ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАРИ АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМЛИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

МАТЕМАТИКАНИНГ ЗАМОНАВИЙ МАСАЛАЛАРИ: МУАММОЛАР ВА ЕЧИМЛАР

мавзусидаги республика миқёсидаги илмий онлайн конференция материаллари тўплами

21-23 октябр 2020 йил

ТЕРМИЗ 2020

Даражали йиғиндилар ва Бернулли сонлари

А.Қосимов (БухДУ) Бухоро ш., fern-1986@mail.ru
Ф.Касимов (БухДУ) Бухоро ш., fern1986@gmail.com

n ихтиёрий чекли натурал сон бўлиб, *m*=0,1,2,…..,*n* бўлсин. Мақола таҳлилий характерда бўлиб, унда дастлабки *n* та натурал сонларнинг манфий бўлмаган бутун *m* – даражалари йиғиндиси $S_m(n)$ ни ҳамда 1 дан *n* гача бўлган натурал сонлрдан мумкин бўлган барча *k* тадан кўпайтмаларидан тузилган $T_k(n)$ йиғиндини ҳисоблаш формулаларининг исботлари келтирилади. $S_m(n)$ йиғинди билан Бернулли сонлари орасида боғланиш кўрсатилади.

1. $S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + ... + n^m$ (1)

йиғиндини ҳисоблаш формулаларии келтириб чиқариш усулларини қараймиз.

1 – йўл. Равшанки, $S_0(n) = 1+1+1+....+1 = n$ (2)

$$S_1(n) = 1+2+3+....+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad (3)$$

$S_2(n)$ ни ҳисоблаш учун $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ тенгликда *a* нинг ўрнига навбат билан 1, 2, 3,..., *n* сонларни қўйиб, ушбу сонли тенгликларни ҳосил қиламиз.

$2^3 = 1^3 + 3\cdot1^2 + 3\cdot1 + 1$

$3^3 = 2^3 + 3\cdot2^2 + 3\cdot2 + 1$

. . . .

$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$

Бу тенгликларни ҳадма – ҳад қўшиб, ҳосил бўладиган тенгликда тенг қўшилувчиларни ихчамлаймиз:

$$2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + 3\cdot(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3\cdot(1+2+...+n) + n$$

$$(n+1)^3 = 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) + (n+1)$$

$$3\cdot S_2(n) = (n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} \quad (4)$$

$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ тенгликдан фойдаланиб, юқоридагига ўхшаб ҳисоблашларни такрорлаб, ушбу ҳосил қилинади:

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

Энди $S_1(n), S_2(n), ..., S_{m-1}(n)$ йиғиндилар учун формулалар маълум бўлганда, $S_m(n)$ ни топиш мумкин бўлган формулани келтириб чиқарамиз. Бунинг учун $(a+1)^{m+1} = a^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot a^m + C^2_{m+2}\cdot a^{m-1} + ... + C^m_{m+1}\cdot a + 1$ формулада a нинг ўрнига навбат билан 1, 2, 3,..., n сонларни қўйиб, ҳосил бўладиган n та

$$2^{m+1} = 1^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot 1^m + C^2_{m+2}\cdot 1^{m-1} + ... + C^m_{m+1}\cdot 1 + 1$$

$$3^{m+1} = 2^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot 2^m + C^2_{m+2}\cdot 2^{m-1} + ... + C^m_{m+1}\cdot 2 + 1$$

....

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot n^m + C^2_{m+2}\cdot n^{m-1} + ... + C^m_{m+1}\cdot n + 1$$

тенгликларни ҳадма – ҳад қўшиб, соддалаштириб

$(n+1)^{m+1} = (n+1) + C^1_{m+1}\cdot S_m(n) + C^2_{m+1}\cdot S_{m-1}(n) + ... + C^m_{m+1}\cdot S_1(n)$ тенгликни ҳосил қиламиз, бу тенгликдан $S_m(n)$ учун рекуррент формула топилади:

$$S_m(n) = \frac{(n+1)((n+1)^m - 1) - C^2_{m+1}\cdot S_{m-1}(n) - ..... - C^m_{m+1}\cdot S_1(n)}{C^1_{m+1}}. \qquad (5)$$

2 – йўл. Ньютон биноми

$(a+b)^m = a^m + C^1_m\cdot a^{m-1}\cdot b + C^2_m\cdot a^{m-2}\cdot b^2 + ... + C^{m-1}_m\cdot a\cdot b^{m-1} + b^m$ формуласида $b = -1$ ни қўйиб, m ни $m+1$ билан алмаштириб

$(a-1)^{m+1} - a^{m+1} = -C^1_{m+1}\cdot a^m + C^2_{m+1}\cdot a^{m-1} - .... + (-1)^m C^m_{m+1}\cdot a + (-1)^{m+1}$ тенглик ҳосил қилинади. Бу тенгликда a нинг ўрнига навбат билан 1, 2, 3,..., n сонларни қўйиб, ҳосил бўладиган n та тенгликларни қўшиб, сўнгра соддалаштириб,

$$S_m(n) = \frac{n^{m+1} + C^2_{m+1}\cdot S_{m-1}(n) + ...(-1)^m C^1_{m+1}\cdot S_1(n) + (-1)^{m+1}\cdot S_0(n)}{C^1_{m+1}} \qquad (6)$$

рекуррент формула ҳосил қилинади.

