ISNN:2181-1296

ШАРОФ РАШИДОВ НОМИДАГИ САМАРҚАНД
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНА ШАРОФА РАШИДОВА

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED
AFTER SHAROF RASHIDOV

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
SCIENTIFIC JOURNAL

ANIQ VA TABIIY FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika
Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

№ 1(137/2)
2023

ISSN 2181-1296

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2023-yil, 1-son (137/2) **ANIQ VA TABIY FANLAR SERIYASI**

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika, Kimyo, Biologiya, Geografiya

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA

UDK: 517.9 **https://doi.org/10.59251/2181-1296.2023.v1.1.1874**

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Х.Х.Турдиев, А.А. Болтаев
Бухарский государственный университет,
Институт Математики Академии наук Республики Узбекистан
E-mail: hturdiev@mail.ru,

Аннотация. Для системы интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости в анизотропной среде изучается прямая задача определенная вектор смешения, а также диагональная матрица эредитарности. Задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа относительно образа Фурье по одной из пространственных переменных решения прямой задачи. Далее к этой системе применяется метод последовательных приближений в классе непрерывных функций. Таким образом, доказывается теорема существования и единственности решение поставленной прямой задачи.

Ключевые слова: гиперболическая система, задача Коши, интегральное уравнение, метод последовательных приближений.

Annotatsiya. Anizotrop muhitdagi viskoelastiklikning o’rama ko’rinishdagi yadroga ega bo’lgan integro-differensial tenglamalari sistemasi uchun to'g'ri masalasini qaradik, To'g'ri masala yechimning birinchi ikkita fazoviy o'zgaruvchilari bo’yicha Furye almashtirishi qo’llanildi va Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamalarning ekvivalent sistemasiga keltirildi. Bundan tashqari, ushbu integral tenglamalar sistemasiga uzluksiz funktsiyalar sinfidagi ketma-ket yaqinlashish usuli qo'llanildi. So’ngra, qo'yilgan to'g'ri masala yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlandi.

Kalit so'zlar: giperbolik sistema, to'g'ri masala, integral tenglama, Furye almashtirishi, ketma-ket yaqinlashishlar usuli.

Direct issue for the system of integro-differential equations in viscous resistant anisotropic sphere

Abstract. For a system of integro-differential equations of viscoelasticity in an anisotropic medium, we study the direct problem of a certain mixing vector, as well as the diagonal matrix of heredity. The problem is reduced to an equivalent system of integral equations of the second kind of the Volterra type with respect to the Fourier image in two of the spatial variables of the direct solution. Further, the method of successive approximations in the class of continuous functions is applied to this system. Thus, the theorem of existence and uniqueness of the solution for the posed direct problem is proved.

Key words: hyperbolic system, direct problem, integral equation, Fourier transform, method of successive approximations.

Введение. Многим средам (материалам) свойственна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, которая отсутствует в уравнениях теории упругости. В настоящей работе для системы уравнений теории упругости с учётом вязкоупругих свойств, написанной в двумерном случае в напряжениях и скоростях частиц как система уравнений первого порядка, изучаются прямые задачи. При этом прямая задача есть начально-краевая задача для этой системы.

Рассмотрим анизотропные среды с матрицей независимых модулей упругости следующего вида (тригональная система) [1]:

$$c_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0\\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0\\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0\\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25}\\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14}\\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2}\end{pmatrix}.$$

Уравнения движения частиц плоского тела при отсутствии внешних сил имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, i=1,2, \qquad (1)$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\rho=\rho(x_3)>0$ – постоянная плотность среды, $\overline{u}(x,t)=(\overline{u}_1(x,t),\overline{u}_2(x,t),\overline{u}_3(x,t))$ – вектор смещений, в вязкоупругих анизотропных средах для тензора напряжений имеет место представление [2]:

$$\sigma_{ij}(x,t)=\sum_{k,l=1}^{3}c_{ijkl}\left[S_{kl}+\int_0^t K_{ij}(t-\tau)S_{kl}(x,\tau)\right], \qquad i,j=1,2,3, \qquad (2)$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right), \qquad i,j=1,2,3,$$

$c_{ijkl}=c_{ijkl}(x_3)$ — модули упругости, $K_{ij}(t)$ — матричная релаксационная функция и $K_{ij}=K_{ji}$, $i,j=\overline{1,3}$.

