Мирзо Улуғбек номидаги
Ўзбекистон Миллий Университети

ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги
Математика институти

Академик С.Х.Сирожиддинов таваллудининг 100 йиллигига бағишланган «Математика ва амалий математиканинг замонавий муаммолари» мавзусида Республика миқёсидаги ёш олимлар илмий онлайн конференцияси

21 май 2020 йил
Тошкент

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз

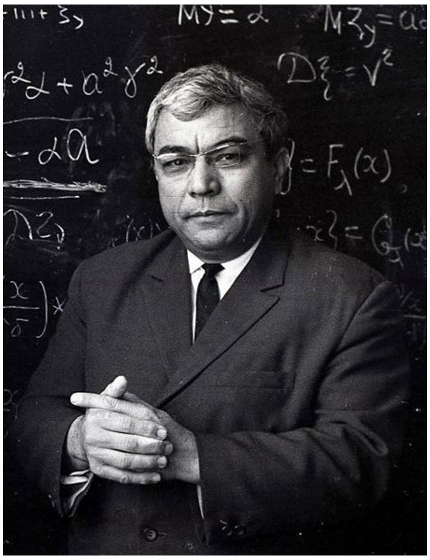
МАТЕРИАЛЫ

РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНОЙ ОНЛАЙН КОНФЕРЕНЦИИ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ»

ПОСВЯЩЕННОЙ 100 ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА С.Х.СИРАЖДИНОВА

(21 мая 2020 г.)



Ташкент - 2020

Мундарижа/Содержание

Напряжении $\Sigma_1(x,z,t)$ и $\Sigma_2(x,z,t)$ связано с $U(x,z,t)$ формулой:

$$\begin{cases} \Sigma_1(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,z,\tau)d\tau \\ \Sigma_2(x,z,t) = \mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z} + \displaystyle\int_0^t k(x,t-\tau)\mu(z)\dfrac{\partial U}{\partial z}(x,z,\tau)d\tau, \end{cases} \tag{4}$$

где $k(x,t)$ характеризует вязкость среды, интегральный оператор описывает влияние предыстории на процесс распространения упругих волн, вызванных приложенным на границе области R^3_+ в момент времени $t=0$ мгновенно действующим источником (3), а $\mu(z)-$коэффициент Ламе и принадлежать множеству $\Lambda := \Big\{\mu(z) \in C^3([0,\infty)) : \mu(z) > 0;\ \mu'(+0) = 0\Big\}$.

Задача определения U и V из уравнений (1)-(3) при известных функциях $\mu(z)$ и $k(x,t)$ называется прямой задачей для вязкоупругой пористой среды.

Приведем обратные задачу:

Задача. *Требуется определить ядро $k(x,t)$, $t>0$, $x \in R$, входящее в уравнение (1) посредством формул (4), если относительно решения прямой задачи известна информация:*

$$U\Big|_{z=0} = f(x,t),\ x \in R,\ t > 0, \tag{5}$$

где $f(x,t)-$ заданная функция (отклик).

Для исследования обратной задачи, используется способ задания данных обратной задачи для уравнения в полупространстве - задаются два момента функции $k(x,t)$:

$$k(x,t) = k_0(t) + \epsilon x k_1(t) + \dots,$$

Оказывается, в этом случае задача сводится к цепочке из двух одномерных обратных задач. Доказаны теоремы, характеризующие однозначная разрешимость определения неизвестных функций для любого фиксированного отрезка.

Литература

1. *Dorovsky V.N.* The Continual Theory of Filtration, Geology and Geophysics, № 7, 1989, pp. 39-45.

2. *Dorovsky V.N.,Perepechko Yu.V., Romensky E.I.* Wave processes in saturated porous elastically deformed media, Combustion, Explosion and Shock Waves, V 29, № 1, 1993, pp. 93-103.

Определение матричного ядра в гиперболической системе уравнений первого порядка с памятью

Дурдиев Дурдимурод Каландарович, Турдиев Халим Хамраевич

Бухарский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор.
Бухарский государственный университет, Phd докторант кафедры математики
e-mail: durdiev65@mail.ru, hturdiev@mail.ru

Многие физические процессы описываются гиперболическими системами уравнений в частных производных первого порядка, например система уравнений акустики, электромагнитных колебаний, динамических уранений теории упругости и другие. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из них при некоторых дополнительных ограничениях. Поэтому представляется совершенно естественным изучение обратных задач проводить непосредственно в терминах самой системы. Систематические изучения в этом направлении начали проводиться с 70-х годов прошлого столетия в работах Л.П. Нижника [1], С.П. Белинского [2], В.Г. Романова и Л.И. Слинючевой [3].

