ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ЮФУ

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVI Международной научной конференции
(РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.)

Владикавказ
2021

ББК 22.12+22.16+22.18
УДК 510.12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2021.—220 с.

Сборник содержит тезисы докладов XVI Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-Алания, г. Владикавказ, 20–24 сентября 2021 г.).

ISBN 978-5-904695-45-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

СЕКЦИЯ I
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

СЕКЦИЯ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ В СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Д. К. Дурдиев (Узбекистан, Бухара, Бухарский филиал ИМ АН РУз),
Х. Х. Турдиев (Узбекистан, Бухара; БухГУ)

Распространение различных волн описывается гиперболическими системами уравнений первого порядка. Примером может служить явление распространения электромагнитных волн в средах с дисперсией. Оказывается, что в таких средах нарушается однозначная зависимость D и B (индукции электрического и магнитного полей, соответственно) от значений E и H (напряженности соответствующих полей) в тот же момент времени [1, 2]:

$$D(x,t) = \hat{\varepsilon}E + \int\limits_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)\,d\tau, \quad B(x,t) = \hat{\mu}H + \int\limits_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)\,d\tau, \quad (1)$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$, $D = (D_1, D_2, D_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\psi(t) = \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — диагональные матрицы, представляющие память.

Запишем ее в виде симметрической гиперболической системы [2]:

$$\begin{aligned}\Big(I_6\,\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{2}\widetilde{C}_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} + \widetilde{C}\Big)V &= \\ = \int\limits_0^t \widehat{K}(z,t-\tau)V(x_1,x_2,z,\tau)\,d\tau &+ \widehat{F}(x_1,x_2,z,t).\end{aligned} \quad (2)$$

В прямой задаче при заданных матрицах $\widehat{K}$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}$ и вектор-функции $\widehat{F}$ требуется определить в области $D = \big\{(x_1,x_2,z,t) : 0 < z < L,\, t > 0,\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\big\}$ вектор функцию $V(z,t)$, удовлетворяющую уравнению (2) при следующих начальных и граничных условиях [3, 4]:

$$V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{t=0} = \phi_i(x_1,x_2,z), \quad i = \overline{1,6}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{z=0} &= g_i(x_1,x_2,t), \quad i = 1,2; \\ V_i(x_1,x_2,z,t)\big|_{z=L} &= g_i(x_1,x_2,t), \quad i = 3,4.\end{aligned} \quad (4)$$

Обратную задачу поставим следующем образом: найти функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $t > 0$, $i = 1,2,3$, входящие в матрицу $\widetilde{K}$, если относительно решения задачи (2)–(4) известны дополнительные условия $\overline{x} = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned}V_i(\overline{x},z,t)\big|_{z=L} &= h_i(\overline{x},t), \quad i = 1,2; \\ V_i(\overline{x},z,t)\big|_{z=0} &= h_i(\overline{x},t), \quad i = \overline{3,6}.\end{aligned} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $w(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{V}(z,t)$. При этом получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z) w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,t)\widetilde{\phi}_j(z) + \\ + \int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau)\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t} F_i(z,t), \quad i = \overline{1,4},\end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{6}\big[b_{ij}(z) w_j(z,t) + a_{ij}(z,t)\widetilde{\phi}_j(z)\big] + \int_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau) d\tau, \ i=5,6, \tag{7}$$

$$w_i(z,t)\big|_{t=0} = \Phi_i(z), \quad i = \overline{1,6}, \tag{8}$$

$$w_i(z,t)\big|_{z=0} = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t), \ i = 1,2; \quad w_i(z,t)\big|_{z=L} = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t), \ i = 3,4. \tag{9}$$

$$w_i(0,t) = \frac{d}{dt}\widetilde{h}_i(t), \ i = \overline{3,6}; \quad w_i(L,t) = \frac{d}{dt}\widetilde{h}_i(t), \ i = 1,2. \tag{10}$$

Пусть выполнены условия [5]

$$\widetilde{\phi}_i(\nu) = \widetilde{g}_i(0), \quad F_i(\nu,0) - \gamma_i\left[\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_i(z)\right]_{z=\nu} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\nu)\widetilde{\phi}_i(\nu) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(t)\right]_{t=0}, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\widetilde{g}_i(0) = F_i(\nu,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\phi}_i(z)\Big|_{z=\nu} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\nu)\widetilde{\phi}_i(\nu), \\ \frac{d}{dt}\widetilde{h}_l(t)\Big|_{t=0} = -\sum_{j=1}^{6} b_{lj}(0)\widetilde{\phi}_l(0).\end{gathered} \tag{12}$$

где $\nu := 0$, $i = 1,2$, $L, i = 3,4$, $l = 5,6$.

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\widetilde{g}(t) \in C^2[0,\infty)$, $\widetilde{h}(t) \in C^2(0,\infty)$, $F(z,t) \in C^2(\Pi)$ *и выполнены условие* $\det Q\big(\nu_i;\widetilde{\phi}\big) \neq 0$, *условия согласования* (11), (12). *Тогда для любого* $L > 0$ *на отрезке* $\big[0,L\big]$ *существует единственное решение обратной задачи* (6)–(9), (10) *из класса* $\Psi(t) \in C^1[0,L]$, *и каждая компонента* $\varphi_i \in C^1[0,L]$ *определяется заданием* $h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 1,2,3$, *а* $\psi_i \in C^1[0,L] - h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 4,5,6$.

Литература

1. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications.—1994.—Vol. 22, № 1.—P. 21–44.
2. *Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П.* Обратные задачи электродинамики.—Новосибирск: Выч. центр СО АН СССР, 1984.
3. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
4. *Romanov V. G.* Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations // Dokl. Math.—2017.—Vol. 95, № 3.—P. 230–234.
5. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. матем. физ., анал., геом.—2007.—Т. 3, № 4.—С. 411–423.