Обратим внимание на то, что (2) могут быть рассмотрены как интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно выражение $\sum_{k,l=1}^{3}c_{ijkl}S_{kl}$. При каждой фиксированной паре (i,j)решая эти уравнения и дифференцируя (3) по t. Вводя обозначения $u_i=\frac{\partial}{\partial t}\overline{u}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{ij}(x,t)=\sum_{k,l=1}^{3}c_{ijkl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+r_{ij}(0)\sigma_{ij}(x,t)+\int_0^t r'_{ij}(t-\tau)\sigma_{ij}(x,\tau)d\tau. \quad (3)$$

где r_{ij} – резольвенты ядер K_{ij} и они связаны между собой интегральными соотношениями [3]:

$$r_{ij}(t)=-K_{ij}(t)-\int_0^t K_{ij}(t-\tau)r_{ij}(\tau)d\tau, \quad i,j=1,2,3. \qquad (4)$$

С учётом этого, система уравнений (2) и (3) относительно скорости u_i и напряжения σ_{ij} может быть написана в виде системы пяти интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\left(I\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x_1}+B\frac{\partial}{\partial x_2}+C\frac{\partial}{\partial x_3}+D\right)U(x,t)=\int\limits_0^t R(t-\tau)U(x,\tau)d\tau, \qquad (6)$$

где $U=(u_1,u_2,u_3,\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{22},\sigma_{23},\sigma_{33})^*$, $*$ - знак транспонирования и I - единичная матрица размерности 9.

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} & \begin{matrix} -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -c_{11} & -c_{14} & c_{25} \\ -c_{12} & -c_{25} & 0 \\ -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_{14} & -c_{44} & 0 \\ c_{25} & 0 & -c_{44} \\ 0 & -c_{25} & -c_{14} \end{matrix} & \boldsymbol{O}_{6\times6} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -c_{14} & -c_{12} & 0 \\ c_{14} & -c_{11} & 0 \\ 0 & -c_{13} & 0 \\ -c_{44} & -c_{14} & -c_{25} \\ 0 & -c_{25} & -c_{14} \\ -c_{25} & 0 & \frac{c_{12}-c_{11}}{2} \end{matrix} & \boldsymbol{O}_{6\times6} \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_{25} & 0 & -c_{13} \\ c_{25} & 0 & -c_{13} \\ 0 & 0 & -c_{33} \\ 0 & -c_{25} & 0 \\ -c_{44} & -c_{14} & 0 \\ -c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \end{matrix} & \boldsymbol{O}_{6\times6} \end{pmatrix},$$

$$D=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{3\times3} & \boldsymbol{O}_{3\times6}\\ \boldsymbol{O}_{6\times3} & -r_{ii}(0)I_{6\times6}\end{pmatrix},\qquad R=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{3\times3} & \boldsymbol{O}_{3\times6}\\ \boldsymbol{O}_{6\times3} & r'_{ii}I_{6\times6}\end{pmatrix},\qquad i=\overline{1,6}.$$

здесь $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ – ноль матрица размерности $m\times n$.

Система (6) может быть сведена к симметрической гиперболической системе [4].

Систему (6) приведем к каноническому виду относительно переменных t и x_3. Для этого составим уравнение

$$det|C-\lambda I|=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет корни

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}},\ \lambda_2=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sqrt{a_1-\sqrt{a_2}},\ \lambda_3=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sqrt{a_1+\sqrt{a_2}}, \qquad (8)$$

$$\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=0, \qquad (9)$$

$$\lambda_7=-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sqrt{a_1+\sqrt{a_2}},\ \lambda_8=-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sqrt{a_1-\sqrt{a_2}},\ \lambda_9=\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, \qquad (10)$$

где $a_1=c_{11}-c_{12}+2c_{44}$, $a_2=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})^2+16c_{14}^2$.

