Х. Х. Турдиев, Обратные коэффициентные задачи для временно-дробного волнового уравнения с обобщенной производной Римана–Лиувилля по времени, *Изв. вузов. Матем.*, 2023, номер 10, 46–59

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-46-59

Известия вузов. Математика
2023, №10, с. 46–59

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Х.Х. ТУРДИЕВ

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВРЕМЕННО-ДРОБНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ ПО ВРЕМЕНИ

Аннотация. В работе рассматривается обратная задача определения нестационарного коэффициента в волновом уравнении дробного порядка с производной Гильфера. В этом случае прямая задача является начально-краевой задачей для этого уравнения с начальными и нелокальными краевыми условиями типа Коши. В качестве условия переопределенности дается нелокальное интегральное условие относительно решения прямой задачи. Методом Фурье эта задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям. Затем, используя функцию Миттаг–Леффлера и обобщенное сингулярное неравенство Гроноулла, получаем априорную оценку решения через неизвестный коэффициент, эта оценка понадобится нам для исследования обратной задачи. Обратная задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению типа Вольтерра. Для решения этого уравнения используется принцип сжимающего отображения. Доказаны результаты о локальном существовании и глобальной единственности.

Ключевые слова: дробная производная, дробный интеграл Римана–Лиувилля, обратная задача, интегральное уравнение, ряд Фурье, теорема Банаха о неподвижной точке.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-46-59

Введение

В настоящее время большое внимание сфокусировано на изучении начальных и начально-краевых задач для дробных дифференциальных уравнений, так как они широко используются в инженерии, физике, химии, биологии и других отраслях. Многочисленные приложения можно найти в работах [1]–[4] и в библиографии к ним.

Определение правой части и порядка временно-дробной производной уравнения в прикладном дробном моделировании играет важную роль. В работах [5]–[8] рассматривается обратная задача нахождения неизвестной временно-дробной производной в уравнении субдиффузии с произвольным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка. Доказано, что дополнительная информация о решении в фиксированный момент времени и в фиксированном положении (данные наблюдения) единственным образом определяют порядок дробной производной.

В работах [9]–[12] изучалась единственность решения нелокальных прямых задач и обратных задач нахождения источника для различных дробных дифференциальных уравнений с интегро-дифференциальными операторами Капуто и Римана–Лиувилля.

Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн были широко изучены. Нелинейные обратные коэффициентные задачи с различного типа условиями переопределенности часто встречаются в литературе (например,

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 09.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

[13]–[18] и библиография в этих источниках). В работах [19]–[24] исследовались обратные задачи нахождения неизвестных коэффициентов задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения. Доказаны локальное существование и единственность и получены оценки условной устойчивости.

1. Формулировка задачи

В настоящей статье изучаются локальное существование и глобальная единственность в обратной задаче определения зависящего от времени коэффициента в обобщенном временно-дробном волновом уравнении с начальным и нелокальным краевым условиями и интегральным условием переопределенности.

В следующем разделе будут приведены некоторые необходимые предварительные сведения.

Пусть $T > 0$, $l > 0$ — фиксированные числа и $\Omega_{lT} := \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \le T\}$. Рассмотрим временно-дробное уравнение диффузии

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u(x,t) - u_{xx} + q(t)u(x,t) = p(t)f(x,t), \quad x \in (0,l),\ t \in (0,T], \tag{1}$$

начальные условия типа Коши

$$I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u\right)(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_2(x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

краевые условия

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и нелокальное дополнительное условие

$$\int\limits_0^l w_i(x)u(x,t)dx = h_i(t),\ i = 1,2,\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Здесь обобщенный дробный дифференциальный оператор Римана–Лиувилля (Гильфера) $D^{\alpha,\beta}_{0+,t}$ порядка $1 < \alpha < 2$ и типа $0 \le \beta \le 1$ определяется следующим образом ([1], с. 112–118; [2], с. 62–65):

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u(\cdot,t) = \left(I^{\beta(2-\alpha)}_{0+,t}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(I^{(1-\beta)(2-\alpha)}_{0+,t}u\right)\right)(\cdot,t),$$

$$I^{\gamma}_{0+,t}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}}d\tau,\ \ \gamma \in (0,1),$$

— дробный интеграл Римана–Лиувилля от функции $u(x,t)$ по времени t ([3]; [4], с. 69–72), $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Функции $f(x,t)$, $w_i(x)$, $\varphi_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$, считаются известными.

В работах ([1], с. 112–118; [3], с. 28–37) Р. Гильфер ввел понятие обобщенной формы дробной производной Римана–Лиувилля порядка α и типа $\beta \in [0,1]$, которая совпадает с дробной производной Римана–Лиувилля при $\beta = 0$ и с дробной производной Герасимова–Капуто при $\beta = 1$, а случай $\beta \in (0,1)$ интерполирует обе эти дробные производные.

