Д. К. Дурдиев, Х. Х. Турдиев, Задача определения ядер в системе интегро-дифференциальных уравнений акустики, *Дальневост. матем. журн.*, 2023, том 23, номер 2, 190–210

DOI: 10.47910/FEMJ202317

Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 190–210

УДК 517.968

© Д. К. Дурдиев[1], Х. Х. Турдиев[2]

Задача определения ядер в системе интегро-дифференциальных уравнений акустики

Для приведенных к канонической системе интегро-дифференциальных уравнений акустики ставится прямая задача, состоящая в определении скорости возмущения и давления среды, и обратная задача о нахождении диагональной матрицы памяти. Задачи сводятся к замкнутой системе интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа относительно решения прямой задачи и неизвестных обратной задачи. К этой системе применяется метод сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с экспоненциальной весовой нормой. Доказаны теоремы существования и единственности решений задач в глобальном смысле.

Ключевые слова: *гиперболическая система, система уравнений акустики, интегральное уравнение, принцип сжатых отображений.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202317

Введение

Гиперболические системы уравнений первого порядка описывают многие физические процессы, связанные с распространением волн различной природы. Для примера можно указать системы уравнений акустики, электромагнитных колебаний, теории упругости.

В последнее время наблюдается повышенный интерес к гиперболическим системам интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегралы типа свёртки. Такие уравнения описывают процессы с памятью (с последействием) или, как их ещё называют, эридитарные процессы [1, с. 180–189]. Подобные процессы характеризуются тем, что изменение их состояния в каждый момент времени зависит от предыстории процесса. Примерами таких процессов могут служить деформация

[1] Бухарский филиал Института Математики Академии наук Республики Узбекистан, 200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. М. Икбола, 11.

[2] Бухарский государственный университет, 200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. М. Икбола, 11.
Электронная почта: d.durdiev65@mathinst.uz (Д. К. Дурдиев), hturdiev@mail.ru (Х. Х. Турдиев).

вязкоупругой среды [2, с. 449–453], процессы распространения электромагнитных волн в средах с дисперсией [3, с. 357–392] и динамика сосуществования и развития популяций животных и растений различных видов [1, с. 193–195].

Анализ динамических уравнений, описывающих такие процессы, показывает, что в правую часть системы гиперболических уравнений добавляются вольтерроды — операторы типа свертки некоторой функции, зависящей от времени и эллиптической части соответствующих гиперболических операторов, стоящих в левой части уравнений.

В настоящее время достаточно хорошо изучены обратные задачи определения ядра из одного гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка. В работах [4–8] исследовались одномерные задачи нахождения свёрточного ядра: из общего волнового уравнения [5, 6] и из уравнений вязкоупругости [7–13]. Основными результатами этих работ являются теоремы однозначной разрешимости поставленных задач. В [14–18] получены результаты, говорящие существовании и единственности решений некоторых многомерных обратных задач по определению ядра из гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

Численные решения начально-краевых прямых задач для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости получены в [19,20] (см. также литературу там). Такие исследования по обратным задачам определения ядра рассмотрены в работах [21–23].

Как правило, уравнения второго порядка выводятся из систем уравнений в частных производных первого порядка при некоторых дополнительных предположениях. Обратная задача определения ядер интегральных членов из гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка общего вида с двумя независимыми переменными исследована в [24], а для системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла изучена в [25]. Получены теоремы локального существования и глобальной единственности решения.

Рассматриваемые в настоящей статье задачи являются естественным продолжением этого круга задач и в известной мере обобщают результаты [24, 25] на случай системы уравнений акустики с памятью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных гиперболических уравнений акустики

$$E_4 \frac{\partial V}{\partial t} + D_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{3} D_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + D_4 V = \int_0^t R(t-\tau) V(x,\tau) d\tau. \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $D_1(x_1)=diag(c(x_1),-c(x_1),0,0)$, $V(x,t)=(v_1,v_2,v_3,v_4)^*(x,t)$ — вектор-столбец ($*$ — символ транспонирования),

$$D_2(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}c(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}c(x_1) & 0 \\ c(x_1) & c(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c(x_1) & c(x_1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4(x_1) = \begin{pmatrix} k_1 + c(x_1)\big(\rho(x_1)c(x_1)\big)' & k_2 + c(x_1)\left(\rho(x_1)c(x_1)\right)' & 0 & 0 \\ k_2 - c(x_1)\big(\rho(x_1)c(x_1)\big)' & k_1 - c(x_1)\left(\rho(x_1)c(x_1)\right)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4(0) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\big(k_1(0) + k_2(0)\big), \quad k_2 = \frac{1}{2}\left(k_1(0) - k_2(0)\right),$$

$$R(t) = \left(r_{jn}(t)\right)_{j,n=1}^{4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(k_1'(t) + k_2'(t)\right) & \frac{1}{2}\left(k_1'(t) - k_2'(t)\right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(k_1'(t) - k_2'(t)\right) & \frac{1}{2}\left(k_1'(t) + k_2'(t)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4'(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование. Уравнение (1) выводится из системы интегро-дифференциальных уравнений акустики, приведенной в приложении (раздел 5).

Пусть $c(x_1)$ — положительная и непрерывная дифференцируемая функция. Введем новую переменную y с помощью формулы

$$y = z(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{d\xi}{c(\xi)}. \tag{4}$$

Пусть $x_1 = z^{-1}(y)$ — обратная функция к $y = z(x_1)$. Будем в дальнейшем считать, что во всех функциях проведена замена переменной x_1 на переменную y и, чтобы опять не вводить новые обозначения, сохраним за функциями прежние обозначения, например, $V(z^{-1}(y), x_2, x_3, t) =: V(y, x_2, x_3, t)$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$E_4 \frac{\partial V}{\partial t} + D\frac{\partial V}{\partial y} + \sum_{j=2}^{3} D_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + D_4 V = \int_0^t R(t-\tau)V(y, x_2, x_3, \tau)d\tau, \tag{5}$$

где $D = diag(1, -1, 0, 0)$.

В прямой задаче (смешанная задача) при заданных матрицах $D_j, j = 2, 3, 4$, $R(t)$ требуется определить в области $\Omega = \left\{(y, x_2, x_3, t) : 0 < y < L,\, t > 0,\, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2\right\}$ вектор-функцию $V(y, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющую уравнению (5) при начальных и граничных условиях

$$V(y, x_2, x_3, t)\big|_{t=0} = \varphi(y, x_2, x_3), \tag{6}$$

$$v_1(y, x_2, x_3, t)|_{y=0} = \mathrm{g}_1(x_2, x_3, t); \quad v_2(y, x_2, x_3, t)|_{y=L} = \mathrm{g}_2(x_2, x_3, t), \tag{7}$$

где $\varphi(y, x_2, x_3) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^*(y, x_2, x_3)$ и $\mathrm{g}(x_2, x_3, t) = (\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)^*(x_2, x_3, t)$ — заданные функции.

В обратной задаче предполагаются неизвестными $k_i(t), t > 0, i = \overline{1,4}$ (они входят в компоненты $R(t)$ через производные) и требуется определить их, если относительно решения задачи (5)–(7) известны дополнительные условия, задаваемые на боковых границах области Ω:

$$v_1(y, x_2, x_3, t)\big|_{y=L} = h_1(x_2, x_3, t), \quad v_j(y, x_2, x_3, t)\big|_{y=0} = h_j(x_2, x_3, t), \quad j = 2, 3, 4. \tag{8}$$

При этом числа $k_i(0)$, $i=\overline{1,4}$ считаются заданными.

Пусть вектор-функции $\varphi(y,x_2,x_3)$, $\mathrm{g}(x_2,x_3,t)$, $h(x_2,x_3,t)$, входящие в данные (6), (7), (8), финитны по x_2,x_3 при каждом фиксированном y,t. Тогда, в силу гиперболичности системы (5), таким свойством обладает и решение задачи (5)–(7) (см. например [26, с. 153–161], [27, с. 182]), т. е. для каждого фиксированного y,t функция $V(y,x_2,x_3,t)$ будет финитной по x_2,x_3 и для нее по переменным x_2,x_3 применимо преобразование Фурье.