Теперь выбирем невырожденную матрицу $T(x_3,t)$ так, что выполнялось равенство

$$T^{-1}CT=\Lambda, \qquad (11)$$

где Λ – диагональная матрица, в диагонали которой стоят собственные числа (при каждой фиксированном x_3) (8), (11), (10) матрицы C. Из формулы (11) следует равенство

$$CT=T\Lambda,$$

которое означает, что столбец с номером i матрицы T является собственным вектором матрицы CT, отвечающему собственному значению λ_i. Прямые вычисления показывает, что матрица T, удовлетворяющая вышесказанным условиям, может быть выбрана как (не единственным образом)

$$T(x_3)=$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & \frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & \frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0 & 0 & 0 & \frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & \frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-\frac{c_{13}}{\lambda_1} & \frac{c_{25}}{\lambda_2} & \frac{c_{25}}{\lambda_3} & 1 & 0 & 1 & -\frac{c_{25}}{\lambda_3} & -\frac{c_{25}}{\lambda_2} & \frac{c_{13}}{\lambda_1}\\
-\frac{c_{13}}{\lambda_1} & -\frac{c_{25}}{\lambda_2} & -\frac{c_{25}}{\lambda_3} & 1 & 0 & 1 & \frac{c_{25}}{\lambda_3} & \frac{c_{25}}{\lambda_2} & \frac{c_{13}}{\lambda_1}\\
-\lambda_1\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1\rho\\
0 & -\frac{c_{25}}{\lambda_2}\cdot\frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & -\frac{c_{25}}{\lambda_3}\cdot\frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0 & 0 & 1 & \frac{c_{25}}{\lambda_3}\frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & \frac{c_{25}}{\lambda_2}\cdot\frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0\\
0 & -\lambda_2\rho & -\lambda_3\rho & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\rho & \lambda_2\rho & 0\\
0 & -\lambda_2\rho\frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & -\lambda_3\rho\frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\rho\frac{a_3+\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & \lambda_2\rho\frac{a_3-\sqrt{a_2}}{4c_{14}} & 0
\end{pmatrix}$$

где $a_3=c_{11}-c_{12}-2c_{44}$.

Введем вектор функцию U равенством

$$U=T\vartheta.$$

Выполнив эту замену в уравнении (6) и после этого умножив его слева на T^{-1}, получим

$$\left(I\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial}{\partial x_3}+B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+C_1\frac{\partial}{\partial x_2}+F_1\right)\vartheta=\int_0^t R_1(t-\tau,x_3)\vartheta(x,\tau)d\tau, \qquad (12)$$

где,

$B_1(x_3)=T^{-1}AT=(b_{ij}),\ C_1(x_3)=T^{-1}BT=(c_{ij}),\ F_1(x_3)=T^{-1}C\frac{\partial T}{\partial x_3}+T^{-1}DT=(p_{ij}),$ $R_1(x_3,t)=(\tilde{r}_{ij})$.

Система (12) удобна в том смысле, что она распалось относительно производных по t и x_3, и оказывается зацепленной только через $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ и ϑ.

Компоненты ϑ_i, $i=1,2,3,7,8,9$вектор функции ϑ называются римановыми инвариантами системы (6).