На протяжении статьи будем полагать, что заданные функции φ_1, φ_2, f, w и h удовлетворяют следующим условиям:

A1) $\varphi_i \in C^3[0,l]$, $\varphi_i^{(4)} \in L_2[0,l]$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0$, $\varphi''{}_i(0) = \varphi''{}_i(l) = 0$, $i = 1,2$;

A2) $f(x,\cdot)\in C[0,T]$ и при $t\in[0,T]$ $f(\cdot,t)\in C^3[0,l]$, $f(\cdot,t)^{(4)}\in L_2[0,l]$, $f(0,t)=f(l,t)=0$, $f_{xx}(0,t)=f_{xx}(l,t)=0$;

A3) $w(x)\in C^2[0,l]$, причем $w(0)=w(l)=0$ и $w''(0)=w''(l)=0$;

A4) $\left(D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h\right)(t)\in C[0,T]$, $|h(t)|\geq h_0>0$, h_0 — заданное число,

$$\int\limits_0^l w_i(x)\varphi_1(x)dx = I_{0+,t}^{(2-\alpha)(1-\beta)}h_i(t)\big|_{t=0+},$$

$$\int\limits_0^l w_i(x)\varphi_2(x)dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(I_{0+,t}^{(2-\alpha)(1-\beta)}h_i(t)\right)(t)\big|_{t=0+},\ i=1,2.$$

2. Предварительные сведения

В этом разделе представлены некоторые полезные определения и результаты из дробного анализа.

Двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера. Двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ задается рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},$$

где $\alpha,\beta,z\in\mathbb{C}$ и $\Re(\alpha)>0$, $\Re(\alpha)$ обозначает вещественную часть комплексного числа α. Функция Миттаг–Леффлера изучалась многими авторами, предложившими ее различные обобщения и приложения.

Из сказанного выше следует, что существуют некоторые положительные константы M_i, $i=1,2,3$, такие, что

$$M=\max\left\{\max_{0\leq t\leq T}\left|E_{\alpha,1+(\beta-1)(2-\alpha)}\left(-\lambda^2t^\alpha\right)\right|,\ \max_{0\leq t\leq T}\left|E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}\left(-\lambda^2t^\alpha\right)\right|,\right.$$
$$\left.\max_{0\leq s<t\leq T}\left|E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-s)^\alpha)\right|\right\}.$$

Предложение 1. *Пусть* $0<\alpha<2$ *и* $\beta\in\mathbb{R}$ — *произвольные числа. Предположим, что* κ *такое, что* $\pi\alpha/2<\kappa<\min\{\pi,\pi\alpha\}$. *Тогда существует константа* $C=C(\alpha,\beta,\kappa)>0$ *такая, что*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\leq\frac{C}{1+|z|},\quad \kappa\leq|\arg(z)|\leq\pi.$$

За доказательством мы отсылаем читателя, например, к источнику ([4], с. 40–45).

Рассмотрим взвешенные пространства непрерывных функций ([4], сс. 4–5, 162–163):

$$C_\gamma[a,b]:=\{g:(a,b]\to R:(t-a)^\gamma g(t)\in C[a,b],\ 0\leq\gamma<1,\},$$

$$C_\gamma^{\alpha,\beta}(\Omega)=\left\{g(t):\ D_{0+,t}^{\alpha,\beta}g(t)\in C_\gamma(0,T];\ 1<\alpha\leq2,\ 0\leq\beta\leq1\right\},$$

$$C_\gamma^{2,\alpha,\beta}(\Omega)=\left\{u(x,t):\ u(\cdot,t)\in C^2(0,1);\ t\in[0,T]\text{ и}\right.$$
$$\left.D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(x,\cdot)\in C_\gamma(0,T];\ x\in[0,1],\ 1<\alpha\leq2,\ 0\leq\beta\leq1\right\},$$

$$C^0_\gamma[a,b] = C_\gamma[a,b]$$

с нормами

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(t-a)^\gamma f(t)\|_C, \quad \|f\|_{C^n_\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma}.$$

Лемма 1 ([25], с. 188)**.** *Пусть $b \geq 0$, $\alpha > 0$ и $a(t), u(t)$ — неотрицательные функции, являющиеся локально интегрируемыми на $0 \leq t < T$ (для некоторого $T \leq +\infty$), причем*

$$u(t) \leq a(t) + b\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)ds.$$

Тогда

$$u(t) \leq a(t) + b\Gamma(\alpha)\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(b\Gamma(\alpha)(t-s)^\alpha\right) a(s)ds.$$

