BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

4/2023

https://buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
4/2023

E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004
ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 4, may

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruruiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК: 517.968.72

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ-ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Дурдиев Дурдимурод Қаландарович,
Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Узбекистана, ул. Университетская,
4б, Ташкент 100174, Узбекистан.
ddurdiev@mathinst.uz
Турдиев Халим Хамроевич,
Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбола, 11, Бухара 200114, Узбекистан
Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбола, 11, Бухара 200114, Узбекистан
hturdiev@mail.ru
Тошев Дилшод Аваз ўғли,
Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Узбекистана, ул. Университетская,
4б, Ташкент 100174, Узбекистан.
Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбола, 11, Бухара 200114, Узбекистан
toshevdilshod1996@gmail.com

Аннотация: *В данной работе рассматривается задача типа Коши-Гурсы для гиперболического уравнения. Доказана корректность задачи типа Коши-Гурсы для гиперболического уравнения. Уравнение этой задачи было проинтегрировано в области характеристического треугольника и сведено к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, что эквивалентно задаче. Существование решения этого интегрального уравнения проверялось методом последовательных приближений (Пикара). Единственность этого решения доказана с использованием неравенства Гронуолы-Беллмана.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, принцип Дюамеля, неравенство Гронуолы - Беллмана, обратная задача, метод последовательных приближений.*

GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN KOSHI-GURSA TIPIDAGI MASALANING YECHIMI

Annotatsiya: *Ushbu ishda giperbolik tenglama uchun Koshi-Gursa tipidagi masala qaralgan. Giperbolik tenglama uchun Koshi-Gursa tipidagi masala korrekt ekanligi isbotlangan. Bunda masaladagi tenglamadan xarakteristik uchburchak sohasida integral olib, masalaga ekvivalent bo'lgan ikkinchi tur Volterra tipidagi integral tenglamaga keltirilgan. Bu integral tenglama yechimining mavjudligi qaralayotgan funksiyalar sinfida, ketma-ket yaqinlashish usuli (Pikar) yordamida isbotlangan. So'ngra Gronuola-Bellman tengsizligi yordamida yechimning yagonaligi isbotlangan*

Kalit so'zlar: *giperbolik tenglama, Dyuamel prinsipi, Gronuola-Bellman tengsizligi, teskari masala, ketma-ket yaqinlashishlar usuli.*

SOLUTION OF A CAUCHY-HOURS TYPE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION

Annotation: *In this paper, we consider a Cauchy-Goursat type problem for a hyperbolic equation. The correctness of the problem of the Cauchy-Goursat type for a hyperbolic equation is proved. The equation of this problem was integrated in the region of the characteristic triangle and reduced to an integral equation of the Volterra type of the second kind, which is equivalent to the problem. The existence of a solution to this integral equation was verified by the method of successive approximations (Picard). The uniqueness of this solution is proved using the Gronwola-Bellman inequality.*

Keywords: *hyperbolic equation, Duhamel principle, Gronwola-Bellman inequality, inverse problem, method of successive approximations.*

Методы. В работе используются метод аналитического решения дифференциального уравнения гиперболического типа, алгебраические методы и метод последовательных приближений.

Результат. В данной статье определяется решение дифференциального уравнения гиперболического типа с условыями поставленными на границе заданной области и на характеристической линии. Задача представлена в виде интегрального уравнения типа Вольтерра.

Обсуждение. Прямая задача представлена интегральным уравнением типа Вольтерра. Существование решения этого интегрального уравнения доказывается методом последовательных приближений, а его единственность - с помощью неравенства Гроноулы-Беллмана.

Заключение. Доказано, что решение дифференциального уравнения гиперболического типа существует и является единственным решением корректной задачи при условиях, наложенных на границу заданного поля и на характеристическую линию.

Введение

В математической литературе широко изучается 1-я проблема Дарбу и задача Коши-Гурсы. Исследования по этим вопросам широко изучены в книгах [1]-[4].

В книге А. В. Бицадзе "Уравнения смешанного типа" рассматривается задача нахождения решения дифференциального уравнения гиперболического типа, удовлетворяющего условиям $u(x,0)=\tau(x), x\in[0,\infty)$; $u(x,-x)=\varphi(x), x\in[0,\infty)$.

Методы решения прямых и обратных задач, связанные с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений параболо-гиперболического типа и неизвестной правой части (линейная задача) этого уравнения в прямоугольной области, были предложены в монографии [5] (см. также библиографию в ней). Среди работ по исследованию начально-краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа $t = 0$ отметим работы [6]-[9], в которых исследовались задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями.

