BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

1/2023

https://buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

1/2023

E-ISSN 2181-1466
ISSN 2181-6875

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 1

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA * СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS**

УДК: 517.956.47

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Турдиев Ҳалим Ҳамроевич,
Преподаватель кафедры дифференциальных уравнений
Бухарского государственного университета, Узбекистан
h.h.turdiyev@buxdu.uz
Суяров Турсунбек Ражаббой ўғли,
Преподаватель кафедры дифференциальных уравнений
Бухарского государственного университета, Узбекистан
t.r.suyarov@buxdu.uz
Наврузова Мухаббат Надир кизи,
Учитель общеобразовательной средней школы № 32,
Жондорский район, Бухарская область

Аннотация. *В статье рассматриваются начальные и краевые задачи для системы интегро-дифференциальных гиперболических уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки. В этом случае задача ставится на обобщённых функциях условий на правой и левой граничной области. Введением вспомогательной функции функция делится на сингулярную и регулярную части в данной области. Рассматриваемая задача представлена в эквивалентной этой задаче системе интегральных уравнений типа Вольтерра второго порядка с помощью выполнения строгих математических методов. Существование решения системы интегральных уравнений второго порядка типа Вольтерра доказывается посредством метода последовательных приближений, а единственность решения — посредством интегрального неравенства Гроноуля.*

Ключевые слова: *гиперболическая система, системы интегро-дифференциальных гиперболических уравнений, диагональные матрицы, вектор-функции, интегральный член типа свёртки, интегральные уравнения типа Вольтерра, метод последовательных приближений.*

Аннотация. *Мақолада ўрама типли интеграл ҳадга эга бўлган та биринчи тартибли интегро – дифференциал гиперболик типли тенгламалар системаси учун бошлағич ва чегаравий масала қаралган. Бунда масала соҳа ўнг ва чап чегараларида шартлар умумлашган функцияларга қўйилган. Ёрдамчи функция киритиб, берилган соҳада функция сингуляр ва регуляр қисмларга ажратилган. Қаралаётган масала қатъий математик амалларни бажарилиш ёрдамида, ушбу масалага эквивалент бўлган Вольтерра типидаги иккинчи тур интеграл тенгламалар системасига келтирилган. Вольтерра типидаги иккинчи тур интеграл тенгламалар системаси ечимининг мавжудлиги кетма-кет яқинлашиш методи ёрдамида, ечимнинг ягоналиги эса Гроноулл интеграл тенгсизлиги ёрдамида исботланган.*

Калит сўзлар: *гиперболик система, интегро-дифференциал гиперболик тенгламалар системаси, диагональ матрицалар, вектор функциялар, конволюция типининг интеграл ҳади, Вольтерра типидаги интеграл тенгламалар, кетма-кет яқинлашиш усули.*

Abstract. *The article considers initial and boundary value problems for a system of integro-differential hyperbolic equations of the first order with an integral member of the convolution type. In this case, the problem is posed on generalized functions by conditions on the right and left boundary regions. By introducing an auxiliary function, the function is divided into singular and regular parts in the given region. The problem under consideration is represented in a system of Volterra-type integral equations of the second order equivalent to this problem using rigorous mathematical methods. The existence of a solution to a system of second-order integral equations of the Volterra type is proved with by means of the method of successive approximations, and the uniqueness of the solution is proved by means of the Gronoul integral inequality.*

Keywords: *Hyperbolic system, systems of integro-differential hyperbolic equations, diagonal matrices, vector functions, integral term of convolution type, integral equations of Volterra type, method of successive approximations.*

Введение.

Многие физические процессы описываются гиперболическими системами первого порядка с частными производными уравнений, в том числе, например, гиперболические системы уравнений акустики, электромагнитные колебания, динамические уравнения теории упругости и многие другие. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из этих систем при некоторых дополнительных ограничениях, поэтому вполне естественным кажется изучать прямые задачи для таких систем непосредственно в терминах самой системы.

Методы. В этой работе мы будем использовать дифференциальные уравнения, функциональный анализ, алгебраические методы, а также принцип сжимающих отображений.

Систематические исследования обратных задач для гиперболических систем начались в 1970-х годах, в работах [1–3] были указаны первые появившиеся исследования.