Изучим свойства решения этой задачи. Более точно — мы ограничимся изучением свойства образа Фурье по переменным x_2,x_3 решения. Обозначим

$$\widetilde{V}(y,\eta,\mu,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} V(y,x_2,x_3,t)e^{i[\eta x_2+\mu x_3]}dx_2dx_3.$$

Фиксируем η,μ и для сокращения записи, введем обозначение $\widetilde{V}(y,\eta,\mu,t)=:\widetilde{V}(y,t)$. терминах функции $\widetilde{V}$ уравнение (5) запишем в виде

$$\left(E_4\frac{\partial}{\partial t}+D\frac{\partial}{\partial y}+C\right)\widetilde{V}=\int\limits_0^t R(t-\tau)\widetilde{V}(y,\tau)d\tau, \tag{9}$$

где $C=-i(D_2\eta+D_3\mu)+D_4=(c_{jn}(y))_{jn=1}^4$. Подобные обозначения примем для образов Фурье функций, входящих в начальные, граничные и дополнительные условия (6), (7) и (8):

$$\widetilde{V}(y,t)\big|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(y), \tag{10}$$

$$\widetilde{v}_1(y,t)\big|_{y=0}=\widetilde{\mathrm{g}}_1(t);\quad \widetilde{v}_2(y,t)\big|_{y=L}=\widetilde{\mathrm{g}}_2(t), \tag{11}$$

$$\widetilde{v}_1(y,t)\big|_{y=L}=\widetilde{h}_1(t),\quad \widetilde{v}_j(y,t)\big|_{y=0}=\widetilde{h}_j(t),\quad j=2,3,4. \tag{12}$$

Пусть $\Omega_L=\{(y,t):0<y<L,\, t>0\}$ — проекция области Ω на плоскость переменных y, t.

Под *решением* задачи (9)–(11) будем понимать функцию $\widetilde{V}(y,t)\in C^1(\Omega_L)\bigcap C\big(\overline{\Omega}_L\big)$, удовлетворяющую при заданных матрицах C и R, уравнению (9), начальным и граничным условиям (10), (11).

Следующий раздел посвящен изучению свойств решения прямой задачи (9)–(11).

2. Исследование прямой задачи

Фиксируем произвольную точку $(y,t)\in\Omega_L$ на плоскости переменных ξ,τ и проведем через нее характеристику i-го уравнения системы (9) до пересечения в области $\tau<t$ с границей Ω_L. Уравнение характеристиками имеет вид

$$\xi=y+\beta_j(\tau-t),\quad j=\overline{1,4}. \tag{13}$$

Система (9) имеет одно семейство характеристик с положительным наклоном (для $\beta_1=1$), одно — с отрицательным наклоном (для $\beta_2=-1$), два семейства — с вертикальными характеристиками (для $\beta_j = 0$, $j = 3,4$). Точка пересечения при $\beta_1 = 1$ лежит либо на отрезке $[0, L]$ оси $t = 0$, либо на прямой $y = 0$; а при $\beta_2 = -1$ либо на отрезке $[0, L]$, либо на прямой $y = L$; при $\beta_j = 0, j = 3,4$ — на отрезке $[0, L]$. Эти характеристики изображены на рис. 1.

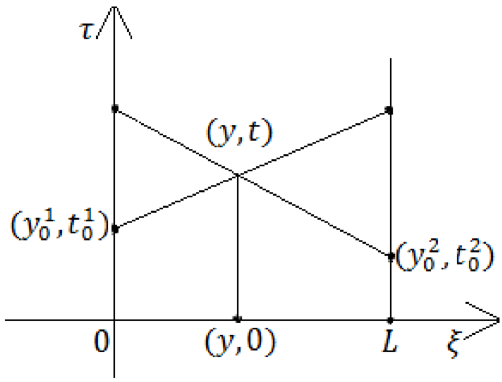

Рис. 1. Характеристические линии.

Интегрируя теперь j-ю компоненту уравнения (9) по характеристике (13) от точки (y_0^j, t_0^j) до точки (y, t), находим

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_j(y,t) = \widetilde{v}_j(y_0^j, t_0^j) - \int\limits_{t_0^j}^{t} \sum_{n=1}^{4} c_{jn}(\xi)\widetilde{v}_n(\xi,\tau)\Big|_{\xi = y+\beta_j(\tau-t)} d\tau + \\ + \int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_{0}^{\tau} \sum_{n=1}^{4} r_{jn}(\alpha)\widetilde{v}_n(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Big|_{\xi = y+\beta_j(\tau-t)} d\tau, \qquad j = \overline{1,4}.\end{gathered} \tag{14}$$

Определим в (14) величину t_0^j. Она зависит от координат точки (y, t), и несложно заметить, что $t_0^j(y, t)$ имеет вид

$$t_0^j(y,t) = \begin{cases} \begin{cases} t - y, \ t \geqslant y, \\ 0, \ 0 < t < y, \end{cases} & j = 1; \\ \begin{cases} t + y - L, \ t \geqslant L - y, \\ 0, \ 0 < t < L - y, \end{cases} & j = 2; \\ 0, \quad j = 3,4. \end{cases}$$

Тогда, из условия, что пара (y_0^j,t_0^j) удовлетворяет уравнению (13), следует

$$y_0^j(y,t) = \begin{cases} \begin{cases} 0, \ t \geqslant y, \\ y-t, \ 0<t<y, \end{cases} & j=1; \\ \begin{cases} L, \ t \geqslant L-y, \\ t+y, \ 0<t<L-y, \end{cases} & j=2; \\ y, \quad j=3,4. \end{cases}$$

Свободные члены интегральных уравнений (14) определяются через начальные и граничные условия (10) и (11) следующим образом:

$$\widetilde{v}_j\left(y_0^j,t_0^j\right) = \begin{cases} \begin{cases} \widetilde{\mathrm{g}}_1(t-y), \ t \geqslant y, \\ \widetilde{\varphi}_1(y-t), \ 0<t<y, \end{cases} & j=1; \\ \begin{cases} \widetilde{\mathrm{g}}_2(t+y-L), \ t \geqslant L-y, \\ \widetilde{\varphi}_2(t+y), \ 0<t<L-y, \end{cases} & j=2; \\ \widetilde{\varphi}_j(y), \quad j=3,4. \end{cases}$$

Требуем, чтобы функции $\widetilde{v}_j\left(y_0^j,t_0^j\right)$ были непрерывными в области Ω_L. Заметим, что для выполнения этих условий заданные функции $\widetilde{\varphi}_j$ и $\widetilde{\mathrm{g}}_j$ должны удовлетворять условиям согласования в угловых точках области Ω_L:

$$\widetilde{\varphi}_1(0)=\widetilde{\mathrm{g}}_1(0); \quad \widetilde{\varphi}_2(L)=\widetilde{\mathrm{g}}_2(0). \tag{15}$$

Здесь и далее значения функций $\widetilde{\mathrm{g}}_j$ при $t=0$ и функций $\widetilde{\varphi}_j$ при $y=0$ и $y=L$ понимаются как предел функций в этих точках при стремлении аргумента с той стороны точки, где эти функции заданы.

Предположим, что все заданные функции, входящие в (14), являются непрерывными функциями своих аргументов в Ω_L и выполнены условия (15). Тогда эта система уравнений является замкнутой системой интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода с непрерывными ядрами и свободными членами. Как обычно, такая система имеет единственное решение в ограниченной подобласти $\Omega_{LT}=\left\{(y,t):0\leqslant y\leqslant L, 0\leqslant t\leqslant T\right\}, T>0$ — некоторое фиксированные число области Ω_L.