Лемма 2 ([25], с. 189)**.** *Пусть $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha+\gamma > 1$ и $a(t)$, $t^{\gamma-1}u(t)$ — неотрицательные функции, являющиеся локально интегрируемыми на $0 \leq t < T$, причем*

$$u(t) \leq a(t) + b\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-1} u(s)ds.$$

Тогда

$$u(t) \leq a(t) E_{\alpha,\gamma}\left((b\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}\, t\right),$$

где

$$E_{\alpha,\gamma}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{m(\alpha+\gamma-1)}, \;\; c_0 = 1, \;\; \frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m(\alpha+\gamma-1)+\gamma)}{\Gamma(m(\alpha+\gamma-1)+\alpha+\gamma)}$$

для $m \geq 0$. При $t \to +\infty$ $\;E_{\alpha,\gamma}(t) = O\left(t^{\frac{1}{2}\frac{\alpha+\gamma-1}{\alpha-\gamma}} \exp\left(\frac{\alpha+\gamma-1}{\alpha} t^{\frac{\alpha+\gamma-1}{\alpha}}\right)\right)$.

Доказательство следующих утверждений исходит из определения дробной производной Капуто и дифференцирования двухпараметрической функции Миттаг–Леффлера.

Предложение 2 ([26], с. 40–45)**.** *Для $0 < \alpha < 1$, $t > 0$ имеем $0 < E_{\alpha,1}(-t) < 1$. Более того, $E_{\alpha,1}(-t)$ является вполне монотонной, т. е.*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,1}(-t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Предложение 3 ([26], с. 42–45)**.** *Для $0 < \alpha < 1$, $\eta > 0$ имеем $0 \leq E_{\alpha,\alpha}(-\eta) \leq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Более того, $E_{\alpha,\alpha}(-\eta)$ является монотонно убывающей функцией при $\eta > 0$.*

3. Исследование прямой задачи (1)–(3)

С помощью метода Фурье решение $u(x;t)$ прямой задачи (1)–(3) может быть разложено в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{5}$$

где

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\lambda_n x),\ \ \lambda_n=\frac{\pi n}{l},\ \ n=1,2,3,\dots. \qquad (6)$$

Коэффициенты $u_n(t)$ при $n\geq 1$ находятся из ортогональности собственных функций $X_n(x)$. Скалярное произведение в $L_2[0,l]$ определяется формулой $(f,g)=\int\limits_0^l f(x)g(x)dx$. Заметим, что коэффициенты разложения $\varphi_i(x)$, $i=1,2$, и $f(x,t)$ по собственным функциям (6) при $n\geq 1$ задаются соответственно формулами:

$$(f(x,t),X_n(x))=f_n(t),\quad (\varphi_i(x),X_n(x))=\varphi_{n,i},\quad i=1,2,\quad n=1,2,\dots.$$

Учитывая (1) и $(u(x,t),X_n(x))=\int\limits_0^l u(x,t)X_n(x)dx=u_n(t)$, можно записать

$$\left(D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u_n\right)(t)+\lambda_n^2u_n(t)=p(t)f_n(t)-q(t)u_n(t), \qquad (7)$$

где

$$f_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x,t)\sin(\lambda_n x)dx.$$

Начальное условие (2) дает

$$I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u_n(t)\big|_{t=0}=\varphi_{n,1},\ \ \frac{d}{dt}\left(I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u_n\right)(t)\big|_{t=0}=\varphi_{n,2}. \qquad (8)$$

В соответствии с ([27], с. 61–114) начальная задача (7), (8) эквивалентна в пространстве $C^{\alpha,\beta}_\gamma[0,T]$ интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_n(t)=t^{(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,1+(\beta-1)(2-\alpha)}\left(-\lambda^2t^\alpha\right)\varphi_{n,1}+t^{1+(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}\left(-\lambda^2t^\alpha\right)\varphi_{n,2}+$$

$$\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)p(\tau)f_n(\tau)d\tau-\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)q(\tau)u_n(\tau)d\tau. \quad (9)$$

Докажем следующее утверждение для $u_n(t)$.

Лемма 3. *При фиксированном $n\in N$ справедливы следующие оценки:*

$$t^\gamma|u_n|\leq M\left(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}t\right),\ t\in[0,T],$$

$$t^\gamma\left|\left(D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u_n\right)(t)\right|\leq\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+$$

$$+M\left(\lambda_n^2+\|q\|_{C[0,T]}\right)\left(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\right.$$

$$\left.+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}t\right),\ t\in[0,T],$$

где $1>\gamma>(1-\beta)(2-\alpha)$.