Процессы или системы с памятью (с последействием) или, как их ещё называют, наследственные процессы или системы характеризуются тем, что изменение их состояния в каждый момент времени зависит от предыстории процесса, т.е. на непрерывную или дискретную совокупность их состояний, предшествующих текущему. Примером такого процесса является деформация вязкоупругой среды, которая зависит не только от характера приложенных сил, но и от предшествующих деформаций, которым подвергалась среда. Такая среда называется средой с «памятью» или с «последействием» [4, с. 11]. Другими примерами процессов такого рода являются распространение электромагнитных волн в средах с дисперсией [5, гл. 9] и динамики сосуществования и развития популяций животных или растений разных видов, конкурирующих в борьбе за существование [6, гл. 5, разд. 7]. Математически такие процессы обычно описываются гиперболической системой интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки по переменной времени.

В настоящее время достаточно хорошо изучены обратные задачи определения ядра из одного гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка [7] - [15]. Численное решение прямых и обратных задач для таких уравнений исследовалось в работах [16] - [22]. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из систем уравнений в частных производных первого порядка при некоторых дополнительных предположениях Обратная задача определения ядер интегральных членов из гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка общего вида с двумя независимыми переменными исследована в [23], а для системы интегродифференциальных уравнений Максвелла изучена в [24]. Получены теоремы локального существования и глобальной единственности решения.

В настоящей работе исследуется прямая задача в гиперболической системе интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Ядро представляет собой матрицу размера n × n, зависящую по временной переменной t. Ввиду нелинейности задачи, получаем теорему о существовании и единственности решения.

Рассмотрим в области $D = \{(x,t): 0 < x < H, t > 0\}$ систему из n уравнений:

$$\left(E\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial}{\partial x}\right)u^l = \int_0^t K(\tau)u^l(x,t-\tau)d\tau \tag{1}$$

относительно вектор функции $u^l(x,t)$ с компонентами $u_1^l, u_2^l, \dots, u_n^l, l = \overline{1,n}$. Здесь $E, \Lambda, K -$ квадратные матрицы размерности $n \times n$, причём $K(t) = \left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^n$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. $\lambda_j -$ вещественные, различные постоянные и

$$\lambda_j > 0, j = \overline{1,s}; \lambda_j < 0, j = \overline{s+1,n}; s = \overline{1,n}.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие начальные и граничные условия:

$$u_i^l\big|_{t<0} = 0, \;\; 0 \le x \le H, \tag{2}$$

$$u_i^l(0,t) = \delta(t)\delta_{il}, i = \overline{1,s}, \tag{3}$$

$$u_i^l(H,t) = \delta(t)\delta_{il}, \qquad i = \overline{s+1,n},\; l = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Изучим вначале структуру решения прямой задачи (1)-(4):

Лемма 1. Если $K(t) \in C\big([0,\infty)\big)$, то решение задачи (1)-(4) представим в виде:

$$u_i^l(x,t) = \delta_{il}\delta\left(t - \frac{x}{\lambda_i}\right) + v_i^l(x,t), i = \overline{1,s},$$

$$u_i^l(x,t) = \delta_{il}\delta\left(t - \frac{x-H}{\lambda_i}\right) + v_i^l(x,t), i = \overline{s+1,n},\; l = \overline{1,n}. \tag{5}$$

где $v_i^l(x,t),\ i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,n}$ – кусочно-непрерывные в области D функции.

Для доказательства подставим в формулы (1)-(4) вместо $u_i^l(x,t),\ i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,n}$ их выражения из (5). Тогда для каждой функции $v_i^l(x,t),\ i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,n}$ получим задачу:

$$E\frac{\partial}{\partial t}v_i^l+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x}v_i^l=\sum_{j=1}^{s} k_{ij}\left(t-\frac{x}{\lambda_i}\right)\delta_{jl}+$$

$$+\sum_{j=s+1}^{n} k_{ij}\left(t-\frac{x-H}{\lambda_i}\right)\delta_{jl}+\int_0^t\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\tau)v_j^l(x,t-\tau)d\tau\,, \tag{6}$$

$$v_i^l\big|_{t<0}=0,\qquad 0\le x\le H, \tag{7}$$

$$v_i^l(0,t)=0, i=\overline{1,s};\ v_i^l(H,t)=0, i=\overline{s+1,n},\ l=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Исследование прямой задачи

Рассмотрим произвольную точку $(x,t)\in D$ на плоскости переменных ξ,τ проведём через точку (x,t) характеристику L_i, отвечающую λ_i, и продолжим её до пересечения в области $\tau\le t$ с границей область D. Точку пересечения обозначим через $\left(x_0^i,t_0^i\right)$. Для значений $i=\overline{1,s}$ точка $\left(x_0^i,t_0^i\right)$ лежит на нижнем основании или на левой бокавой стороне, для значений $i=\overline{s+1,n}$ на нижнем основании или на правой бокавой стороне границы области D в зависимости от чисел λ_i и точки (x,t).