Постановка и исследование задачи

Рассмотрим систему уравнений (12) в области

$\Omega=\{(x_1,x_2,x_3,t):(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,x_3\in(0,H),t>0\},\quad H=const.$

Для этой системы прямую задачу поставим следующим образом: определить решение системы уравнений (12) в $\overline{\Omega}$ воспользуясь следуюўими условиями

$$\vartheta_i|_{t=0}=\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,9}, \qquad (13)$$

$$\vartheta_i|_{x_3=H}=g_i(x_1,x_2,t),\quad i=\overline{1,3},\quad \vartheta_i|_{x_3=0}=g_i(x_1,x_2,t),\quad i=\overline{7,9}. \qquad (14)$$

Известно, что [4], [5] задача (12), (13), (14) поставлена корректна. Предположим, что функции $\varphi_i(x),g_i(x_1,x_2,t),F_1$ финитны поx_1и x_2 при каждом фиксированном x_3,t обладают гладкостью до некоторой степени. Заметим, что класс функций, удовлетворящих этим условиям, не пуст.

Изучим свойства решения этой задачи. Точнее, ограничимся изучением преобразования Фурье по переменным x_1, x_2решения. В дальнейшем для удобства положим $x_3=z$ и введем обозначение

$$\hat{\vartheta}(\eta_1,\eta_2,z,t)=\int_{\mathbb{R}^2}\vartheta(x_1,x_2,z,t)e^{i[\eta_1x_1+\eta_2x_2]}dx_1dx_2,$$

где η_1,η_2 – параметры преобразования. Зафиксируем η_1, η_2 и для удобства введем обозначение $\hat{\vartheta}(\eta_1,\eta_2,z,t)=\hat{\vartheta}(z,t)$.

В терминах функции $\hat{\vartheta}$ запишем задачу (12)-(14) как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\vartheta}_j(z,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\hat{p}_{jk}(z)\hat{\vartheta}_k(z,t)+\int_0^t\sum_{k=1}^{9}\tilde{r}_{jk}(z,\tau)\hat{\vartheta}_k(z,t-\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,9}, \qquad (15)$$

где $\hat{p}_{jk}=-i\eta_1b_{jk}-i\eta_2c_{jk}-p_{jk}$.

Аналогичные обозначения будем использовать для образов Фурье функций, входящих в начальные и граничные условия (13)-(14):

$$\hat{\vartheta}_i|_{t=0}=\hat{\varphi}_i(z),\quad i=\overline{1,9}, \qquad (16)$$

$$\hat{\vartheta}_i|_{z=H}=\hat{g}_i(t),\quad i=\overline{1,3},\quad \hat{\vartheta}_i|_{z=0}=\hat{g}_i(t),\quad i=\overline{7,9}, \qquad (17)$$

где $\hat{\varphi}_i(z),\ i=\overline{1,9},\ \hat{g}_i(t),\ \ i=1,2,3,7,8,9$ – образы Фурье соответствующих функций из (13), (14) при $\eta=0$. Мы также обозначаем через Ω_H проекцию Ω на плоскость z,t. Далее будем рассматривать систему уравнений (15) в области $\overline{\Omega}_H$ при условиях (16) и (17).

Перейдем от равенств (15)-(17) к интегральным соотношениям для компонент вектора $\hat{\vartheta}$ с потоком интегрирования по соответствующим характеристикам уравнений уравнения система (15). Обозначим

$$\mu_i(z)=\int_0^z \frac{1}{\lambda_i(\beta)}d\beta, \qquad i=1,2,3,7,8,9,$$

$$\mu_j(z)=0, \quad j=4,5,6.$$

Функции, обратные к $\mu_i(z),\ i=\overline{1,9}$, будем обозначать $z=\mu_i^{-1}(t),\ i=\overline{1,9}$. С помощью введенных функций уравнения характеристик, проходящих через точки (z,t) на плоскости переменных ξ,τ, можно записать в виде [6], [7]

$$\tau=t+\mu_i(\xi)-\mu_i(z), \qquad i=\overline{1,9}. \tag{18}$$

Возьмем произвольную точку $(z,t)\in\Omega_H$ на плоскости переменных ξ,τ и проведем через нее характеристику i–системы (15) уравнение указывает на пересечение в области $\tau\ \le\ t$. Точка пересечения обозначается (z_0^i,t_0^i). Интегрируя уравнения системы (15) по соответствующим характеристикам от точки (z_0^i,t_0^i) до точки (z,t), находим

$$\hat{\vartheta}_i(z,t)=\hat{\vartheta}_i(z_0^i,t_0^i)+\int_{t_0^i}^{t}\sum_{k=1}^{9}\hat{p}_{jk}(\xi)\hat{\vartheta}_k(\xi,\tau)|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{9}\tilde{r}_{jk}(\xi,\tau-\alpha)\hat{\vartheta}_k(\xi,\alpha)d\alpha|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau, \qquad i=\overline{1,9}. \tag{19}$$