Теорема 1. *Пусть вектор-функции* $\varphi(y,x_2,x_3)$, $\mathrm{g}(x_2,x_3,t)$, *входящие в данные* (6), (7) *финитны по* x_2, x_3 *при каждом фиксированном* y, t. *Кроме того,* $\{\rho(y),\, c(y)\} \in C^1[0,L]$, $\widetilde{\varphi}(y) \in C[0,L]$, $\widetilde{\mathrm{g}}(t) \in C[0,T]$, $R(t) \in C\,[0,T]$, *выполнены соотношения* $\rho(y) \geqslant \rho_0 = \mathrm{const} > 0$, $c(y) \geqslant c_0 = \mathrm{const} > 0$ *и условия согласования* (15). *Тогда в области* Ω_{LT} *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение прямой задачи* (9)–(11).

С целью дальнейших исследований введем здесь вектор–функцию $w(y,t)=\frac{\partial \widetilde{V}(y,t)}{\partial t}$. Чтобы написать прямую задачу для функции $w(y,t)$, подобной (9)–(11), продифференцируем уравнения (9) и граничные условия (11) по переменной t, а условие при

$t=0$ найдем с помощью уравнений (9) и начальных условий (10). Тогда получим

$$\left(E_4\frac{\partial}{\partial t}+D\frac{\partial}{\partial y}+C\right)w=R(t)\widetilde{\varphi}(y)+\int\limits_0^t R(t-\tau)w(y,\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$w_j(y,t)\Big|_{t\,=\,0}=\,-\,\beta_j\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_j(y)-\sum_{n\,=\,1}^{4}c_{jn}(y)\widetilde{\varphi}_n(y)=:\Phi_j(y),\ j=\overline{1,4}, \tag{17}$$

$$w_1(y,t)\Big|_{y\,=\,0}=\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_1(t);\quad w_2(y,t)\Big|_{y\,=\,L}=\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_2(t). \tag{18}$$

Как следует из (12), дополнительные условия для функций $w(y,t)$ принимают вид

$$w_1(L,t)=\frac{d}{dt}\widetilde{h}_1(t),\quad w_j(0,t)=\frac{d}{dt}\widetilde{h}_j(t),\quad j=2,3,4. \tag{19}$$

Снова интегрирование вдоль соответствующих характеристик приведет задачу (16)–(18) к интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} w_j(y,t)&=w_j\left(y_0^j,t_0^j\right)+\int\limits_{t_0^j}^{t}\left[\sum_{n\,=\,1}^{4}r_{jn}(\tau)\widetilde{\varphi}_n(\xi)-\sum_{n\,=\,1}^{4}c_{jn}(\xi)w_n(\xi,\tau)\right]\Bigg|_{\xi\,=\,y+\beta_j(\tau-t)}d\tau+\\ &+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n\,=\,1}^{4}r_{jn}(\alpha)w_n(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi\,=\,y+\beta_j(\tau-t)}d\tau,\quad j=\overline{1,4}. \end{aligned} \tag{20}$$

В уравнениях (20) функции $w_j\left(y_0^j,t_0^j\right)$ определяются следующим образом:

$$w_j\left(y_0^j,t_0^j\right)=\begin{cases}\begin{cases}\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_1(t-y),\ t\geqslant z,\\ \Phi_1(y-t),\ 0<t<z,\end{cases} & j=1;\\ \begin{cases}\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_1(t+y-L),\ t\geqslant L-y,\\ \Phi_2(t+y),\ 0<t<L-y,\end{cases} & j=2;\\ \Phi_j(y),\quad j=3,4.\end{cases}$$

Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_1(y)\Big|_{y\,=\,0}-\sum_{n\,=\,1}^{4}c_{1n}(0)\widetilde{\varphi}_n(0)=\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_1(t)\Big|_{t\,=\,0},\\ &\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_2(y)\Big|_{y\,=\,L}-\sum_{n\,=\,1}^{4}c_{2n}(L)\widetilde{\varphi}_n(L)=\frac{d}{dt}\widetilde{\mathrm{g}}_2(t)\Big|_{t\,=\,0}. \end{aligned} \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что условия согласования начальных (17) и граничных (18) данных в угловых точках области Ω_L совпадают с соотношениями (21). Отсюда ясно, что при выполнении тех же равенств (21) уравнения (16) будут иметь единственные непрерывные решения $w_j(y,t)$, $j=\overline{1,4}$ или те же самые $(\partial/\partial t)\widetilde{v}_j(y,t)$.

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть вектор-функции* $\varphi(y,x_2,x_3)$, $\mathrm{g}(x_2,x_3,t)$, *входящие в данные* (6), (7), *финитны по* x_2, x_3 *при каждом фиксированном* y,t. *Кроме того,* $\{\rho(y),\, c(y)\}\in C^1[0,L]$, $\widetilde{\varphi}(y)\in C^1[0,L]$, $\widetilde{\mathrm{g}}(t)\in C^1[0,T]$, $R(t)\in C\,[0,T]$, *выполнены соотношения* $\rho(y)\geqslant\rho_0=\mathrm{const}>0$, $c(y)\geqslant c_0=\mathrm{const}>0$ *и условия согласования* (15), (21). *Тогда в области* Ω_{LT} *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи* (16)–(18).

3. Вывод эквивалентной системы интегральных уравнений обратной задачи

Рассмотрим произвольную точку $(y,0)\in\Omega_L$ и проведем через нее характеристические прямые (13) до пересечения с боковыми границами области Ω_L. Интегрируя первую и вторую компоненты системы уравнений (16) и используя данные (19) на боковых границах области Ω_L, находим

$$\begin{aligned} w_j(y,0)=\frac{d}{dt}\widetilde{h}_j(t_j(y))+\int\limits_0^{t_j(y)}\left[\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)\widetilde{\varphi}_n(\xi)-\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(\xi)w_n(\xi,\tau)\right]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j\tau}d\tau+\\ +\int\limits_0^{t_j(y)}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\alpha)w_n(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=y+\beta_j\tau}d\tau,\quad j=1,2, \end{aligned}\tag{22}$$

где

$$t_j(y)=\frac{1}{\beta_j}\begin{cases}-\,y, & j=1,\\ L-y, & j=2.\end{cases}$$

С учётом начальных и дополнительных условий (17) и (19) перепишем интегральные уравнения (22) и (20) для $j=3,4$ в виде

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{t_j(y)}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)\widetilde{\varphi}_n(y+\beta_j\tau)d\tau+\int\limits_0^{t_j(y)}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\alpha)w_n(y+\beta_j\tau,\tau-\alpha)d\alpha d\tau=\\ =\Phi_j(y)-\frac{d}{dt}\widetilde{h}_j(t_j(y))+\int\limits_0^{t_j(y)}\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(y+\beta_j\tau)w_n(y+\beta_j\tau,\tau)d\tau,\quad j=1,2, \end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)\widetilde{\varphi}_n(0)d\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\alpha)w_n(0,\tau-\alpha)d\alpha d\tau=\\ =\Phi_j(0)-\frac{d}{dt}\widetilde{h}_j(t)+\int\limits_0^{t}\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(0)w_n(0,\tau)d\tau,\quad j=3,4. \end{aligned}\tag{24}$$

Продифференцируем первые уравнения по переменный y, а вторые — по t. Тогда

$$\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(t_j(y))\widetilde{\varphi}_n(y+\beta_jt_j(y))-\beta_j\int\limits_0^{t_j(y)}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\beta_j\tau)+$$

$$+\int\limits_0^{t_j(y)}\sum_{n=1}^4 r_{jn}(\tau)w_n\big(y+\beta_j t_j(y),t_j(y)-\tau\big)d\tau-\beta_j\int\limits_0^{t_j(y)}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^4 r_{jn}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}w_n\big(y+\beta_j\tau,\tau-\alpha\big)d\alpha d\tau=$$

$$\begin{aligned}= -\beta_j\Phi_j'(y)-\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_j\big(t_j(y)\big)+\sum_{n=1}^4 c_{jn}(y+\beta_j t_j(y))w_n\big(y+\beta_j t_j(y),t_j(y)\big)-\\ -\beta_j\int\limits_0^{t_j(y)}\sum_{n=1}^4\frac{\partial}{\partial y}\Big[c_{jn}(y+\beta_j\tau)w_n(y+\beta_j\tau,\tau)\Big]d\tau,\quad j=1,2,\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^4 r_{jn}(t)\widetilde{\varphi}_n(0)+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4 r_{jn}(\tau)w_n(0,t-\tau)d\tau=\\ = -\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_j(t)+\sum_{n=1}^4 c_{jn}(0)w_n(0,t),\quad j=3,4.\end{aligned}\tag{26}$$