Проинтегрируем $i-$ ю компоненту уравнения (6) вдоль характеристики L_i, от $\left(x_0^i,t_0^i\right)$ до точки (x,t), находим:

$$v_i^l(x,t)=\int_{t_0^i}^{t}\left\{\sum_{j=1}^{s} k_{ij}\left(\tau-\frac{\xi}{\lambda_i}\right)\delta_{jl}+\sum_{j=s+1}^{n} k_{ij}\left(\tau-\frac{\xi-H}{\lambda_i}\right)\delta_{jl}\right\}\Bigg|_{\xi=x+\lambda_i(\tau-t)}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)v_j^l(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)}d\tau. \tag{9}$$

Определим в (9) величину t_0^i. Она зависит от координат точки (x,t) , и несложно заметить, что $t_0^i(x,t)$ имеет вид:

$$t_0^i(x,t)=\begin{cases}t-\dfrac{x}{\lambda_i}, t\ge\dfrac{x}{\lambda_i},\\ 0, 0<t<\dfrac{x}{\lambda_i},\end{cases}\qquad i=\overline{1,s};$$

$$t_0^i(x,t)=\begin{cases}t+\dfrac{H-x}{\lambda_i}, t\ge\dfrac{H-x}{\lambda_i},\\ 0, 0<t<\dfrac{H-x}{\lambda_i},\end{cases}\qquad i=\overline{s+1,n}.$$

Тогда, из условия того, что пара $\left(x_0^i,t_0^i\right)$ удовлетворяет уравнению $\xi=x+\lambda_i(\tau-t)$ следует:

$$x_0^i(x,t)=\begin{cases}0, t\ge\dfrac{x}{\lambda_i},\\ x-\lambda_i t, 0<t<\dfrac{x}{\lambda_i},\end{cases}\quad i=\overline{1,s};$$

$$x_0^i(x,t)=\begin{cases}H, t\ge\overline{1,s};\\ x-\lambda_i t, 0<t<\dfrac{H-x}{\lambda_i},\end{cases}\quad i=\overline{s+1,n}.$$

Уравнение (9) запишем в следующем виде:

$$v_i^l(x,t)=\int_{t_0^i}^{t} k_{ij}\left(\tau-\frac{\xi-\sigma_i}{\lambda_i}\right)\Big|_{\xi=x+\lambda_i(\tau-t)}d\tau+$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)v_j^l(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)}d\tau, \tag{10}$$

где $\sigma_i = \begin{cases} 0, i = \overline{1, s}, \\ H, i = \overline{s+1, n}. \end{cases}$

Рассмотрим следующее множество:

$$\overline{D}(x_1, t_1) = \left\{(x,t):\ (x,t) \in D\ , \tau \le t_1 - \frac{|x - x_1|}{\lambda_0}\right\}$$

$(x_1, t_1) -$ произвольная точка области D, $\lambda_0 = \max_{1 \leqq i \leqq n} |\lambda_i|$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть выполнены условия лемма и матрица* $K(t) \in C([0, \infty))$, *Тогда, при каждом фиксированном* l *существует единственное решение начально-краевой задачи (1)-(4), и это решение будет принадлежать классу* $u_i^l(x,t) \in C^1\left(\overline{D}(x_1, t_1)\right)$, *где* , $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$.

