Функц. анализ и его прил., 32:1 (1998). С. 63–65.
13. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices // Methods Func. Anal. Topology, 25:1 (2019). C. 273-281.
14. *Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А., Лакаев С.Н.* О вложенных собственных значениях и резонансах обобщенной модели Фридрихса // Теоретическая и математическая физика. 103:1 (1995). С. 54–62.
15. *Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.* Исследование числовой области значений одной операторной матрицы // Вестник Самарского государственного технического университета, Серия физ.-мат. науки, 35:2 (2014). С. 50-63.
16. *Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A.* Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices // Communications in Mathematical Analysis, 11:1 (2020). C. 17-37.
17. *Rasulov T.H., Tosheva N.A.* Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 10:5 (2019). C. 511-519.
18. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 10:6 (2019). C. 616-622.

19. *Rasulov T.H.* On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix // Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1 (2016). С. 48-61.
20. *Расулов Т.Х.* Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // Теор. матем. физика, 161:3 (2009). С. 164-175.
21. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // Математические заметки. 73:4 (2003). С. 556-564.
22. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра // Функциональный анализ и его приложения, 37:1 (2003). С. 81-84.
23. *Расулов Т.Х.* О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теор. матем. физика, 186:2 (2016). С. 293-310.
24. *Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case // J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.
25. *Муминов М.Э., Расулов Т.Х.* Формула для нахождения кратности собственных значений дополнения Шура одной блочно-операторной матрицы 3x3 // Сибирский математический журнал, 54:4 (2015). С. 878-895.
26. *Расулов Т.Х.* О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал. 52:2 (2011). С. 400-415.
27. *Muminov M.I., Rasulov T.H.* On the number of eigenvalues of the family of operator matrices. // Nanosystems: Phys., Chem., Math., 5:5 (2014). С. 619-625.
28. *Dilmurodov E.B., Rasulov T.H.* Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation // European science. 51:2 (2020). С. 7-10.