В данной статье найдено решение дифференциального уравнения гиперболического типа, удовлетворяюшее условиям $u(x,0)=\varphi(x), x\in[0,T]$; $u(x,x)=\psi(x), x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, заданным на границе области и на характеристической прямой. Задача представлена в виде интегрального уравнения типа Вольтерра. Существование решения этого интегрального уравнения доказывается методом последовательных приближений, а его единственность - с помощью неравенства Гроноулы-Беллмана.

К настоящему времени достаточно широко изучены задачи определения ядер из одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [10]-[19]. Численное решение прямых и обратных задач для таких уравнений исследовались в работах [20]-[24]. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из систем уравнений в частных производных первого порядка при некоторых дополнительных предположениях.

Обратная задача определения ядер интегральных членов из гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка общего вида с двумя независимыми переменными исследована в [25], а для системы интегродифференциальных уравнений Максвелла изучена в [26]. Получены теоремы локального существования и глобальной единственности решения.

Постановка задачи. В области $D:=\{(x,y)\in R^2 |\, 0\le y\le x\le T-y\}$ (рис. 1) рассмотрим следующее уравнение:

$$u_{xx}-u_{yy}-p(x)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in D \tag{1}$$

(1) является дифференциальным уравнением гиперболического типа.

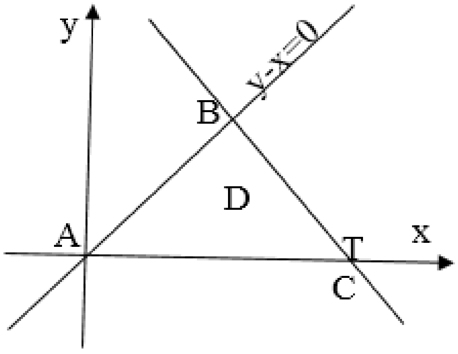

Рисунок 1. Характерическая область.

Прямая задача. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющего следующим условиям:

$u|_{AB} = \psi(x), \quad u|_{AC} = \varphi(x), \qquad (2)$

где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ заданные функции.

Определение. Решением задачи (1)-(2) назовём функцию $u(x,y)$ из класса $C^2(D)$, удовлетворяющую условиям (2) и обращающую уравнение (1) в тождество.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^2[0,T]$, $\psi(x) \in C^2\left[0,\frac{T}{2}\right]$, $f(x,y) \in C_x^1(D)$, $p(x) \in C^1[0,T]$ и выполнено условие согласованности $\psi(0) = \varphi(0)$. Тогда в области D существует единственное классическое решение задачи (1)-(2).

Доказательство. Мы переопределяем систему координат, используя замену $x = \xi, y = \tau$. Проведём линии, параллельные характеристическим линиям, проходящим через произвольную точку (x,y) площади D. Затем проводим линию, параллельную характеристике $y + x = c$, из точек их пересечения с осью абсцисс. Образуется прямоугольник (рис. 2).

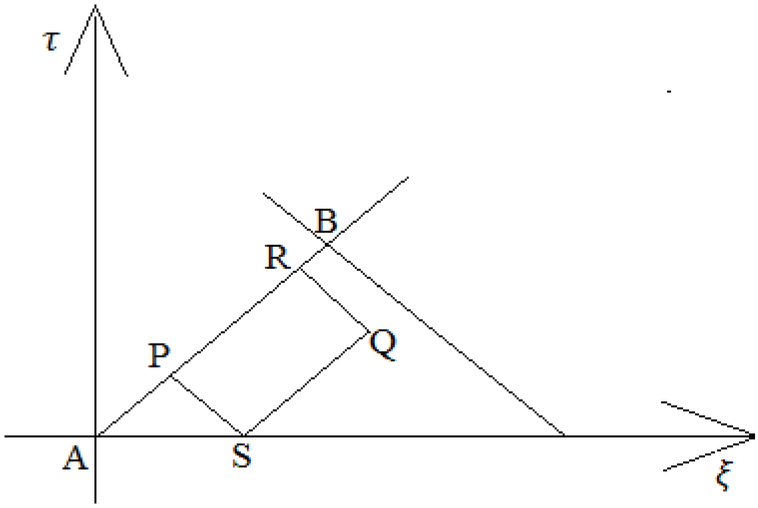

Рисунок 2. Поле интеграции.

Здесь $Q(x;y)$, $S(x-y;0)$, $P\left(\frac{x-y}{2};\frac{x-y}{2}\right)$, $R\left(\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2}\right)$.