Доказательство. Остановимся прежде всего на свойствах функций $v_i^l(x,t)$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$, определяемых уравнениями (10). Покажем, что в этом случае уравнения (10) имеют единственное решение в классе непрерывных функций, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Построим для уравнения (10) метод последовательных приближений по следующей схеме:

$$v_{0i}^l(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} k_{ij}\left(\tau - \frac{\xi - \sigma_i}{\lambda_i}\right)\Bigg|_{\xi = x + \lambda_i(\tau - t)} d\tau,$$

$$v_{1i}^l(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{0j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)} d\tau$$

$$v_{2i}^l(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{1j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)} d\tau$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$v_{mi}^l(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{m-1j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)} d\tau, \qquad (11)$$

$$\blacksquare(\cdots \& \cdots \& \cdots \& \cdots \& \cdots)$$

Каждая из функций $v_{mi}^l(x,t)$ в $\overline{D}(x_1, t_1)$ области непрерывна. В этой области имеют место оценки:

$$\left|v_{0i}^l(x,t)\right| = \left|\int_{t_0^i}^{t} k_{ij}\left(\tau - \frac{\xi - \sigma_i}{\lambda_i}\right)\Bigg|_{\xi = x + \lambda_i(\tau - t)} d\tau\ \right| \le k_0 t$$

$$\left|v_{1i}^l(x,t)\right| = \left|\int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{0j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)}\right| \le n k_0^2 \frac{t^3}{3!}$$

$$\left|v_{2i}^l(x,t)\right| = \left|\int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{1j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)}\right| \le n^2 k_0^3 \frac{t^5}{5!}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\left|v_{mi}^l(x,t)\right| = \left|\int_{t_0^i}^{t} \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha) v_{\mathrm{m}-1j}^l(\xi, \tau - \alpha) d\alpha\Bigg|_{\xi = x + \lambda_j(\tau - t)}\right| \le$$

$$\le n^{m-1} k_0^m \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

где $k_0 = \max_{1\le i,j\le n}\left\{\|k_{ij}(t)\|_{C([0,t_1])}\right\}$.

Покажем, что функциональный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_{mi}^l(x,t)$$

сходится равномерно в области $\overline{D}(x_1,t_1)$.

Его частичная сумма совпадает с функцией $v_{mi}^l(x,t)$ и, следовательно, этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left|v_{mi}^l(x,t)\right| = \sum_{m=1}^{\infty} n^{m-1}k_0^m \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

который, в свою очередь, для всех $(x,t)\in\overline{D}$ мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} n^{m-1}k_0^m \frac{t_1^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Итак, функциональный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_{mi}^l(x,t)$$

сходится абсолютно и равномерно и следовательно, его сумма является непрерывной функцией в области. Как обычно, не трудно доказать, что сумма ряда является решением интегрального уравнения (10).

Теперь покажем, единственность этого решения. Предположим, что имеются два различных решения уравнения $v_i^{1l}(x,t)$ и $v_i^{2l}(x,t)$:

$$v_i^{1l}(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} k_{ij}\left(\tau - \frac{\xi-\sigma_i}{\lambda_i}\right)\Bigg|_{\xi=x+\lambda_i(\tau-t)} d\tau +$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)v_j^{1l}(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)} d\tau,$$

$$v_i^{2l}(x,t) = \int_{t_0^i}^{t} k_{ij}\left(\tau - \frac{\xi-\sigma_i}{\lambda_i}\right)\Bigg|_{\xi=x+\lambda_i(\tau-t)} d\tau +$$

$$+\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)v_j^{2l}(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)} d\tau,$$

Тогда их разность

$$Z_i^l(x,t) = v_i^{1l}(x,t) - v_i^{2l}(x,t), \qquad i,l=\overline{1,n},$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$Z_i^l(x,t) = \int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)Z_j^l(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)} d\tau.$$

Через $\tilde{Z}_i^l(t)$ обозначим максимум по модулю функции $Z_i^l(x,t)$ при каждом фиксированном $t\in[0,t_1]$ и $x\in[0,H]$

$$\tilde{Z}_i^l(t) = \max_{x\in[0,H]}\left|Z_i^l(x,t)\right|, i,l=\overline{1,n}.$$

Покажем, что интегральные уравнения (12) имеют только тривиальные решения. Доказательство этого факта можно провести с помощью следующего приёма: Оценивая (12) по $x\in[0,H]$ при фиксированном $t\in[0,t_1]$, получим:

$$\tilde{Z}_i^l(t) = \left|\int_{t_0^i}^{t}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\alpha)Z_j^l(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=x+\lambda_j(\tau-t)} d\tau\right| \le$$

$$\leq nk_0 T \int_{t_0^i}^{t} \tilde{Z}_i^l(\tau) d\tau.$$

Отсюда, согласно интегральному неравенству Гроноулла - Беллмана, имеем:

$$\tilde{Z}_i^l(t) \equiv 0$$

т.е.

$$v_i^{1l}(x,t) \equiv v_i^{2l}(x,t).$$

Таким образом, показано, что прямая задачи (1)-(3) имеет единственное решение. Лемма доказана.