Доказательство. Умножая уравнение (9) на t^γ, получаем

$$t^\gamma |u_n| \leq M\left(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \right.$$

$$\left. + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} t^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{\|q\|_{C[0,T]} t^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |u_n(\tau)| d\tau. \quad (10)$$

Далее, ввиду леммы 2 имеем

$$t^\gamma |u_{2n-1}| \leq M\left(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} t^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]} t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}} t\right), \ t \in [0, T].$$

Учитывая первое уравнение в (7) и первую оценку в лемме 3, получаем вторую часть леммы 3:

$$t^\gamma \left|\left(D^{\alpha,\beta}_{0+,t} u_n\right)(t)\right| \leq \|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} +$$

$$+ M\left(\lambda_n^2 + \|q\|_{C[0,T]}\right)\left(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \right.$$

$$\left. + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} t^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]} t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}} t\right).$$

$\square$

Дифференцируя почленно равенство (5), получаем формальные ряды

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D^{\alpha,\beta}_{0+,t} u_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (11)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin(\lambda_n x). \quad (12)$$

В силу леммы 3 ряды (5), (11) и (12) для любых $(x,t) \in \overline{\Omega}_{lT}$ оцениваются сверху соответственно следующими выражениями:

$$M\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} T^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right),$$

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} + M\left(\lambda_n^2 + \|q\|_{C[0,T]}\right)\left(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} T^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right],$$

$$M\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}| + T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}| + \frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]} T^\alpha B(\alpha, 1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right),$$

где $\overline{\Omega}_{lT} := \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, \ 0 \leq t \leq T\}$.

Справедлива

Лемма 4. *Если выполняются условия* A1)–A2), *то верны равенства*

$$\varphi_{n,i} = \frac{1}{\lambda_n^3}\varphi_{n,i}^{(3)},\ i=1,2,\quad f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3}f_n^{(3)}(t), \tag{13}$$

где

$$\varphi_{n,i}^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi^{(3)}(x)_i \cos(\lambda_n x)dx,\ i=1,2,$$

$$f_n^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_{xxx}^{(3)}(x,t)\cos(\lambda_n x)dx,$$

и следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,i}^{(3)}\right|^2 \le \left\|\varphi_i^{(3)}\right\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n^{(3)}(t)\right|^2 \le \left\|f^{(3)}(t)\right\|_{L_2[0,l]\times C[0,T]}. \tag{14}$$

Если функции $\varphi_i(x)$, $i=1,2$, и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то ввиду представления (13) и оценок (14) ряды (5), (11) и (12) сходятся равномерно в прямоугольнике $\overline{\Omega}_{lT}$, откуда функция $u(x,t)$ удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

Используя эти результаты, получаем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $p(t)$, $q(t) \in C[0,T]$ *и условия* A1)–A2) *выполнены, тогда существует единственное решение прямой задачи* (1)–(3) $u(x,t) \in C_\gamma^{2,\alpha,\beta}(\overline{\Omega}_{lT})$.

Получим оценку для нормы разности решений исходного интегрального уравнения (9) и этого же уравнения с возмущенными функциями $\widetilde{p},\widetilde{q},\widetilde{\varphi}_{n,i}$, $i=1,2$, $\widetilde{f}_n$. Пусть $\widetilde{u}_n(t)$ — решение исходного интегрального уравнения (9), соответствующее функциям $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$, $\widetilde{\varphi}_{n,i}$, $i=1,2$, $\widetilde{f}_n$, т. е.

$$\widetilde{u}_n(t) = t^{(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,1+(\beta-1)(2-\alpha)}\left(-\lambda^2 t^\alpha\right)\widetilde{\varphi}_{n,1} + t^{1+(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}\left(-\lambda^2 t^\alpha\right)\widetilde{\varphi}_{n,2}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\widetilde{p}(\tau)\widetilde{f}_n(\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\widetilde{q}(\tau)\widetilde{u}_n(\tau)d\tau. \tag{15}$$

Составляя разность $u-\widetilde{u}$ с помощью уравнений (9), (15) и вводя обозначения $u-\widetilde{u}=\overline{u}_n$, $p-\widetilde{p}=\overline{p}$, $q-\widetilde{q}=\overline{q}$, $f_n-\widetilde{f}_n=\overline{f}_n$, получаем интегральное уравнение

$$\overline{u}_n(t) = t^{(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,1+(\beta-1)(2-\alpha)}\left(-\lambda^2 t^\alpha\right)\overline{\varphi}_{n,1} + t^{1+(\beta-1)(2-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}\left(-\lambda^2 t^\alpha\right)\overline{\varphi}_{n,2}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\overline{p}(\tau)f_n(\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\widetilde{p}(\tau)\overline{f}_n(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\overline{q}(\tau)u_n(\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha)\widetilde{q}(\tau)\overline{u}_n(\tau)d\tau,$$