Мы придаём уравнению (1) вид $u_{xx} - u_{yy} = F(x,y)$ и проинтегрируем полученное уравнение по прямоугольному полю $PSQR$.

$$\iint\limits_{PSQR} [u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau}] d\xi d\tau = \oint\limits_{PSQR} u_\xi d\tau + u_\tau d\xi = -u\Big|_P^S + u\Big|_S^Q - u\Big|_Q^R + u\Big|_R^P =$$

$$= 2u(Q) + 2u(P) - 2u(R) - 2u(S) = \iint\limits_{PSQR} F(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

или

$$u(x,y) + u\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - 2u\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) -$$

$$-2u(x-y;0) = \frac{1}{2} \iint\limits_{PSQR} F(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Из этого получим:

$$u(x,y) = \varphi(x-y) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x} \int\limits_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2} - \left|\frac{x+y}{2} - \xi\right|} [f(\xi,\tau) + p(\xi) u(\xi,\tau)] d\tau \, d\xi. \qquad (4)$$

Интегральное уравнение (4) эквивалентно задаче (1)-(2).

Пусть $\varphi_0 := \max\limits_{x \in [0,T]} \{|\varphi(x)|\}, \psi_0 := \max\limits_{x \in \left[0,\frac{T}{2}\right]} \{|\psi(x)|\}, f_0 := \max\limits_{(x,y) \in D} \{|f(x,y)|\}, p_0 := \max\limits_{x \in [0,T]} \{|p(x)|\}$.

Построим для уравнения (4) процесс последовательных приближений по схеме:

$$u_0(x,y)=\varphi(x-y)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int\limits_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|} f(\xi,\tau)d\tau\, d\xi,$$

$$u_k(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int\limits_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|}[p(\xi)u(\xi,\tau)]d\tau\, d\xi\,, k=1,2,\ldots.$$

Очевидно, что каждая из функции $u_k(x,y)$ в области D непрерывна.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k$$

сходится равномерно в области D.

Его частичная сумма совпадает с функцией $u_k(x,y)$ и, следовательно, этот ряд можорируется рядом:

$$|u_0|\le\varphi_0+2\psi_0+\frac{f_0}{2}\{\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x-y}[2\xi-x+y]d\xi+\int\limits_{x-y}^{\frac{x+y}{2}}[2\xi+x-y]d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{x}2[x-\xi]d\xi\}\le\varphi_0+2\psi_0+\frac{f_0}{2}y(x-y)\le\varphi_0+2\psi_0+\frac{f_0}{2}\frac{x^2}{2}\le$$

$$\le\varphi_0+2\psi_0+\frac{f_0}{2}\frac{T^2}{2}=A;$$

$$|u_1|\le A\frac{p_0}{2}\{\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x-y}[2\xi-x+y]d\xi+\int\limits_{x-y}^{\frac{x+y}{2}}[2\xi+x-y]d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{x}2[x-\xi]d\xi\}\le A\frac{p_0}{2}\frac{x^2}{2!};$$

$$|u_2|\le A\left(\frac{p_0}{2}\frac{T^2}{2}\right)^1\{\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x-y}\frac{\xi^2}{2!}[2\xi-x+y]d\xi+\int\limits_{x-y}^{\frac{x+y}{2}}\frac{\xi^2}{2!}[2\xi+x-y]d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{x}\frac{\xi^2}{2!}2[x-\xi]d\xi\}\le A\left(\frac{p_0}{2}\right)^2\frac{x^4}{4!};$$

$$|u_3|\le A\left(\frac{p_0}{2}\frac{T^2}{2}\right)^2\{\int\limits_{\frac{x-y}{2}}^{x-y}\frac{\xi^4}{4!}[2\xi-x+y]d\xi+\int\limits_{x-y}^{\frac{x+y}{2}}\frac{\xi^4}{4!}[2\xi+x-y]d\xi+$$

$$+\int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{x}\frac{\xi^4}{4!}2[x-\xi]d\xi\}\le A\left(\frac{p_0}{2}\right)^3\frac{x^6}{6!};$$

……………………………

$$|u_k| \le A\left(\frac{p_0}{2}\frac{T^2}{2}\right)^{k-1}\{\int_{\frac{x-y}{2}}^{x-y}\frac{\xi^{2k-2}}{(2k-2)!}[2\xi - x + y]d\xi +$$

$$+\int_{x-y}^{\frac{x+y}{2}}\frac{\xi^{2k-2}}{(2k-2)!}[2\xi + x - y]d\xi + \int_{\frac{x+y}{2}}^{x}\frac{\xi^{2k-2}}{(2k-2)!}2[x-\xi]d\xi\} \le$$

$$\le A\left(\frac{p_0}{2}\right)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}. \qquad (5)$$

который, в свою очередь, для всех $(x, y) \in D$ можорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} A\left(\frac{p_0}{2}\right)^k\frac{T^{2k}}{(2k)!} \le Ach\left(\sqrt{\frac{p_0}{2}}T\right).$$

Итак, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, его сумма является непрерывной функцией в области D. Как обычно, не трудно доказать, что сумма ряда является решением интегрального уравнения (4).