Далее, заменяя в уравнениях (25) $t_j(y)$ на t, несложно получить следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^4 r_{1n}(t)\widetilde{\varphi}_n(0)-\beta_1\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4 r_{1n}(\tau)\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\beta_1\tau)+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4 r_{1n}(\tau)w_n(0,t-\tau)d\tau-$$

$$-\beta_1\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\sum_{n=1}^4 r_{1n}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}w_n(y,\tau-\alpha)\Big|_{y=-\beta_1(t-\tau)}d\alpha d\tau= = -\beta_1\Phi_1'(y)-\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_1(t)+$$

$$+\sum_{n=1}^4 c_{1n}(0)w_n(0,t)-\beta_1\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{1n}(y+\beta_j\tau)w_n(y+\beta_1\tau,\tau)\right]d\tau,$$

$$\sum_{n=1}^4 r_{2n}(t)\widetilde{\varphi}_n(L)-\beta_2\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4 r_{2n}(\tau)\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\beta_2\tau)+$$

$$+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4 r_{2n}(\tau)w_k(L,t-\tau)d\tau-\beta_2\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\sum_{n=1}^4 r_{2n}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}w_n(y,\tau-\alpha)\Big|_{y=L-\beta_j(t-\tau)}d\alpha d\tau=$$

$$\begin{aligned}= -\beta_2\Phi_2'(y)-\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_2(t)+\sum_{n=1}^4 c_{2n}(L)w_k(L,t)-\\ -\beta_2\int\limits_0^t\sum_{n=1}^4\frac{\partial}{\partial y}\Big[c_{2n}(y+\beta_2\tau)w_n(y+\beta_2\tau,\tau)\Big]d\tau.\end{aligned}\tag{27}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия

$$\widetilde{\varphi}_1(0)\widetilde{\varphi}_1(L)\neq\widetilde{\varphi}_2(0)\widetilde{\varphi}_2(L),\quad \widetilde{\varphi}_j(0)\neq 0,\quad j=3,4.\tag{28}$$

Учитывая вид матрицы $R(t)$ по формуле (3) (напомним, что компоненты $R(t)$ обозначены через r_{lj}, $l,j=\overline{1,4}$, а r_{lj} выражаются через производной k_j), из (27) получим интегральные уравнение для r_{lj}, $l,j=\overline{1,4}$:

$$r_{lj}(t)=\frac{1}{\Delta}\Bigg\{\int\limits_0^t\Bigg[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\tau)r_{ln}+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_{3-n}(y-\tau)r_{ln}(\tau)-$$

$$-\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}w_n(0,t-\tau)r_{ln}+\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}w_{3-n}(0,t-\tau)r_{ln}\Bigg]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\Bigg[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y}w_n(y,\tau-\alpha)r_{ln}(\tau)\Big|_{y=-t+\tau}+$$

$$+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y}w_{3-n}(y,\tau-\alpha)r_{ln}(\tau)\Big|_{y=L-t+\tau}\Bigg]d\alpha d\tau+\beta_{3-j}\widetilde{\varphi}_j(L)\Phi_1'(y)+$$

$$+\beta_{3-j}\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\Phi_2'(y)-\widetilde{\varphi}_j(L)\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_1(t)+\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_2(t)+\sum_{n=1}^{4}\Big(\widetilde{\varphi}_j(L)c_{1n}(0)w_n(0,t)-$$

$$-\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)c_{ln}(L)w_n(L,t)\Big)+\beta_{3-j}\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{4}\Big(\widetilde{\varphi}_j(L)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y+\tau)w_n(y+\tau,\tau)\right]-$$

$$-\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y-\tau)w_n(y-\tau,\tau)\right]\Big)d\tau\Bigg\},\quad l,j=1,2,\tag{29}$$

$$r_{jj}(t)=\frac{1}{\widetilde{\varphi}_j(0)}\left\{-\int\limits_0^t r_{jj}(\tau)w_j(0,t-\tau)d\tau-\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_j(t)\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(0)w_n(0,t)\right\},\quad j=3,4.\tag{30}$$

$$r_{34}(t)=r_{43}(t)=0,\ r_{lj}(t)=r_{jl}(t)=0,\quad l=1,2,\quad j=3,4,\tag{31}$$

где $\Delta=\widetilde{\varphi}_1(0)\widetilde{\varphi}_1(L)-\widetilde{\varphi}_2(L)\widetilde{\varphi}_2(0)$.

В уравнения (29) входят неизвестные функции $\frac{\partial}{\partial y}w_j, j=\overline{1,4}$. Для них мы находим интегральные уравнения из (20) с помощью дифференцирования их по переменной y. При этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}w_j(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}w_j(y_0^j,t_0^j)-\frac{\partial}{\partial y}t_0^j\left[\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(t_0^j)\widetilde{\varphi}_n(y_0^j)-\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(y_0^j)w_n(y_0^j,t_0^j)\right]+$$

$$+\int\limits_{t_0^j}^t\Bigg[\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(\xi)-\sum_{n=1}^{4}\frac{d}{dy}c_{jn}(\xi)w_n(\xi,\tau)-$$

$$-\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(\xi)\frac{\partial}{\partial y}w_n(\xi,\tau)\Bigg]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)}d\tau-\frac{\partial}{\partial y}t_0^j\int\limits_0^{t_0^j}\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(\tau)w_n(y_0^j,t_0^j-\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4} r_{jn}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}w_n(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Big|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)}d\tau,\quad j=\overline{1,4}. \tag{32}$$

Требуем от заданных функций выполнения условий согласования

$$-\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_1(y)\Big|_{y=L}-\sum_{l=1}^{4}c_{1l}(L)\widetilde{\varphi}_l(L)=\frac{d}{dt}\widetilde{h}_1(t)\Big|_{t=0},$$
$$-\beta_j\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_j(y)\Big|_{y=0}-\sum_{l=1}^{4}c_{jl}(0)\widetilde{\varphi}_l(0)=\frac{d}{dt}\widetilde{h}_j(t)\Big|_{t=0},\quad j=2,3,4. \tag{33}$$

Основной результат доказывается в следующем разделе.

4. Основной результат и его доказательство

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и вектор-функция* $h(x_1,x_2,t)$ *финитна по* x_1,x_2 *при каждом фиксированном* t*, кроме того,* $\widetilde{\varphi}(y)\in C^2\,[0,L]$, $\widetilde{\mathrm{g}}(t)\in C^2\,[0,T]\,,\,\widetilde{h}(t)\in C^2\,[0,T]$ *и выполнены соотношения* (21), (28), (33). *Тогда для любого* $L>0$ *на отрезке* $\big[0,L\big]$ *существует единственное решение обратной задачи* (5)–(8) *из класса* $k_j\in C^1\big[0,L\big]$, $j=\overline{1,4}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее множество точек:

$$\Omega_0 :=\Big\{(y,t):0\leqslant y\leqslant L,\,0\leqslant t\leqslant L\Big\}.$$

Уравнения (20), (29), (30) и (32), дополненные начальными и граничными условиями из равенств (15), образуют в Ω_0 замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $w_j(y,t)$, $j=\overline{1,4}$, $r_{lj}(t)$, $l,j=1,2$, $r_{jj}(t)$, $j=3,4$, $\frac{\partial}{\partial y}w_j(y,t)$, $j=\overline{1,4}$.