из которого получается следующее линейное интегральное неравенство для $\|\overline{u}_n(t)\|_{C_\gamma^{2,\alpha,\beta}}$:

$$\|\overline{u}_n(t)\|_{C_\gamma^{2,\alpha,\beta}} \le M\Bigg(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}| + t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}| +$$

$$+\frac{\left(\|\overline{p}\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\|\widetilde{p}\|_{C[0,T]}\|\overline{f}_n\|_{C_\gamma[0,T]}\right)t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)+$$

$$+\frac{\|\overline{q}\|_{C[0,T]}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}M\Bigg(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+$$

$$+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}t\right)+\frac{\|\widetilde{q}\|_{C[0,T]}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}|\overline{u}_n(\tau)|d\tau.$$

Используя лемму 1, из последнего неравенства получаем оценку

$$\|\overline{u}_n(t)\|_{C_\gamma^{2,\alpha,\beta}}\le\Bigg\{M\Bigg(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+$$

$$+\frac{\left(\|\overline{p}\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\|\widetilde{p}\|_{C[0,T]}\|\overline{f}_n\|_{C_\gamma[0,T]}\right)t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)+$$

$$+\frac{\|\overline{q}\|_{C[0,T]}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}M\Bigg(t^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+t^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+$$

$$+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}t^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}t\right)\Bigg\}E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{q}\|_{C[0,T]}t^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}t\right).\tag{16}$$

Действительно, выражение (16) является оценкой устойчивости для решения задачи (1)–(3). Единственность этого решения следует из (16).

4. Исследование обратной задачи (1)–(4)

В данном разделе исследуется обратная задача нахождения функции $q(t)$ из соотношений (1)–(4) при помощи принципа сжимающего отображения.

Умножая (1) на $\omega_i(x)$ $(i=1,2)$ и интегрируя по x от 0 до l, имеем

$$\int_0^l\omega_i(x)D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(x,t)dx-\int_0^l\omega_i(x)u_{xx}dx+q(t)\int_0^l\omega_i(x)u(x,t)dx=$$

$$=p(t)\int_0^l\omega_i(x)f(x,t)dx,\quad i=1,2,\ \ x\in(0,l),\ \ t\in(0,T].$$

После интегрирования по частям ввиду условий (2)–(4) получаем равенство

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h_i(t)-\omega_i(l)u_x(l,t)+\omega_i(0)u_x(0,t)-\int_0^l\omega_i''(x)u(x,t)dx+q(t)h_i(t)=$$

$$=p(t)\int_0^l\omega_i(x)f(x,t)dx,\quad i=1,2.\tag{17}$$

Предположим, что для (17) выполнено условие $\omega_i(0)=\omega_i(l)=0$. Решая систему (17) относительно неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$, получаем следующие интегральные уравнения относительно этих неизвестных:

$$p(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\ne j}}^{2}(-1)^jh_j(t)\left[D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h_i(t)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t;p;q)\lambda_n^2\omega_{in}^{(2)}\right],\tag{18}$$

$$q(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(-1)^j\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\omega_{jn}\left(D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h_i(t)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t;p;q)\lambda_n^2\omega_{in}^{(2)}\right)\right], \tag{19}$$

где

$$\Delta(t)=h_1(t)\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\omega_{2n}-h_2(t)\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\omega_{1n};$$

$$\omega_{in}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\omega_i(x)\sin(\lambda_n x)dx;\quad \omega_{in}^{(2)}=\frac{1}{\lambda_n^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\omega_i''(x)\sin(\lambda_n x)dx.$$

Уравнения (18), (19) составляют полную систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p(t), q(t)$. Представим эту систему в виде операторного уравнения

$$g(t)=\Lambda[g](t), \tag{20}$$

где $g=(g_1,g_2):=(p(t);q(t))$ — вектор-функция, а $\Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2)$ определяется правой частью равенств (18), (19):

$$\Lambda_1[g](t)=g_{01}(t)-\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(-1)^j h_j(t)\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t;g_1;g_2)\lambda_n^2\omega_{in}^{(2)},$$

$$\Lambda_2[g](t)=g_{02}(t)-\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(-1)^j\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\omega_{jn}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t;g_1;g_2)\lambda_n^2\omega_{in}^{(2)}\right].$$

Пусть $g_0:=(g_{01},g_{02})$, где

$$g_{01}(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(-1)^j h_j(t)D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h_i(t);\quad g_{02}(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\omega_{jn}D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h_i(t).$$

Зафиксируем число $\rho>0$ и рассмотрим шар

$$B^T(g_0,\rho):=\{g:\|g-g_0\|_{C[0,T]}\le\rho\}.$$

Теорема. *Пусть условия* A1)--A4) *выполнены. Тогда существует число* $T^*\in(0,T)$ *такое, что существует единственное решение* $p(t),\ q(t)\in C[0,T^*]$ *обратной задачи* (1)–(4).