Определим в (19) t_0^i. Это зависит от координат точки (z,t). Нетрудно видеть, что $t_0^i\ (z,t)$ имеет вид

$$t_0^i(z,t)=\begin{cases} t-\mu_i(z)+\mu_i(H), & t\ge\mu_i(z)-\mu_i(H),\\ 0, & 0<t<\mu_i(z)-\mu_i(H),\end{cases} \qquad i=1,2,3,$$

$$t_0^i(z,t)=0, \quad i=4,5,6,$$

$$t_0^i(z,t)=\begin{cases} t-\mu_i(z), & t\ge\mu_i(z),\\ 0, & 0<t<\mu_i(z),\end{cases} \qquad i=7,8,9.$$

Тогда из условия, что пара (z_0^i,t_0^i) удовлетворяет уравнению (18), следует

$$z_0^i(z,t)=\begin{cases} H, & t\ge\mu_i(z)-\mu_i(H),\\ \mu_i^{-1}(\mu_i(z)-t), & 0<t<\mu_i(z)-\mu_i(H),\end{cases} i=1,2,3,$$

$$z_0^i(z,t)=z, \qquad i=4,5,6,$$

$$z_0^i(z,t)=\begin{cases} 0, & t\ge\mu_i(z),\\ \mu_i^{-1}(\mu_i(z)-t), & 0<t<\mu_i(z),\end{cases} i=7,8,9.$$

Свободные члены интегральных уравнений (19) определяются через начальные и граничные условия (16) и (17) следующим образом:

$$\hat{\vartheta}_0^i(z_0^i,t_0^i)=\begin{cases}\hat{g}_i(t-\mu_i(z)+\mu_i(H)), & t\geq\mu_i(z)-\mu_i(H),\\ \hat{\varphi}_i\left(\mu_i^{-1}(\mu_i(z)-t)\right), & 0<t<\mu_i(z)-\mu_i(H),\end{cases}\quad i=1,2,3,$$

$$\hat{\vartheta}_0^i(z_0^i,t_0^i)=\hat{\varphi}_i(z),\quad i=4,5,6,$$

$$\hat{\vartheta}_0^i(z_0^i,t_0^i)=\begin{cases}\hat{g}_i(t-\mu_i(z)), & t\geq\mu_i(z),\\ \hat{\varphi}_i\left(\mu_i^{-1}(\mu_i(z)-t)\right), & 0<t<\mu_i(z),\end{cases}\quad i=7,8,9.$$

Потребуем, чтобы функции $\hat{\vartheta}_i(z_0^i,t_0^i)$ были непрерывны в области Ω. Отметим, что для выполнения этих условий заданные $\hat{\varphi}_i$ и $\hat{g}_i$ функции должны удовлетворять условиям согласования в угловых точках области D, т.е.

$$\hat{\varphi}_i(0)=\hat{g}_i(H),\quad i=1,2,3,\qquad \hat{\varphi}_i(0)=\hat{g}_i(0),\quad i=7,8,9. \qquad (20)$$

Здесь и далее значения функций $\hat{g}_i$, $i=1,2,3,7,8,9$ при $t=0$ и функций $\hat{\varphi}_i$, $i=1,2,3,7,8,9$

при $z=0$ и $z=H$ понимаются как предел в этих точках при стремлении аргумента состороны точки, где эти функции определены.