Уравнения (20), (29), (30) и (32) показывают, что значения функций $w_j(y,t)$, $j==\overline{1,4}$, $r_{lj}(t)$, $l,j=1,2$, $r_{jj}(t)$, $j=3,4$, $\frac{\partial}{\partial y}w_j(y,t)$, $j=\overline{1,4}$ при $(y,t)\in\Omega_0$ выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в Ω_0.

Запишем уравнения (20), (29), (30) и (32) в виде замкнутой системы интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода. Для этого введем в рассмотрение вектор–функцию $\psi(y,t)=\Big(\psi_j^1(y,t),\ j=\overline{1,4},\ \psi_j^2(y,t),\ j=1,2,\ \psi_j^3(y,t),\ j==3,4,\ \psi_j^4(y,t),\ j=\overline{1,4}\Big)$ определив её компоненты равенствами

$$\psi_j^1(y,t)=w_j(y,t),\quad j=\overline{1,4},$$
$$\psi_j^2(y,t)=\psi_j^2(t)=r_{lj}(t),\quad j=1,2,\qquad \psi_j^3(y,t)=\psi_j^3(t)=r_{jj}(t),\quad j=3,4,$$
$$\psi_j^4(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}w_j(y,t)+\frac{\partial}{\partial y}t_0^j\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(t_0^j)\widetilde{\varphi}_n(y_0^j),\quad j=\overline{1,4}.$$

Тогда система уравнений (20), (29), (30) и (32) принимает операторную форму

$$\psi = \mathcal{F}\psi, \tag{34}$$

где компоненты оператора $\mathcal{F}$ в соответствии с правыми частями уравнений (20), (29), (30) и (32) имеют вид

$$\mathcal{F}_j^1\psi = \psi_j^{01}(y,t) + \int\limits_{t_0^j}^{t} \left[\sum_{n=1}^{4} \psi_n^2(\tau)\widetilde{\varphi}_n(\xi) - \sum_{n=1}^{4} c_{jn}(\xi)\psi_n^1(\xi,\tau)\right]\Bigg|_{\xi = y+\beta_j(\tau-t)} d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau} \sum_{n=1}^{4} \psi_n^2(\alpha)\psi_n^1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi = y+\beta_j(\tau-t)} d\tau, \quad j=\overline{1,4}, \tag{35}$$

$$\mathcal{F}_j^2\psi = \psi_j^{02}(y,t) + \frac{1}{\Delta}\Bigg\{\int\limits_0^t \Bigg[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\tau)\psi_n^2(\tau) +$$
$$+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_{3-n}(y-\tau)\psi_n^2(\tau) - \widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2} w_n(0,t-\tau)\psi_n^2(\tau) +$$
$$+\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2} w_{3-n}(0,t-\tau)\psi_n^2(\tau)\Bigg] d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau}\Bigg[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\psi_n^3(y,\tau-\alpha)\psi_n^2(\tau)\Bigg|_{y=-t+\tau} +$$
$$+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\psi_{3-n}^3(y,\tau-\alpha)r_{ln}(\tau)\Bigg|_{y=L-t+\tau}\Bigg] d\alpha d\tau +$$
$$+\beta_{3-j}\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{4}\Bigg(\widetilde{\varphi}_j(L)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y+\tau)\psi_n^1(y+\tau,\tau)\right] -$$
$$-\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y-\tau)\psi_n^1(y-\tau,\tau)\right]\Bigg)d\tau\Bigg\}, \quad j=1,2, \tag{36}$$

$$\mathcal{F}_j^2\psi = \psi_j^{02}(y,t) - \frac{1}{\widetilde{\varphi}_j(0)}\int\limits_0^t \psi_j^2(\tau)w_j(0,t-\tau)d\tau, \quad j=3,4, \tag{37}$$

$$\mathcal{F}_j^3\psi = \psi_j^{03}(y,t) + \int\limits_{t_0^j}^{t}\Bigg[\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\tau)\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(\xi) - \sum_{n=1}^{4}\frac{d}{dy}c_{jn}(\xi)\psi_n^1(\xi,\tau) -$$
$$-\sum_{n=1}^{4} c_{jn}(\xi)\psi_n^3(\xi,\tau)\Bigg]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)} d\tau - \frac{\partial}{\partial y}t_0^j\int\limits_0^{t_0^j}\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\tau)\psi_n^1(y_0^j,t_0^j-\tau)d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\alpha)\psi_n^3(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)} d\tau, \quad j=\overline{1,4}. \tag{38}$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\psi_j^{01}(y,t) = w_j(y_0^j, t_0^j), \quad j=\overline{1,4},$$

$$\psi_j^{02}(y,t) = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{\beta_{3-j}\widetilde{\varphi}_j(L)\Phi_1'(y) + \beta_{3-j}\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\Phi_2'(y) - \widetilde{\varphi}_j(L)\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_1(t) +$$

$$+\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_2(t) + \sum_{n=1}^{4}\Big(\widetilde{\varphi}_j(L)c_{ln}(0)w_n(0,t) - \widetilde{\varphi}_{3-j}(0)c_{ln}(L)w_n(L,t)\Big)\Bigg\}, \quad j=1,2,$$

$$\psi_j^{02} = -\frac{1}{\widetilde{\varphi}_j(0)}\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{h}_j(t) + \frac{1}{\widetilde{\varphi}_j(0)}\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(0)w_n(0,t), \quad j=3,4,$$

$$\psi_j^{03}(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}w_j\left(y_0^j, t_0^j\right) - \frac{\partial}{\partial y}t_0^j\left[\sum_{n=1}^{4}r_{jn}(t_0^j)\widetilde{\varphi}_n(y_0^j) - \sum_{n=1}^{4}c_{jn}\left(y_0^j\right)w_n\left(y_0^j, t_0^j\right)\right], \quad j=\overline{1,4}.$$

Определим на множестве непрерывных функций $C_\sigma(\Omega_0)$ норму

$$\|\psi\|_\sigma = \max_{1\leqslant j\leqslant 4,\ 1\leqslant l\leqslant 3}\ \sup_{(y,t)\in\Omega_0}\left|\psi_j^l(y,t)e^{-\sigma t}\right|,$$

$\sigma \geqslant 0$ —некоторое число, которое будет выбрано позже. Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой $\|\psi\| = \max_{1\leqslant j\leqslant 4,\, 1\leqslant l\leqslant 3}\sup_{(y,t)\in\Omega_0}\left|\psi_j^l(y,t)\right|$. В силу действия неравенства

$$e^{-\sigma L}\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_\sigma \leqslant \|\psi\|$$

нормы $\|\psi\|_\sigma$ и $\|\psi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $L \in (0,\infty)$.

Далее рассмотрим множество функций $S\left(\psi^0, r\right) \subset C_\sigma(\Omega_0)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\psi - \psi^0\|_\sigma \leqslant r,$$

где $r > 0$ — заданное фиксированное число, а вектор-функция $\psi^0(y,t) = \Big(\psi_j^{01}(y,t)$, $\psi_j^{02}(y,t), \psi_j^{03}(y,t), j = \overline{1,4}\Big)$ определена свободными членами операторного уравнения (34). Нетрудно заметить, что для $\psi \in S\left(\psi^0, r\right)$ имеет место оценка $\|\psi\|_\sigma \leqslant \|\psi^0\|_\sigma + r \leqslant \|\psi^0\| + r := r_0$. Следовательно, r_0 —известное число.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\varphi}_0 := \max_{1\leqslant j\leqslant 4}\|\widetilde{\varphi}_j\|_{C^2[0,L]}, \quad \widetilde{\mathrm{g}}_0 := \max_{1\leqslant j\leqslant 4}\|\widetilde{\mathrm{g}}_j\|_{C^2[0,L]}, \quad \widetilde{h}_0 := \max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left\|\widetilde{h}_j\right\|_{C^2[0,L]},$$

$$c_0 := \max_{1\leqslant j,k\leqslant 4}\|c_{jn}\|_{C^2[0,L]}, \quad \Upsilon_0 := \max\left\{\widetilde{\mathrm{g}}_0, \widetilde{h}_0\right\},$$

$$\Delta_0 = \min\left\{\Delta,\ \widetilde{\varphi}_j(0),\ j=3,4\right\}.$$

Оператор $\mathcal{F}$ переводит пространство $C_\sigma(\Omega_0)$ в себя. Покажем, что при подходящем выборе σ (заметим, что $L > 0$ — произвольное фиксированное число) оно является на множестве $S\left(\psi^0, r\right)$ оператором сжатия. Убедимся вначале в том, что оператор $\mathcal{F}$ переводит множество $S\left(\psi^0, r\right)$ в себя, т.е. из условия $\psi(y,t) \in S\left(\psi^0, r\right)$

