СУЩЕСТВЕННЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРЫ СЕМЕЙСТВА МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Умиркулова Г.Х.

Умиркулова Гулхаё Хусниддин кизи – магистр,
кафедра математики, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *в настоящей статье рассматриваются два семейства моделей Фридрихса $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$, $\mu > 0$, $\alpha = 1,2$, $x \in (-\pi;\pi]^d$, ассоциированные с системой двух квантовых частиц на d-мерной решетке. Эти семейства рассматриваются как линейные, ограниченные и самосопряженные операторы в комплексном гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций, определенных на $(-\pi;\pi]^d$. Описан существенный спектр модели Фридрихса $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$. Установлена связь между нулями собственных значений $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$ и нулями определителя Фредгольма. Найден явный вид дискретного спектра модели Фридрихса $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$.*

Ключевые слова: *модель Фридрихса, система двух частиц, существенный спектр.*

УДК 517.984

Пусть C, R, Z и N - множество всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно. Для каждого фиксированного $d \in N$ через T^d обозначим d-мерный куб $(-\pi;\pi]^d$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе T^d рассматривается как абелева группа в котором операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в R^d по модулю $(2\pi Z)^d$. Например, если $d=3$ и

$$a=\left(\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right),\quad b=\left(\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$a+b=\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}\right),\quad 6a=(\pi,0,\pi)\in T^3.$$

Пусть $L_2(T^d)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на T^d. Рассмотрим два семейства моделей Фридрихса $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$, $\mu > 0$, $\alpha = 1,2$, $x \in T^d$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(T^d)$ по формуле

$$h_{\mu}^{(\alpha)}(x) := h_0^{(\alpha)}(x) - \mu v_{\alpha},$$

где операторы $h_0^{(\alpha)}(x)$ и v_α определяются по правилам:

$$(h_0^{(1)}(x)f)(y)=u(x,y)f(y),\ f\in L_2(T^d);$$

$$(h_0^{(2)}(x)f)(y)=u(x,x-y)f(y),\ f\in L_2(T^d);$$

$$(v_1f)(y)=\varphi_1(y)\int_{T^d}\varphi_1(t)f(t)dt,\ f\in L_2(T^d);$$

$$(v_2f)(y)=\int_{T^d}\varphi_2(t)f(t)dt,\ f\in L_2(T^d).$$

Здесь μ положительное число так называемой параметр взаимодействия, $\varphi_\alpha(\cdot),\alpha=1,2$ – вещественнозначные непрерывные функции на T^d и $u(\cdot,\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $(T^d)^2$. В этих предположениях используя инструменты функционального анализа можно показать, что модель Фридрихса $h_\mu^{(\alpha)}(x)$ является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2\left(T^d\right)$.

Оператор возмущения μv_α оператора $h_0^{(\alpha)}(x)$ является самосопряженным оператором ранга 1. Из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu^{(\alpha)}(x))$ оператора $h_\mu^{(\alpha)}(x)$ не зависят от значения параметра взаимодействия μ и совпадает с существенным спектром оператора $h_0^{(\alpha)}(x)$. В свою очередь для существенного спектра невозмущенного оператора $h_0^{(\alpha)}(x)$ имеет место равенство $\sigma_{ess}(h_0^{(\alpha)}(x))=[m(x);M(x)]$, где числа $m(x)$ и $M(x)$ определяются равенствами

$$m(x):=\min_{y\in T^d}u(x,y),\ M(x):=\max_{y\in T^d}u(x,y).$$

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(h_\mu^{(\alpha)}(x))=[m(x);M(x)].$$

Отметим, что для некоторого $x\in T^d$ существенный спектр оператора $h_\mu^{(1)}(x)$ может превратиться в точку $\{m(x)\}$ и, следовательно, для любого $x\in T^d$ мы не можем сказать, что существенный спектр оператора $h_\mu^{(1)}(x)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $u(\cdot,\cdot)$ имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{d}(3-\cos(x_i)-\cos(x_i+y_i)-\cos(y_i)),\ y=(y_1,\dots,y_d)\in T^d,$$

и $x=\overline{\pi}:=(\pi,\dots,\pi)\in T^d$, то $\sigma_{ess}(h_\mu^{(1)}(x))=\{4d\}$.

При каждом фиксированном $\mu > 0$ и $x \in T^d$ определим регулярную в $C \setminus [m(x); M(x)]$ функцию

$$\Delta_{\mu}^{(1)}(x;z) := 1 - \mu \int_{T^d} \frac{\varphi_1^2(t)dt}{u(x,t) - z}; \ \Delta_{\mu}^{(2)}(x;z) := 1 - \mu \int_{T^d} \frac{\varphi_2(t)dt}{u(t,x-t) - z}.$$

Обычно для $\alpha = 1,2$ функция $\Delta_{\mu}^{(\alpha)}(x;\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$.