Изучение прямых задач, поставленных для уравнения смешанного типа, является одним из передовых критических и бурно развивающихся направлений мировой науки. Их численная реализация даёт прикладное применение для изучения этих задач. В данной статье численно исследуется краевая задача, поставленная для модельного уравнения смешанного типа. Для этого необходимо знать понятия аппроксимации и устойчивости. Порядок аппроксимации рассчитан в работе. Далее, когда доказаны устойчивость и приближение, можно показать приближение численного решения к точному решению.

Заключение. Для гиперболической системы n интегро–дифференциальных уравнений первого порядка с интегральным членом типа свёртки изучена обратная задача определения ядра. Прямой задачей является начально–краевая задача для этой системы на конечном отрезке $[0, \mathrm{H}]$. Доказано, что решение прямой задачи существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нижник Л.П. Обратная задача нестационарного рассеяния для гиперболической системы уравнений // Линейные и нелинейные краевые задачи. Митропольский Ю.А. Ред., Киев: Ин-т. Мат. акад. Наук УССР, 1971. С. 205–210.

2. Белинский С.П. Об одной обратной задаче для линейных симметричных t-гиперболических систем с n+1 независимыми переменные, Дифференц. Уравн., 1976, вып. 12, нет. 1, стр. 15–23.

3. Романов В.Г. Слинючева Л.И., Обратная задача для гиперболических систем первого порядка, Матем.Пробл. Геофиз. Новосибирск, 1972, вып. 3, стр. 184–215.

4. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для среды с последействием.Ташкент, 2014.

5. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959. — Лифшиц Е.М.

6. Вольтерра В. Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, Нью-Йорк:Довер, 1959 год.

7. V. G. Romanov, “Inverse problems for equation with a memory”, Eurasian Jour. of Math.and Computer Applications, 2:4 (2014), 51–80.

8. A. Lorenzi, “An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integrodifferential equation”, Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., 22:1 (1994), 21–44.

9. Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости”, Сиб. журн. индустр. матем., 16:2 (2013), 72–82.

10. D. K. Durdiev, “Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations”, Журн. матем. физ., анал., геом., 3:4 (2007), 411–423.

11. Д. К. Дурдиев, Ж.Ш. Сафаров, “Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области”, Матем. заметки., 97:6 (2015),855–867.

12. 18. В. Г. Романов, “Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости”, Докл.АН., 446:1 (2012), 18–20.

13. Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, “Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды”, Сиб. журн.индустр. матем., 23:2 (2020), 63–80.

14. D. K. Durdiev, Z. D. Totieva, “The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41:17 (2018), 8019–8032.

15. Z. D. Totieva, D. K. Durdiev, “The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation”, Mathematical Methods in the Applied Sciences,103:1-2 (2018), 118–132.

16. У. Д. Дурдиев, “Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах”, Сиб. журн. индустр. матем., 22:4 (2019), 26-32.

17. И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, Дальневост. матем. журн., 11:1 (2011), 76–87.

18. *A. L. Karchevsky, A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media", Russian Geology and Geophysics, 46*:3 (2005), 339{351.

*19. V. G. Romanov, A. L. Karchevsky, \Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile", Eurasian Journal of Mathematicaland Computer Applications, **6**:4 (2018), 62-72.*

20. A. L. Karchevsky, The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media", Sib.Electron. Mat. Izv., 2:2 (2005), 23-61.

*21. A. L. Karchevsky, Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system", Dokl. Earth Sci., **3**:8 (2000), 23-61.*

22. Z. R. Bozorov, “Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect”, Eurasian journal of mathematical and computer applications, 8:2 (2020), 4–16.

23. Д. К. Дурдиев, Х. Х. Турдиев, “Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью”, Дифференциальные уравнения, 56:12 (2020), 1666–1675.

24. D. K. Durdiev, Kh. Kh. Turdiev, “The problem of finding the kernels in the system of integro-differential Maxwell’s equations”, Sib. Zh. Ind. Math., 24:2 (2021), 38–61.