следует, что $\mathcal{F}\psi\in S\left(\psi^0,r\right)$, если σ удовлетворяет некоторым ограничениям. В самом деле, для любых $(y,t)\in\Omega_0$ и любого $\psi\in S\left(\psi^0,r\right)$ выполняются неравенства

$$\left|\left(\mathcal{F}_j^1\psi-\psi_j^{01}\right)e^{-\sigma t}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{t_0^j}^{t}\left[\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}\widetilde{\varphi}_n(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)}-\sum_{n=1}^{4}c_{jn}(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)}\psi_n^1(\xi,\tau)e^{-\sigma\tau}\right]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\alpha)e^{-\sigma\alpha}\psi_n^1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)}e^{-\sigma(t-\tau)}d\alpha\Big|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)}d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\sigma}\Big[(\widetilde{\varphi}_0+c_0)\|\psi\|_\sigma+\|\psi\|_\sigma^2L\Big]\leqslant\frac{4}{\sigma}\left(\widetilde{\varphi}_0+c_0+Lr_0\right)r_0:=\frac{1}{\sigma}\alpha_{11},$$

$$\left|\left(\mathcal{F}_j^2\psi-\psi_j^{02}\right)e^{-\sigma t}\right|=\left|\frac{1}{\Delta}\left\{\int\limits_0^t\left[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(y+\tau)\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}+\right.\right.\right.$$

$$+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_{3-n}(y-\tau)\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}-\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}w_n(0,t-\tau)\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}+$$

$$\left.+\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}w_{3-n}(0,t-\tau)\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\right]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau}\left[\beta_j\widetilde{\varphi}_j(L)\sum_{n=1}^{2}\psi_n^3(y,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)}\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\alpha}e^{-\sigma(t-\tau)}\Big|_{y=-t+\tau}+\right.$$

$$\left.+\beta_j\widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\sum_{n=1}^{2}\psi_{3-n}^3(y,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)}\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\alpha}e^{-\sigma(t-\tau)}\Big|_{y=L-t+\tau}\right]d\alpha d\tau+$$

$$+\beta_{3-j}\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{4}\left(\widetilde{\varphi}_j(L)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y+\tau)\psi_n^1(y+\tau,\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\right]-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\ \widetilde{\varphi}_{3-j}(0)\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{ln}(y-\tau)\psi_n^1(y-\tau,\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\right]\right)d\tau\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\sigma\Phi_0}\Big[\widetilde{\varphi}_0\left(\widetilde{\varphi}_0+\Upsilon_0+2c_0\right)+L\widetilde{\varphi}_0\|\psi\|_\sigma\Big]\|\psi\|_\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\sigma\Phi_0}\Big[\widetilde{\varphi}_0\left(\widetilde{\varphi}_0+\Upsilon_0+2c_0\right)+L\widetilde{\varphi}_0\Big]r_0:=\frac{1}{\sigma}\alpha_{12},$$

$$\left|\left(\mathcal{F}_j^3\psi-\psi_j^{03}\right)e^{-\sigma t}\right|=\left|-\frac{1}{\widetilde{\varphi}_j(0)}\int\limits_0^t\psi_j^2(\tau)e^{-\sigma\tau}w_j(0,t-\tau)e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma\Delta_0}\Upsilon_0\|\psi\|_\sigma\leqslant\frac{1}{\sigma\Delta_0}\Upsilon_0r_0:=\frac{1}{\sigma}\alpha_{13},$$

$$\left|\Big(\mathcal{F}_j^4\psi - \psi_j^{04}\Big)e^{-\sigma t}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{t_0^j}^{t}\left[\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_n(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)} - \sum_{n=1}^{4}\frac{d}{dy}c_{jn}(\xi)\psi_n^1(\xi,\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)} -\right.\right.$$

$$\left.- \sum_{n=1}^{4}c_{jn}(\xi)\psi_n^3(\xi,\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\right]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)} d\tau -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}t_0^j\int\limits_0^{t_0^j}\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\tau)e^{-\sigma\tau}\psi_n^1(y_0^j,t_0^j-\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau +$$

$$\left.+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}\psi_n^2(\alpha)e^{-\sigma\tau}\psi_n^3(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)}e^{-\sigma(t-\tau)}d\alpha\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)} d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sigma}\Big[(\widetilde{\varphi}_0 + 2c_0)\|\psi\|_\sigma + 2\|\psi\|_\sigma^2 L\Big] \leqslant \frac{4}{\sigma}\left(\widetilde{\varphi}_0 + 2c_0 + 2Lr_0\right)r_0 := \frac{1}{\sigma}\alpha_{14}.$$

Отсюда и из формул (34) и (35)–(38) следует, что

$$\left\|\mathcal{F}\psi - \psi^0\right\|_\sigma = \max\Bigg\{\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\Big\{\sup_{(y,t)\in\Omega_0}\left|\left(\mathcal{F}_j^1\psi - \psi_j^{01}\right)e^{-\sigma t}\right|\Big\},$$

$$\max_{j=1,2}\Big\{\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{F}_j^2\psi - \psi_j^{02}\right)e^{-\sigma t}\right|\Big\},\ \max_{j=3,4}\Big\{\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{F}_j^3\psi - \psi_j^{03}\right)e^{-\sigma t}\right|\Big\},$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\Big\{\sup_{(y,t)\in\Omega_0}\left|\left(\mathcal{F}_j^4\psi - \psi_j^{04}\right)e^{-\sigma t}\right|\Big\}\Bigg\} \leqslant \frac{1}{\sigma}\alpha_{01},$$

где $\alpha_{01} := \max(\alpha_{11},\alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14})$. Выбирая $\sigma > (1/r)\alpha_{01}$, получим, что оператор $\mathcal{F}$ переводит множество $S\left(\psi^0,r\right)$ в себя.

Возьмем теперь любые функции $\psi,\widetilde{\psi}\in S\left(\psi^0,r\right)$ и оценим норму разности $\mathcal{F}\psi - \mathcal{F}\widetilde{\psi}$. Используя очевидное неравенство

$$\left|\psi_j^n\psi_j^l - \widetilde{\psi}_j^n\widetilde{\psi}_j^l\right|e^{-\sigma t} \leqslant \left|\psi_j^n - \widetilde{\psi}_j^n\right|\left|\psi_j^l\right|e^{-\sigma t} + \left|\widetilde{\psi}_j^n\right|\left|\psi_j^l - \widetilde{\psi}_j^l\right|e^{-\sigma t} \leqslant 2r_0\|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma$$

и оценки для интегралов, аналогичные приведенным выше, получим

$$\left|\left(\mathcal{F}_j^1\psi - \mathcal{F}_j^1\widetilde{\psi}\right)e^{-\sigma t}\right| = \left|\int\limits_{t_0^j}^{t}\left[\sum_{n=1}^{4}(\psi_n^2(\tau) - \widetilde{\psi}_n^2(\tau))e^{-\sigma\tau}\widetilde{\varphi}_n(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)} -\right.\right.$$

$$\left.- \sum_{n=1}^{4}c_{jn}(\xi)e^{-\sigma(t-\tau)}(\psi_n^1(\xi,\tau) - \widetilde{\psi}_n^1(\xi,\tau))e^{-\sigma\tau}\right]\Bigg|_{\xi=y+\beta_j(\tau-t)} d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0^j}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{n=1}^{4}\Big(\psi_n^2(\alpha)e^{-\sigma\alpha}\psi_n^1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha)} -$$

$$- \widetilde{\psi}_n^2(\alpha) e^{-\sigma\alpha} \widetilde{\psi}_n^1(\xi, \tau - \alpha) e^{-\sigma(\tau-\alpha)} \Big) e^{-\sigma(t-\tau)} d\alpha \Big|_{\xi = y + \beta_j(\tau - t)} d\tau \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sigma} \Big[(\widetilde{\varphi}_0 + c_0) \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma + 2Lr_0 \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma \Big] \leqslant \frac{4}{\sigma} \left(\widetilde{\varphi}_0 + c_0 + 2Lr_0 \right) \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma := \frac{1}{\sigma} \alpha_{21} \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma.$$