Основной результат и его доказательство. Предположим, что все заданные функции, входящие в (19), являются непрерывными функциями своих аргументов в Ω_H. Тогда эта система уравнений представляет собой замкнутую систему интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с непрерывными ядрами и свободными членами. Как обычно, такая система имеет единственное решение в ограниченной подобласти $\Omega_{HT}=\{(z,t):0<z<H,\ 0<t<T\}$, $T>0$ – некоторое фиксированный номер, домен Ω_H.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Предположим, что функции* $F_1(x_1,x_2,z,t)$, $\varphi(x_1,x_2,z)$, $g(x_1,x_2,t)$ *являются компактной поддержкой в* x_1,x_2 *для каждого фиксированного* z,t. *Пусть* $\rho(z)$, $c_{33}(z)$, $c_{44}(z)$, $c_{11}(z)$, $c_{12}(z)$, $\hat{\varphi}(z)\in C^1[0,H]$, $\hat{g}(t)\in C^1[0,T]$, $\rho(z)>0$, $c_{33}(z)>0$, $c_{44}(z)>0$, $c_{11}(z)>0$, $c_{12}(z)>0$, $r_{ij}(t)\in C^1[0,T]$, $i,j=1,2,$*и условия (20) выполнены. Тогда существует единственное решение задачи (15)-(17) в области* $\overline{\Omega}_{HT}$.

Доказательство: Для доказательства теоремы используем метод, примененный в работах [8], [9]. Прежде всего остановимся на свойствах функций $\hat{\vartheta}_i(z,t)$, определяемых уравнениями (19). Покажем, что в этом случае уравнения (19) имеют единственное решение в классе непрерывных функций, которое может быть получено методом последовательных приближений. Пусть

$$\gamma_0=\max\left\{\max_{1\leq i\leq 9}\|\hat{\varphi}_i(z)\|_{C[0,H]},\quad \max_{i=1,2,3,7,8,9}\|\hat{g}_i(t)\|_{C[0,T]}\right\},$$

$$p_0=\max\left\{\max_{1\leq i,j\leq 9}\|\hat{p}_{ij}(z)\|_{C[0,H]},\quad \max_{1\leq i,j\leq 9}\|\tilde{r}_{ij}(z,t)\|_{C[D_{HT}]}\right\}.$$

Построим для уравнения (19) метод последовательных приближений по следующей схеме:

$$\upsilon_i^0(z,t)=\hat{\vartheta}_i(z_0^i,t_0^i),\quad i=\overline{1,9},$$

$$\upsilon_i^1(z,t)=\upsilon_i^0(z,t)+\int_{t_0^i}^{t}\sum_{k=1}^{9}\hat{p}_{jk}(\xi)\upsilon_k^0(\xi,\tau)|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{9}\tilde{r}_{jk}(\xi,\tau-\alpha)\upsilon_k^0(\xi,\alpha)d\alpha|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau,\qquad i=\overline{1,9}.$$

Аналоговый общий термин формируется в следующем виде:

$$\upsilon_i^n(z,t)=\upsilon_i^0(z,t)+\int_{t_0^i}^{t}\sum_{k=1}^{9}\hat{p}_{jk}(\xi)\upsilon_k^{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{9}\tilde{r}_{jk}(\xi,\tau-\alpha)\upsilon_k^{n-1}(\xi,\alpha)d\alpha|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau,\qquad i=\overline{1,9}.$$

Очевидно, каждая из функций $\upsilon_i^n(z,t)$ непрерывна в области Ω_{HT} . В этой области имеются оценки

$$|\upsilon_i^0(z,t)|\le\gamma_0,$$

$$|\upsilon_i^1(z,t)|\le\gamma_0\left(1+9p_0\left(t+\frac{t^2}{2!}\right)\right),$$

$$|\upsilon_i^2(z,t)|\le\gamma_0\left(1+9p_0\left(t+\frac{t^2}{2!}\right)+(9p_0)^2\left(\frac{t^2}{2!}+2\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)\right).$$

Если оценивать таким образом, то для общего термина будет уместна следующая оценка:

$$|\upsilon_i^n(z,t)|\le\gamma_0\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(9p_0)^kC_k^j\frac{t^{j+k}}{(j+k)!},\quad i=\overline{1,9}.\qquad(21)$$

Покажем, что ряд Неймана

$$\upsilon_i^0(z,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\upsilon_i^n(z,t)-\upsilon_i^{n-1}(z,t)\right),\qquad(22)$$

сходится абсолютно и равномерно, а значит, их сумма является непрерывной функцией в области Ω_{HT}.