Лемма 1. Пусть $\alpha = 1,2$. При каждом фиксированном $\mu > 0$ и $x \in T^d$ число $z_{\mu}^{(\alpha)}(x) \in C \setminus [m(x); M(x)]$ является собственным значением оператора $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu}^{(\alpha)}(x; z_{\mu}^{(\alpha)}(x)) = 0$.

Из леммы 1 следует, что для дискретного спектра оператора $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$ имеет место равенство

$$\sigma_{disc}(h_{\mu}^{(\alpha)}(x)) = \{z \in C \setminus [m(x); M(x)] : \Delta_{\mu}^{(\alpha)}(x;z) = 0\}.$$

Из определения функции $\Delta_{\mu}^{(1)}(x;\cdot)$ видно, что при $z > M(x)$ имеет место соотношение $\Delta_{\mu}^{(1)}(x;z) > 1$. Поэтому согласно лемме 1 при каждом $\mu > 0$ и $x \in T^d$ оператор $h_{\mu}^{(1)}(x)$ не имеет собственных значений, лежащих правее точки $M(x)$. С помощью аналитических свойств таких определителей Фредгольма можно изучит спектральные свойства решетчатых модельных операторов [1 -26].

Список литературы

1. *Umirkulova G.H., Rasulov T.H.* Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice // European science. 51:2 (2020). Part II. Pp. 19-22.
2. *Умиркулова Г.Х.* Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке // Вестник науки и образования. 16-2 (94), 2020. С. 14-17.
3. *Умиркулова Г.Х.* Использование Mathcad при обучении теме «квадратичные функции» // Проблемы педагогики. № 6 (51), 2020. С. 93-95.
4. *Rasulova Z.D.* Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice // J. Pure and App. Math.: Adv. Appl. 11:1 (2014). Pp. 37-41.
5. *Rasulova Z.D.* On the spectrum of a three-particle model operator // Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 25 (2014). Pp. 57-61.
6. *Rasulov T.H., Rasulova Z.D.* Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 5:3 (2014). Pp. 327-342.
7. *Расулов Т.Х., Расулова З.Д.* Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами // Сибирские электронные математические известия. 12 (2015). С. 168-184.
8. *Расулова З.Д., Хамроева Х.Ю.* Числовой образ модели Фридрихса с одномерным возмущением // Молодой учёный. 61 (7), 2014. С. 27-29.

9. *Ekincioglu I., Ikromov I.A.* On the boundedness of integral operators // Turkish journal of Mathematics. 23:2 (2000). Pp. 257-264.
10. *Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А.* Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. 152:3 (2007). С. 502–517.
11. *Икромов И.А., Шарипов Ф.* О дискретном спектре неаналитической матричнозначной модели Фридрихса // Функц. анализ и его прил. 32:1 (1998). С. 63–65.
12. *Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А., Лакаев С.Н.* О вложенных собственных значениях и резонансах обобщенной модели Фридрихса // Теоретическая и математическая физика. 103:1 (1995). С. 54–62.
13. *Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.* Исследование числовой области значений одной операторной матрицы // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. 35:2 (2014). С. 50-63.
14. *Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A.* Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices // Communications in Mathematical Analysis. 11:1 (2020). Pp. 17-37.
15. *Rasulov T.H., Tosheva N.A.* Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math. 10:5 (2019). Pp. 511-519.
16. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices // Methods Func. Anal. Topology. 25:1 (2019). Pp. 273-281.
17. *Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.* Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices // Nanosystems: Phys., Chem., Math. 10:6 (2019). Pp. 616-622.
18. *Rasulov T.H.* On the finiteness of the discrete spectrum of a 3x3 operator matrix // Methods of Functional Analysis and Topology, 22:1 (2016). Pp. 48-61.
19. *Расулов Т.Х.* Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // Теорет. и матем. физика. 161:3 (2009). Стр. 164-175.
20. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // Математические заметки. 73:4 (2003). С. 556-564.
21. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра // Функциональный анализ и его приложения. 37:1 (2003). С. 81.
22. *Расулов Т.Х.* О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теор. матем. физика. 186:2 (2016). С. 293-310.
23. *Муминов М.Э., Расулов Т.Х.* Формула для нахождения кратности собственных значений дополнения Шура одной блочно-операторной матрицы 3x3 // Сибирский математический журнал. 54:4 (2015). С. 878-895.
24. *Расулов Т.Х.* О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал. 52:2 (2011). С. 400-415.
25. *Расулов Т.Х.* Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // Теорет. матем. физика. 161:2 (2009). С. 164-175.
26. *Dilmurodov E.B., Rasulov T.H.* Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation // European science. 51 (2), 2020. Pp. 7-10.