Явление с памятью (с запаздыванием) возникает в таких системах, где учитывается не только настоящее положение системы или ее ближайшее предыдущее положение (т.е. начальные значения параметров определяющих состояние системы, а также некоторые производные по времени), но также все предществующие положения, которые занимала данная система, иначе говоря, это явление зависит от предыдущей истории системы. Примером может служить явление вязкоупругости, в котором деформация вязкоупругой среды зависит не только от природы применяемых сил, но также от предыдущих деформаций, которым была подвергнута среда. Такая среда называется средой с "памятью"или "последействием"[4]. Другими явлениями такого рода являются распространение электромагнитных волн в средах с дисперсией [5], система популяций животных или растений различных видов в математической биологии [6].

В Математическом отношении такие явления описываются в основном гиперболической системой интегро–дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свертки относительно временной переменной. Обратные задачи, заключающихся в определении ядра интегралов в этих системах играют важную роль в прикладных науках. К настоящему времени достаточно широко изучены задачи определения ядер из одного интегро–дифференциального уравнения второго порядка (см. например, [7]-[14] и цитированные в них литературу).

В данной работе исследуется обратная задача определения ядра в гиперболической системе интегро–дифференциальных уравнений первого порядка, которое имеет вид матрицы размерности $n \times n$ зависящей от временной переменной t.

Рассмотрим в области $D = (x,t) : 0 < x < H, t > 0$ систему из n уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t B(\tau)u(x,t-\tau)d\tau + f(x,t) \qquad (1)$$

относительно вектор функции $u(x,t)$ с компонентами $u_1, u_2, ..., u_n$. Здесь $A,\ B-$ квадратные матрицы размерности $n \times n$, причем $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$; $B(t) = (b_{ij})$, $i,j = 1,2,\dots,n,\ f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), \dots, f_n(x,t))$. λ_k- вещественные, различные постоянние и

$$\lambda_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, s;\ \lambda_k < 0,\ k = s+1, \ldots, n;\ 0 \leq s \leq n. \tag{2}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие начальные и граничные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq H, \tag{3}$$

$$u_i(0, t) = g_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$u_i(H, t) = g_i(x),\ i = s+1, \ldots, n. \tag{4}$$

Всюду в этой работе запись вектор функций в произведении с матрицами понимается в виде строки, если он умножается слева и в виде столбца, если умножение производится справа.

Поставленная задача (1) – (4) является корректной [15], [16]. Пусть теперь рассматривается n задачи вида (1) – (4), каждая со своим набором функций $f,\ \varphi,\ g_i$, но с одними и теми же матрицами $A,\ B$

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x}\right)u^l = \int_0^t B(\tau)u^l\,(x, t-\tau)\,d\tau + f^l(x, t),$$
$$u^l|_{t=0} = \varphi^l(x),\ 0 \leq x \leq H, \tag{5}$$
$$u_i^l(0, t) = g_i^l(t),\ i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$u_i^l(H, t) = g_i^l(t),\ i = s+1, \ldots, n,\ l = 1, 2, \ldots, n,$$

где $E-$ единичная матрица размерности $n \times n$.

Обратная задача: найти матрицу $B(t)$, $t > 0$, если относительно решений задачи (5) известна следующая информация:

$$u_i^l(0, t) = h_i^l(t),\ i = s+1, \ldots, n,$$
$$u_i^l(H, t) = h_i^l(t),\ i = 1, 2, \ldots, s,\ l = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Отметим, что начально–краевая задача (5) при каждом l имеет единственное непрерывное решение в области D, если $\varphi^l \in C\,[0, H]\,,\ g_i^l \in C\,[0, \infty)\,,\ B \in C\,[0, \infty)$ и выполнены условия согласования начальных и граничных данных

$$\varphi_i^l(0) = g_i^l(0),\ i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$\varphi_i^l(H) = g_i^l(0),\ i = s+1, \ldots, n,\ l = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где φ_i^l- компоненти вектора φ^l.

Замечание Вместо системы (1) может быть рассмотрена более общая гиперболическая по И.Г. Петровскому [17] система уравнений. Но, тогда существует невырожденное преобразование функций, что такая система приводится к виду (1) [18].