Его частичная сумма совпадает с функцией $\upsilon_i^n(z,t)$, поэтому этот ряд мажорируется рядом

$$\gamma_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(9p_0)^kC_k^j\frac{t^{j+k}}{(j+k)!},$$

который, в свою очередь, для всех $(z,t)\in\Omega_{HT}$ смягчается сходящимся числовым рядом

$$\gamma_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(9p_0)^kC_k^j\frac{T^{j+k}}{(j+k)!}.$$

Итак, ряд Неймана (22) сходится абсолютно и равномерно, а значит, его сумма является непрерывной функцией в области D_{HT}. Как обычно, нетрудно доказать, что сумма ряда является решением интегрального уравнения (19).

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. Предположим, что существуют два решения $\upsilon_i^{(1)}(z,t)$ и $\upsilon_i^{(2)}(z,t)$ уравнения (19). Тогда их разность$\omega_i(z,t)=\upsilon_i^{(1)}(z,t)-\upsilon_i^{(2)}(z,t)$ является решением уравнения

$$\omega_i(z,t)=\int_{t_0^i}^{t}\sum_{k=1}^{9}\hat{p}_{jk}(\xi)\omega_k(\xi,\tau)|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_{0}^{\tau}\sum_{k=1}^{9}\tilde{r}_{jk}(\xi,\tau-\alpha)\omega_k(\xi,\alpha)d\alpha|_{\xi=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(z)]}d\tau,\quad i=\overline{1,9}.$$

Обозначим $\widehat{\omega}(t)$ максимум модулей функции $\omega(z,t)$ по $z\in[0,H]$ для каждого фиксированного $t\in[0,T]$. Тогда имеет место неравенство

$$\widehat{\omega}(t)\le 9p_0(1+T)\int_{t_0^i}^{t}\widehat{\omega}(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T],$$

откуда по лемме Гронуолла следует, что $\widehat{\omega}(t)\equiv 0$ при $t\in[0,T]$. Следовательно, мы также имеем $\omega(z,t)\equiv 0$ в Ω_{HT}, т.е. $\upsilon_i^{(1)}(z,t)\equiv\upsilon_i^{(2)}(z,t)$ в Ω_{HT}. Начально-краевая задача (15)-(17) имеет единственное решение в Ω_{HT} [10]. Доказательство теоремы завершено.

Литературы

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах // М.:Наука, 1982.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости // М.:Наука, 1980, стр 242.
3. Durdimurod D., Shishkina E., Sitnik S. The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, Issue. 6, pp. 1264-1273.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики // М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит. 1979.
5. Romanov V. G. Inverse problems of mathematical physics // Utrecht, The Netherlands, 1987.
6. Durdiev D.K., Turdiev Kh.Kh. Inverse Problem for a First-Order Hyperbolic System with Memory // Differential equations. 2020. Issue 12. pp.666-1675.
7. Durdiev D.K., Turdiev Kh.Kh. The problem of finding the kernels in the system of integro-differential Maxwell's equations // Sib. Zh. Ind. Mat. 2021, Vol. 24:2, pp.38-61.
8. Durdiev D.Q., Boltaev A.A. Initial-boundary problem for 2D system of viscoelasticity // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2021, Vol. 4, No2.
9. Boltaev A.A. Initial-boundary problem for 3D system of viscoelasticity // Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 2, pp.35-44
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.