Аналогично получим следующие оценки:

$$\Big| \left(\mathcal{F}_j^2 \psi - \psi_j^{02} \right) e^{-\sigma t} \Big| \leqslant \frac{4}{\sigma \Delta_0} \Big[\widetilde{\varphi}_0 \left(\widetilde{\varphi}_0 + \Upsilon_0 + 2c_0 \right) \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma + 2r_0 L \widetilde{\varphi}_0 \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sigma \Delta_0} \Big[\widetilde{\varphi}_0 \Big(\widetilde{\varphi}_0 + \Upsilon_0 + 2c_0 \Big) + 2r_0 L \widetilde{\varphi}_0 \Big] \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma := \frac{1}{\sigma} \alpha_{22} \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma,$$

$$\Big| \left(\mathcal{F}_j^3 \psi - \psi_j^{03} \right) e^{-\sigma t} \Big| \leqslant \frac{1}{\sigma \Phi_0} \Upsilon_0 \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma := \frac{1}{\sigma} \alpha_{23},$$

$$\Big| \left(\mathcal{F}_j^4 \psi - \psi_j^{04} \right) e^{-\sigma t} \Big| \leqslant \frac{4}{\sigma} \Big[(\widetilde{\varphi}_0 + 2c_0) \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma + 2Lr_0 \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sigma} \left(\widetilde{\varphi}_0 + 2c_0 + 2Lr_0 \right) \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma := \frac{1}{\sigma} \alpha_{24} \|\psi - \widetilde{\psi}\|_\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{F}\upsilon - \mathcal{F}\widetilde{\upsilon}\|_\sigma = \max \Big\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} \Big\{ \sup_{(y,t) \in \Omega_0} \Big| \left(\mathcal{F}_j^1 \upsilon - \mathcal{F}_j^1 \widetilde{\upsilon} \right) e^{-\sigma t} \Big| \Big\},$$

$$\max_{j=1,2} \Big\{ \sup_{t \in [0,L]} \Big| \left(\mathcal{F}_j^2 \upsilon - \mathcal{F}_j^2 \widetilde{\upsilon} \right) e^{-\sigma t} \Big| \Big\}, \max_{j=3,4} \Big\{ \sup_{t \in [0,L]} \Big| \left(\mathcal{F}_j^3 \upsilon - \mathcal{F}_j^3 \widetilde{\upsilon} \right) e^{-\sigma t} \Big| \Big\},$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant 4} \Big\{ \sup_{(y,t) \in \Omega_0} \Big| \left(\mathcal{F}_j^4 \upsilon - \mathcal{F}_j^4 \widetilde{\upsilon} \right) e^{-\sigma t} \Big| \Big\} \Big\} \leqslant \frac{1}{\sigma} \alpha_{02} \|\upsilon - \widetilde{\upsilon}\|_\sigma,$$

где $\alpha_{02} := \max(\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23},\ \alpha_{24})$. Выбирая теперь $\sigma > \alpha_{02}$, находим, что оператор $\mathcal{F}$ сжимает расстояние между элементами $\psi, \widetilde{\psi}$ на $S\left(\psi^0, r_0\right)$.

Таким образом, как следует из вышеприведенных оценок, если число σ выбрано из условия $\sigma > \sigma^* := \max\{\alpha_{01}, \alpha_{02}\}$, то оператор $\mathcal{F}$ является сжимающим на $S\left(\psi^0, r_0\right)$. В этом случае согласно принципу Банаха (см. [28, с. 87–97]) уравнение (34) имеет единственное решение в $S\left(\psi^0, r_0\right)$ для любого фиксированного $L > 0$. □

По найденным $r_{lj}(t),\ l, j = \overline{1,4}$, функции $k_j'(t),\ j = \overline{1,4}$, находятся через равенства

$$k_1'(t) = r_{l1}(t) + r_{l2}(t), \quad k_2'(t) = r_{l1}(t) - r_{l2}(t), \quad k_j'(t) = r_{jj}(t), \quad l = 1, 2,\ j = 3, 4.$$

Тогда

$$k_j(t) = k_j(0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} k_j(\tau) d\tau,\ j = \overline{1,4}.$$

5. Приложение

В этом разделе рассмотрим систему уравнений акустики с памятью, которая являются предметом изучения настоящей работы:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = \int\limits_0^t \overline{k}_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)(x,\tau)d\tau, \\ \rho\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \int\limits_0^t \overline{k}_2(t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\tau)d\tau, \\ \rho\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \int\limits_0^t \overline{k}_3(t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_2}(x,\tau)d\tau, \\ \rho\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \int\limits_0^t \overline{k}_4(t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau, \end{cases} \tag{39}$$

где $u=(u_1,u_2,u_3)^*$ — скорость возмущенной среды, p — давление в этой среде, $\overline{K}(t)= =diag(\overline{k}_1(t),\overline{k}_2(t),\overline{k}_3(t),\overline{k}_4(t))$ — диагональная матрица, представляющая память. Коэффициенты ρ, c связаны со свойствами покоящейся среды: ρ, c — плотность среды в состоянии термодинамического равновесия и скорость звука, зависящие только от координаты x_1. Уравнение (39) при $\overline{K}(t)\equiv 0$ есть система уравнений акустики в трехмерном случае [26, с. 147].

Здесь, чтобы поставить корректную начально-краевую задачу, которая названа прямой задачей, приведём систему (39) к каноническому виду (1) относительно переменных t и x_1.

Запишем систему (39) в виде симметрической гиперболической системы [26, с. 140–149]:

$$A_0\frac{\partial}{\partial t}U + \sum_{j=1}^{3} A_j\frac{\partial}{\partial x_j}U = \int\limits_0^t \overline{K}(t-\tau)\sum_{j=1}^{3} A_j\frac{\partial}{\partial x_j}U(x,\tau)d\tau, \tag{40}$$

где $U=(p,u)^*$ — вектор-столбец; A_j, $j=\overline{1,4}$ — симметрические матрицы, определяемые следующим образом:

$$A_0(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho(x_1)c^2(x_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho(x_1) \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Умножая слева на обратную матрицу $A_0^{-1}(x_1)$ уравнение (40), после несложных преобразований получим

$$E_4\frac{\partial}{\partial t}U + \sum_{j=1}^{3} B_j\frac{\partial}{\partial x_j}U = \int\limits_0^t \overline{K}(t-\tau)\sum_{j=1}^{3} B_j\frac{\partial}{\partial x_j}U(x,\tau)d\tau. \tag{41}$$

Здесь E_4 — единичная матрица порядка 4, $B_j(x_1)=A_0^{-1}(x_1)A_j, \quad j=\overline{1,3}$,

$$B_1(x_1)=\begin{pmatrix} 0 & \rho(x_1)c^2(x_1) & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho(x_1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad B_2(x_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho(x_1)c^2(x_1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho(x_1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$B_3(x_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho(x_1)c^2(x_1)\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho(x_1)} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть функция $U(x,t)$ является решением системы (41) при некотором $\overline{K}(t)$. Запишем уравнение (41) в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно выражения $\sum\limits_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$\sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U = -E_4 \frac{\partial}{\partial t} U + \int_0^t \overline{K}(t-\tau) \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U(x,\tau)d\tau. \tag{42}$$

Из общей теории интегральных уравнений [29, с. 39–44] следует, что решение уравнения (42) выражается равенством

$$\sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U = -E_4 \frac{\partial}{\partial t} U - \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} U(x,\tau)d\tau, \tag{43}$$

где ядра $K(t)$ и $\overline{K}(t)$ связаны соотношением $K(t)=diag(k_1(t),k_2(t),k_3(t),k_4(t))$:

$$K(t)=\overline{K}(t)+\int_0^t \overline{K}(t-\tau)K(\tau)d\tau.$$

Очевидно, что $\overline{K}(0)=K(0)$.