Теперь покажем единственность этого решения.

Единственность решения. Предположим, что имеются два различных решения уравнения (4) $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$:

$$v_1(x,y) = \varphi(x-y) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|}[f(\xi,\tau) + p(\xi)v_1(\xi,\tau)]d\tau\, d\xi,$$

$$v_2(x,y) = \varphi(x-y) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|}[f(\xi,\tau) + p(\xi)v_2(\xi,\tau)]d\tau\, d\xi.$$

Тогда их разность

$$Z(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y), \qquad i = \overline{1,n}$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$Z(x,y) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|}[p(\xi)Z(\xi,\tau)]d\tau\, d\xi. \qquad (6)$$

Покажем, что интегральные уравнения (6) имеют только тривиальные решения. Доказательство этого факта можно провести с помощью следующего приёма:

Оценивая (6) по x в $[0, T]$ при фиксированном y, получим:

$$|Z(x,y)| \le \frac{p_0}{2}\int_{\frac{x-y}{2}}^{x}\int_{|x-y-\xi|}^{\frac{x+y}{2}-\left|\frac{x+y}{2}-\xi\right|}|Z(\xi,\tau)|d\tau\, d\xi$$

Воспользуемся неравенством Гронуолы-Беллмана.

Неравенство Гронуолы-Беллмана [27]: Если $y(x)$ и $F(x)$ неотрицательны при $x \geq 0$, то для $c \geq 0, M \geq 0$ из неравенства

$$y(x) \leq c + M\int_0^x F(t)y(t)dt,$$

следует, что

$$y(x) \leq ce^{M\int_0^x F(t)dt}.$$

Проведём обозначение:

$$y(x) = |Z(x,y)|, F(x) = 1, K = 0, M = \frac{p_0}{2}.$$

Отсюда, согласно интегральному неравенству Гронуолла — Беллмана, имеем

$$|Z(x,y)| \leq 0.$$

Из этого следует $|Z(x,y)| = 0 => v_1(x,y) = v_2(x,y)$. А это противоречит нашему предположению, что решения $v_1(x,y), v_2(x,y)$ неодинаковы.

Таким образом, показано, что прямые задачи (1), (2) имеют единственное решение. Теорема 1.2.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Бицадзе А. В. "Уравнения смешанного типа" М.: Изд-во АН СССР, 1959.*

2. *Бицадзе А. В. "Некоторые классы уравнений в частных производствах" М.: Наука, 1981.*

3. *Смирнова М.М. "Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения" М.: Наука, 1966.*

4. *Смирнова. М.М. «Уравнения смешанного типа» М.: Наука, 1970.*

5. *Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа, 2015.*

6. *Капустин Н.Ю. Об обобщённой разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.*

7. *Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.*

8. *Елеев В.А. Обобщённая задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 41–53.*

9. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. О задаче типа Франкеля для уравнения смешанного параболгиперболического типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.*

10. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16. № 2. С. 72-82.*

11. *Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. N 4. P. 291-314.*

12. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17. № 4. С. 18-43.*

13. *Durdiev D. K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. матем. физ., анал., геом. 2007. V. 3. N 4. P. 411-423.*

14. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Матем. заметки. 2015. Т. 97. N 6. С. 855-867.*

15. *Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // Siberian Math. J. 2014. V. 55. № 3. P. 503-510.*

16. *Романов В. Г. Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 1. С. 18-20.*

17. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // ТМФ. 2018. Т. 195. № 3. С. 491-506.*

18. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. матем. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.*

19. Durdiev D. K., Rahmonov A. A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. V. 43. N 15. P. 8776-8796.

20. Karchevsky A. L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2005. V. 46. N 3. P. 339-351.

21. Karchevsky A. L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media // Sib. Electron. Mat. Izv. 2005. N 2. P. 23-61. Zbl 1125.86004.

22. Karchevsky A. L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // Inverse III-Posed Probl. 2004. V. 12. N 5. P. 519-534. Zbl 1080.74035.

23. Durdiev U. D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // Sib. Electron. Mat. Izv. 2020. V. 17, P. 179-189. (2020) DOI 10.33048/semi.2020.17.013.

24. Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2020. V. 8. N 2. P. 4 -16.

25. Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х., “Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью”, Дифференциальные уравнения, 56:12 (2020), 1666–1675.

26. Durdiev D. K., Turdiev Kh. Kh., “The problem of finding the kernels in the system of integro-differential Maxwell’s equations”, Sib. Zh. Ind. Math., 24:2 (2021), 38–61.

27. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. An. Murh. (2) 20 (1918-1919), 292-296.