Доказательство. Сначала покажем, что для достаточно малого $T>0$ оператор Λ отображает шар $B^T(g_0,\rho)$ в себя. Действительно, для любой непрерывной функции $g(t)$ функция $\Lambda[g](t)$, заданная формулой (20), является непрерывной. Более того, оценивая норму разности, получаем

$$\|\Lambda_1[g](t)-g_{01}(t)\|\le\frac{2\omega_0h_0}{\Delta_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(T;g_1;g_2)\right|\le\frac{2\omega_0h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right),$$

$$\|\Lambda_2[g](t)-g_{02}(t)\|\le\frac{2\omega_0f_0}{\Delta_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(T;g_1;g_2)\right|\le\frac{2\omega_0f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{\|p\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|q\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right),$$

где $\omega_0 = \max\limits_{x\in[0,l]} |\omega(x)|$.

Здесь мы использовали оценку (9). Ввиду лемм 3 и 4 последний ряд является сходящимся. Заметим, что функция в правой части этого неравенства является монотонно возрастающей по T, а из того, что функция $g(t)$ принадлежит шару $B^T(g_0,\rho)$, следует неравенство

$$\|g\| \le \rho + \|g_0\|. \tag{21}$$

Поэтому мы только усилим неравенство, если заменим в нем $\|g\|$ на выражение $\rho + \|g_0\|$. После такой замены получаем оценки

$$\|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\| \le \frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty} M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{(\rho+\|g_0\|)\,\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left((\rho+\|g_0\|)T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right),$$

$$\|\Lambda_2[g](t) - g_{02}(t)\| \le \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty} M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{(\rho+\|g_0\|)\,\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left((\rho+\|g_0\|)T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right).$$

Все это вместе с (18)–(20) влечет оценку

$$\|\Lambda[g](t) - g_0(t)\| = \max\{\|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\|,\ \|\Lambda_2[g](t) - g_{02}(t)\|\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0},\ \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\right\}\sum_{n=1}^{\infty} M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{(\rho+\|g_0\|)\,\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left((\rho+\|g_0\|)T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right).$$

Пусть T_1 — положительный корень уравнения

$$\max\left\{\frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0},\ \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\right\}\sum_{n=1}^{\infty} M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\varphi_{n,2}|+\frac{(\rho+\|g_0\|)\,\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)E_{\alpha,\gamma}\left(\left((\rho+\|g_0\|)T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)=\rho.$$

Тогда для $T \in (0,T_1)$ имеем $\Lambda[g](t) \in B^T(g_0,\rho)$.

Рассмотрим теперь две функции $g(t)$ и $\widetilde{g}(t)$ из шара $B^T(g_0,\rho)$ и оценим расстояние между их образами $\Lambda[g](t)$ и $\Lambda[\widetilde{g}](t)$ в пространстве $C[0,T]$. Функция $\widetilde{u}_n(t)$, соответствующая $\widetilde{g}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (15) с функциями $\varphi_{n,i} = \widetilde{\varphi}_{n,i}$, $i=1,2$, и $f_n = \widetilde{f}_n$. Составляя разность $\Lambda[g](t) - \Lambda[\widetilde{g}](t)$ с помощью уравнений (9), (15) и затем оценивая ее норму, получаем

$$\|\Lambda_1[g](t) - \Lambda_1[\widetilde{g}](t)\| \le \frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|u_n(T;g_1;g_2) - \widetilde{u}_n(T;\widetilde{g}_1;\widetilde{g}_2)\right\| \le$$

$$\le \frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+$$

$$+\frac{T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|g_1-\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\|\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n-\widetilde{f}_n\|_{C_\gamma[0,T]}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{\|g_2-\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\Bigg\}\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right),$$

$$\|\Lambda_2[g](t)-\Lambda_2[\widetilde{g}](t)\|\leq\frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|u_n(T;g_1;g_2)-\widetilde{u}_n(T;\widetilde{g}_1;\widetilde{g}_2)\right\|\leq$$

$$\leq\frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+$$

$$+\frac{T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|g_1-\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\|\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n-\widetilde{f}_n\|_{C_\gamma[0,T]}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{\|g_2-\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M\Bigg(T^{\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,1}|+$$

$$+T^{1+\gamma+(\beta-1)(2-\alpha)}|\overline{\varphi}_{n,2}|+\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\Bigg\}\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right).$$