Продифференцировав (43) по t и вводя обозначение $\overline{U}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}U(x,t)$, получаем

$$E_4 \frac{\partial}{\partial t}\overline{U} + \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{U} = -K(0)\overline{U} + \int_0^t K'(t-\tau)\overline{U}(x,\tau)d\tau, \tag{44}$$

где $K'(t)=diag\left(k_1'(t),k_2'(t),k_3'(t),k_4'(t)\right), j=\overline{1,4}$.

Систему (44) приведём к каноническому виду относительно переменных (t,x_1). Как известно из линейной алгебры [30, с. 149–153], в рассматриваемом случае существует такая невырожденная матрица Z, что $Z^{-1}B_1Z=D_1$, где D_1 — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы B_1. Таким условиям может удовлетворять, например, матрица

$$Z(x_1) = \begin{pmatrix} \rho(x_1)c(x_1) & \rho(x_1)c(x_1) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно вычислить обратную матрицу к Z, она определяется формулой

$$Z^{-1}(x_1) = \frac{1}{2\rho(x_1)c(x_1)} \begin{pmatrix} 1 & \rho(x_1)c(x_1) & 0 & 0 \\ 1 & -\rho(x_1)c(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho(x_1)c(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\rho(x_1)c(x_1) \end{pmatrix}.$$

Введем в уравнении (44) новую функцию с помощью равенства

$$\overline{U} = ZV \tag{45}$$

и умножим это уравнение слева на матрицу Z^{-1}. Тогда для функции V после очевидных преобразований получим уравнение

$$\left(E_4 \frac{\partial}{\partial t} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{3} D_j \frac{\partial}{\partial x_j} + D_4 \right) V = \int\limits_0^t R(t-\tau) V(x,\tau) d\tau,$$

где D_j, $j = \overline{1,4}$ и $R(t)$ определяются как (2), (3).

Замечание 1. Как следует из (4), (45), вектор-функция $V(y, x_2, x_3, t)$ выражается через $\overline{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ по формуле

$$V(x_1, x_2, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho c}\overline{u}_1 + \frac{1}{2}\overline{u}_2 \\ \frac{1}{2\rho c}\overline{u}_1 - \frac{1}{2}\overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \end{pmatrix} (z^{-1}(y), x_2, x_3, t).$$

Тогда нетрудно заметить, что начальные условия (6) для функции $\overline{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ имеют вид

$$V(x_1, x_2, z, t)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho c}\overline{u}_1 + \frac{1}{2}\overline{u}_2 \\ \frac{1}{2\rho c}\overline{u}_1 - \frac{1}{2}\overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^* (y, x_2, x_3),$$

а граничные и дополнительные условия (7), (8) в терминах компонент вектор–функции $\overline{U}$ могут быть переписаны в виде

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)^* (z^{-1}(y), x_2, x_3, t)|_{y=0} = Z(0) \times (\mathrm{g}_1, h_2, h_3, h_4)^* (x_2, x_3, t);$$
$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2)(z^{-1}(y), x_2, x_3, t)|_{y=L} = \big(\rho(z^{-1}(L))c(z^{-1}(L))(h_1 + \mathrm{g}_2), h_1 - \mathrm{g}_2\big)(x_2, x_3, t).$$

Список литературы

[1] В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегро–дифференциальных уравнений*, Наука, Гл. ред. физ.–мат. литер, М., 1982.

[2] Mura. Toshio, *Micromechanics of defects in solids, Second, Revised Edition*, IL, USA, Northwestern University, Evanston, 1987.

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М, 1959.

[4] A. Lorenzi, "An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation", *Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl.*, **22**:1 (1994), 21–44.

[5] Z. S. Safarov, D. K. Durdiev, "Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics", *Differential Equations*, **54**:1 (2018), 134–142.

[6] J. Janno, L. Von Wolfersdorf, "Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity", *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:4 (1997), 291–314.

[7] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, "Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость", *ТМФ.*, **195**:3 (2018), 491–506.

[8] В. Г. Романов, "Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **15**:1 (2012), 86–98.

[9] Z. D. Totieva, D. K. Durdiev, "The Problem of Finding the One-Dimensional Kernel of the Thermoviscoelasticity Equation", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **103**:1–2 (2018), 118–132.

[10] Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров, "Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области", *Матем. заметки.*, **97**:6 (2015), 855–867.

[11] D. K. Durdiev, Z. D. Totieva, "The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **28**:1 (2020), 43–52.

[12] У. Д. Дурдиев, "Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **22**:4 (2019), 26–32.

[13] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, "Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости", *Владикавк. матем. журн.*, **17**:4 (2015), 18–43.

[14] Д. К. Дурдиев, З. Р. Бозоров, "Задача определения ядра интегродифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью", *Дальневост. матем. журн.*, **13**:2 (2013), 209–221.

[15] В. Г. Романов, "Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости", *Докл. АН.*, **446**:1 (2012), 18–20.

[16] D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov, "A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**:15 (2020), 8776–8796.

[17] V. G. Romanov, "Inverse problems for equation with a memory", *Eurasian Jour. of Math. and Computer Applications*, **2**:4 (2014), 51–80.

[18] Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, "Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **23**:2 (2020), 63–80.

[19] M. K. Teshaev, I. I. Safarov, M. Mirsaidov, "Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes", *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, **13**:2 (2019), 104–115.

[20] M. K. Teshaev, "Realization of servo-constraints by electromechanical servosystems", *Russian Mathematics*, **54** (2010), 38–44.

[21] U. D. Durdiev, "Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory", *Sib. Electron. Mat. Izv.*, **17** (2020), 179–189.

[22] Z. R. Bozorov, "Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect", *Eurasian journal of mathematical and computer applications*, **8**:2 (2020), 4–16.

[23] А. Л. Карчевский, А. Г. Фатьянов, "Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды", *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **4**:3 (2001), 259–268.

[24] Д. К. Дурдиев, Х. Х. Турдиев, "Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью", *Дифференциальные уравнения*, **56**:12 (2020), 1666–1675.

[25] D. K. Durdiev, Kh. Kh. Turdiev, "The problem of finding the kernels in the system of integro-differential Maxwell's equations", *Sib. Zh. Ind. Math.*, **24**:2 (2021), 38–61.

[26] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики (2-е изд.)*, Наука, М., 1979.

[27] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

[28] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1989.

[29] А. А. Килбас, *Интегральные уравнения: курс лекций*, Минск, 2005.

[30] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1988.

Поступила в редакцию
7 марта 2022 г.

Durdiev D. K.[1], *Turdiev Kh. Kh.*[2] The problem of finding the kernels in the system of integro-differential acoustics equations. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 190–210.

[1] Bukhara branch of the Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
[2] Bukhara State University, Uzbekistan

ABSTRACT

For reduced to the canonical system of integro-differential equations of acoustics, a direct problem is posed, which consists in determining the velocity of the perturbed medium and the pressure and the inverse problem of finding the diagonal memory matrix. The problems are reduced to a closed system of integral equations of the second kind of the Volterra type with respect to the solution of the direct problem and unknowns of the inverse problem. The method of contraction mappings in the space of continuous functions with an exponential weighted norm is applied to this system. Existence and uniqueness theorems for solutions to problems in the global sense are proved.

Key words: *hyperbolic system, system of acoustics equations, integral equation, contraction mapping principle.*