Также предположим, что выполнены следующие условия:

$$f_i^l(0, 0) - \lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l\Big|_{x=0} = \frac{d}{dt}g_i^l(t)\Big|_{t=0},\quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

$$f_i^l(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l\Big|_{x=H}=\frac{d}{dt}g_i^l(t)\Big|_{t=0},\quad i=s+1,\ldots,n,\quad l=1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Через $\Phi(x)$ обозначим матрицу, образованную столбцами $\varphi^l(x)$, $l=1,\ldots,n$:

$$\Phi(x)=\left(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n\right)(x).$$

Далее будем предполагать, что выполнены условия

$$\det\Phi(0)\neq 0,\ \det\Phi(H)\neq 0. \tag{9}$$

Следующие равенства выражают условия согласования данных прямой и обратной задач в угловых точках области D :

$$h_i^l(0)=\varphi_i^l(0),\ \frac{d}{dt}h_i^l(t)\Bigg|_{t=0}=f_i^l(0,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)\Bigg|_{x=0},\ i=s+1,\ldots,n, \tag{10}$$

$$h_i^l(0)=\varphi_i^l(H),\ \frac{d}{dt}h_i^l(t)\Bigg|_{t=0}=f_i^l(H,0)-\lambda_i\frac{d}{dx}\varphi_i^l(x)\Bigg|_{x=H},\ i=1,\ldots,s,\ l=1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

Основным результатам настоящей работы является следующее утвеждение об однозначной разрешимости обратной задач:

Теорема. *Пусть* $f^l(x,t)\in C^1(D)$, $\varphi^l(x)\in C^2[0,H]$, $g^l(t)\in C^2(0,\infty)$, $h_i^l(t)\in C^2(0,\infty)$. *Кроме того, выполнены условия* (7), (8), (9) *и имеют место равенства* (10), (11).

Тогда найдется такое $H^*>0$, *что для* $H\in\left(0,H^*\right)$ *решение обратной задачи* (5), (6) *существует, единственно на отрезке* $\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$, $\mu=\min\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ *и определестся заданием* $h_i^l(t)$ *для* $t\in\left[0,\frac{H}{|\lambda_i|}\right]$ в классе $B(t)\in C^1[0,H]$.

Теорема доказывается заменой равенств (5), (6) замкнутой системой интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций и дальнейшем применением метода сжатых отображений к ней.

Литература

1. *Нижник Л. П.* Обратная задача для нестационарного рассеяния для гиперболической системы уравнений, В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи, Киев: ИМ АН УССР. 1971. стр. 205-210.

2. *Белинский С. П.* Об одной обратной задаче для линейных симметрических $t-$ гиперболических систем с $n+1$ независимыми переменными, Диф. уравнения, вып. 2. № 1, 1976, стр 15–23.

3. *Романов В. Г., Слинючева Л. И.* Обратная задача для гиперболических систем первого порядка, Математические проблемы геофизики, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. вып. 3, 1972, стр. 184-215.

4. *Дурдиев Д. К.* Обратные задачи для сред с последействием, Ташкент. ТУРОН–ИКБОЛ., 2014.

5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред, Москва: Наука,1959.

6. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро–дифференциальных уравнений, название журнала, М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. литер, 1982.

7. *Avdonin S., Ivanov S., Wang J.* OInverse problems for the heat equation with memory, Inverse problems and Imaging, № 13:1, 2019, P. 31-38.

8. *Colombo F. and Guidetti D.* Some results on the Identification of memory kernels, Oper. Theory, Adv.Appl.216, 2011, P. 121–138.

9. *Дурдиев Д. К., Рашидов А. Ш.* Обратная задача определения ядра в од-ном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа, Дифференц.уравнения, № 50:1, 2014, стр. 110-116.

10. *Janno J. and Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time - and space-dependent memory kernel in viscoelasticity, Inverse Problems, № 17:1, 2001, P. 13 – 24.

11. *Romanov V. G.*Inverse problems for differential equations with memory, Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications, № 2:4, 2014, P. 51-80.

12. *Романов В. Г.*Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости, Сиб. журн. индустр. матем, № 15:1, 2012, стр. 86-98.

13. *Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики, Дифференц. уравнения,№ 54:1, 2018, стр. 136-144.

14. *Тотиева Ж. Д., Дурдиев Д. К.* Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости , Матем. заметки, № 103:1, 2018, стр. 129-146.

15. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984, стр. 264.

16. *Романов В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Нов-ск: НГУ, 1973, стр. 252.

17. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики, М. Наука, 1971, стр. 416.

18. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., 1988, стр. 581.

Об одной задаче с интегральными условиями для дифференциального уравнения второго порядка

Исломова М. Н.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

lady.ochilova@bk.ru

В работе рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) + a(t)f(u) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$