Используя неравенство (10) и оценку (16) с $\varphi_{n,i}=\widetilde{\varphi}_{n,i}$, $i=1,2$, и $f_n=\widetilde{f}_n$, запишем предыдущие неравенства следующим образом:

$$\|\Lambda_1[g](t)-\Lambda_1[\widetilde{g}](t)\|\leq\frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{M\frac{T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg(\|g_1-\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+$$

$$+\frac{M\|g_2-\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\Bigg\}E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right),\tag{22}$$

$$\|\Lambda_2[g](t)-\Lambda_2[\widetilde{g}](t)\|\leq\frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{M\frac{T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg(\|g_1-\widetilde{g}_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+$$

$$+\frac{M\|g_2-\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^{\alpha}B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg)\times$$

$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\Bigg\}E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right).\tag{23}$$

Функции $g(t)$ и $\widetilde{g}(t)$ принадлежат шару $B^T(g_0,\rho)$, поэтому для каждой из этих функций имеет место неравенство (21). Заметим, что функция в правой части неравенств (22), (23) при множителе $\|g\|-\|\widetilde{g}\|$ монотонно возрастает по $\|g\|, \|\widetilde{g}\|$ и T. Поэтому, заменяя $\|g\|$ и $\|\widetilde{g}\|$ в неравенствах (22), (23) на $\rho+\|g\|$, мы только усилим эти неравенства. Таким образом, получаем

$$\|\Lambda_1[g](t)-\Lambda_1[\widetilde{g}](t)\| \le \frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{M\frac{T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\right\}\times$$
$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\|g-\widetilde{g}\|,$$

$$\|\Lambda_2[g](t)-\Lambda_2[\widetilde{g}](t)\| \le \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{M\frac{T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\right\}\times$$
$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\|g-\widetilde{g}\|.$$

Отсюда

$$\|\Lambda[g](t)-\Lambda[\widetilde{g}](t)\| \le \max\left\{\frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0},\ \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{M\frac{T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\right\}\times$$
$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\|g-\widetilde{g}\|.$$

Пусть T_2 — положительный корень уравнения

$$\|\Lambda[g](t)-\Lambda[\widetilde{g}](t)\| \le \max\left\{\frac{2\omega_0 h_0}{\Delta_0},\ \frac{2\omega_0 f_0}{\Delta_0}\right\}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{M\frac{T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}+\frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\|g_1\|_{C[0,T]}\|f_n\|_{C_\gamma[0,T]}T^\alpha B(\alpha,1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|g_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)\right\}\times$$
$$\times E_{\alpha,\gamma}\left(\left(\|\widetilde{g}_2\|_{C[0,T]}T^\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-1}}T\right)=1.$$

Тогда для $T\in(0,T_2)$ оператор Λ сжимает расстояние между элементами $g(t)$, $\widetilde{g}(t)\in B^T(g_0,\rho)$. Следовательно, если взять $T^*<\min(T_1,T_2)$, то оператор Λ является сжимающим в шаре $B^T(g_0,\rho)$. По теореме Банаха ([28], с. 87–97) оператор Λ имеет единственную неподвижную точку в шаре $B^T(g_0,\rho)$, т. е. существует единственное решение уравнения (21). $\square$

Заключение

В данной работе исследована разрешимость нелинейной обратной задачи для временно-дробного волнового уравнения с начально-краевыми условиями и условиями переопределенности интегрального типа. Сначала была изучена разрешимость прямой задачи. Задача (1)–(3) была заменена на эквивалентные ей интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Были доказаны существование и единственность решения прямой задачи. Далее была рассмотрена обратная задача нахождения функций $p(t)$, $q(t)$, входящих в уравнение (1) с дополнительными условиями (4) на решение этой системы с начальным и краевым условиями (2), (3). Получены условия на данные функции, при которых обратная задача имеет единственное решение для достаточно малого интервала.

Литература

[1] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics* (World Scientific, Singapore, 2000).

[2] Podlubny I. *Fractional Differential Equations. In: Mathematics in Science and Engineering,* V. 198 (Academic Press, New York, 1999).

[3] Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. *Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives*, Fract. Calc. Appl. Anal. **12** (3), 299–318 (2009).

[4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Application of Fractional Differential Equations* (Elsevier, Amsterdam, 2006).

[5] Vinagre B.M., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V. *Some Approximations of Fractional Order Operators Used in Control Theory and Applications*, Fract. Calc. Appl. Anal. **3** (3), 231–248 (2000).

[6] Ashurov R., Cabada A., Turmetov B. *Operator Method for Construction of Solutions of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients*, Fract. Calc. Appl. Anal. **19** (1), 229–252 (2016).

[7] Ashurov R., Umarov S. *Determination of the Order of Fractional Derivative for Subdiffusion Equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **23** (6), 1647–1662 (2020).

[8] Alimov Sh., Ashurov R. *Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation*, J. Inverse and Ill-posed Probl. **28** (5), 651–658 (2020).

[9] Agarwal P., Berdyshev A.S., Karimov E.T. *Solvability of a Non-local Problem with Integral Transmitting Condition for Mixed Type Equation with Caputo Fractional Derivative*, Results Math. **71** (3–4), 1235–1257 (2017).

[10] Salakhitdinov M.S., Karimov E.T., *Uniqueness of an inverse source non-local problem for fractional order mixed type equations*, Eurasian Math. J. **7** (1), 74–83 (2016).

[11] Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S. *On a boundary-value problem for the parabolic-hyperbolic equation with the fractional derivative and the sewing condition of the integral form*, AIP Conf. Proc. **1611** (1), 133–137 (2014).

[12] Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M. *Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation*, Hokkaido Math. J. **49** (2), 349–361 (2020).

[13] Durdiev D.K., Totieva Z.D. *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of visco-elasticity equation*, Math. Met. Appl. Sci. **41** (17), 8019–8032 (2018).

[14] Дурдиев Д.К. *О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-матем. науки **19** (4), 658–666 (2015).

[15] Kharat V.V., Dhaigude D.B., Hasabe D.R. *On nonlinear mixed fractional integro differential inclusion with four-point nonlocal Riemann–Liouville integral boundary conditions*, Indian J. Pure and Appl. Math. **50** (4), 937–951 (2019).

[16] Haide Gou, Tianxiang Wang *The method of lower and upper solution for Hilfer evolution equations with non-instantaneous impulses*, Indian J. Pure Appl. Math. **54** (4), 499–523 (2023).

[17] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Задача определения ядер в системе интегродифференциальных уравнений Максвелла*, Сиб. журн. индустриал. матем. **24** (2), 38–61 (2021).

[18] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью*, Дифференц. уравнения **56** (12), 1666–1675 (2020).

[19] Durdiev D.K., Rahmonov A.A., Bozorov Z.R. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **44** (13), 10753–10761 (2021).

[20] Durdiev U.D., Totieva Z.D. *A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math. Met. Appl. Sci. **42** (18), 7440–7451 (2019).

[21] Damirchi J., Pourgholi R., Shamami T.R., Zeidabadi H., Janmohammadi A. *Identification of a Time Dependent Source Function in a Parabolic Inverse Problem via Finite Element Approach*, Indian J. Pure and Appl. Math. **51** (4), 1587–1602 (2020).

[22] Durdiev D.K. *Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation*, Eurasian J. Math. and Comput. Appl. **9** (1), 44–54 (2021).

[23] Durdiev U.D. *Problem of Determining the Reaction Coefficient in a Fractional Diffusion Equation*, Diff. Equat. **57** (9), 1195–1204 (2021).

[24] Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Turk. J. Math. **46** (6), 2250–2263 (2022).

[25] Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lect. Notes Math. **840**, ed. by Dold A., Eckmann B. (Springer, Berlin, 1981).

[26] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Elsevier, Amsterdam, 2006).

[27] Sandev T., Tomovski Ž. *Fractional Equations and Models* (Springer Nature, Switzerland, 2019).

[28] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Dover Publ., New York, 1976).

Халим Хамроевич Турдиев

Бухарское отделение Института Математики Академии наук Республики Узбекистан,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: hturdiev@mail.ru

H.H. Turdiev

Inverse coefficient problems for a time-fractional wave equation with the generalized Riemann–Liouville time derivative

Abstract. This paper considers the inverse problem of determining the time-dependent coefficient in the fractional wave equation with Hilfer derivative. In this case, the direct problem is initial-boundary value problem for this equation with Cauchy type initial and nonlocal boundary conditions. As overdetermination condition nonlocal integral condition with respect to direct problem solution is given. By the Fourier method, this problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using the Mittag-Leffler function and the generalized singular Gronwall inequality, we get apriori estimate for solution via unknown coefficient which we will need to study of the inverse problem. The inverse problem is reduced to the equivalent integral of equation of Volterra type. The principle of contracted mapping is used to solve this equation. Local existence and global uniqueness results are proved.

Keywords: fractional derivative, Riemann–Liouville fractional integral, inverse problem, integral equation, Fourier series, Banach fixed point theorem.

Halim Hamroyevich Turdiev

Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan,
11 M. Ikbol str., Bukhara 200118 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: hturdiev@mail.ru