3 – йўл. $t^n - 1 = ((t-1)+1)^n - 1$ тенгликка Ньютон биноми формуласини қўллаймиз:

$$t^n - 1 = (t-1)^n + C^1_n(t-1)^{n-1} + C^2_n(t-1)^{n-2} + ... + C^{n-2}_n(t-1)^2 + C^{n-1}_n(t-1)$$

Бу тенгликда $t \neq 1$ деб олиб, унинг ҳар иккала томонини $t-1$ га бўламиз:

$$\frac{t^n - 1}{t-1} = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-2} + t^{n-1} = C^1_n + C^2_n(t-1) + ... + C^{n-1}_n(t-1)^{n-2} + (t-1)^{n-1}$$

Энди $t^m = a_m (m = 0,1,..., n-1)$ алмаштириш бажарамиз:

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = C^1_n + (a_1 - a_0)\cdot C^2_n + (a_2 - 2a_1 + a_0)\cdot C^3_n + ...$$

$$.... + (a_{n-1} - C'^1_n\cdot a_{n-2} + C'^2_n\cdot a_{n-3} - ..... + (-1)^{n-2})\cdot C^n_n$$

Бу тенгликда $a_l = (l+1)^m, \ (l = 0,1,......, n-1)$ деб олиб, ушбу формула ҳосл қилинади:

$$S_m(n) = C^1_n + (2^m - 1)\cdot C^2_n + (3^m - 2\cdot 2^m + 1)\cdot C^3_n + ... +$$
$$+[(m+1)^m - C^1_m\cdot m^m + C^2_m\cdot (m-1)^m - .... + (-1)^m]\cdot C^{m+1}_n \qquad (7)$$

4 – йўл. $S_m(n) = 1^m + 2^m + ... + n^m$ йиғинди $S_m(n) = x_1^m + x_2^m + ...x_n^m$ (8)

симметрик кўпҳаднинг $x_k = k(k = 1,2,...,n)$ бўлгандаги қийматидан иборат.

Маьлумки, S_m симметрик кўпҳад элементар симметрик $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ кўпҳадлар орқали ифодаланади. Шунингдек $S_1, S_2, ..., S_k$ симметрик кўпҳадлар $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ элементар симметрик кўпҳадлар орқали ифодаланади ва аксинча. Бу эса S_m ни $S_1, S_2, ..., S_{m-1}$ лар оқали ифодалаш формуласини топишга имкон беради. Бунинг учун ушбу

$$S_m = S_{m-1}\cdot\sigma_1 - S_{m-2}\cdot\sigma_2 + ... + (-1)^{m-1}S_1\cdot\sigma_{m-1} + (-1)^m\cdot m\cdot\sigma_m,\quad (m \le n) \tag{9}$$

$$S_m = S_{m-1}\cdot\sigma_1 - S_{m-2}\cdot\sigma_2 + ... + (-1)^n S_{m-n}\cdot\sigma_n,\quad (m > n) \tag{10}$$

Ньютон формулаларидан фойдаланилади.

$S_m(n)$ йиғинди учун (6) формуладан фойдланиб Бернулли сонларини топамиз. у

$$C_{2m+1}^2\cdot B_1 - C_{2m+1}^4\cdot B_2 + C_{2m+1}^6\cdot B_3 - ..... + (-1)^{m-1}\cdot C_{2m+1}^{2m}\cdot B_m = m - \frac{1}{2} \tag{11}$$

тенглик билан аниқланадиган $B_1, B_2, ..., B_m$ сонлар Бернулли сонлари дейилади.

$S_m(n)$ озод ҳади нолга тенг кўпҳад бўлганлтги учун $S_m(n) \vdots n$ ҳам кўпҳад бўлиб, уни $P_m(n)$ билан белгилаб, ушбу кўпҳад ҳосил қилинади:

$$P_m(n) = \frac{1}{m+1}\left[n^m + C_{m+1}^2\cdot\frac{S_{m-1}(n)}{n} - C_{m+1}^3\cdot\frac{S_{m-2}(n)}{n} + ... + (-1)^m\cdot C_{m+1}^m\cdot\frac{S_1(n)}{n} + (-1)^{m+1}\cdot\frac{S_0(n)}{n}\right]$$

$P_m(n)$ кўпҳадда n=0 бўлганда $B_m = P_m(0)$ Бернулли сони ҳосил бўлади.

$$P_m(0) = B_m = \frac{1}{m+1}\left[C_{m+1}^2\cdot B_{m-1} - C_{m+1}^3\cdot B_{m-2} + ... + (-1)^m C_{m+1}^m\cdot B_1 - (-1)^m\cdot B_0\right] \tag{12}$$

(12) формула ёрдамида дастлабки бир неча Бернулли сонларини топамиз. $B_0 = 1$ деб олинади. $B_1 = \frac{1}{2};\ B_2 = \frac{1}{6};\ B_3 = 0;\ B_4 = -\frac{1}{30};\ B_5 = 0;\ B_6 = \frac{1}{42}$

Ҳисоблашлардан кўринадики B_1 дан бошқа барча тоқ номерли Бернулли сонлари 0 га тенг. Шу боис айрим ҳолларда тоқ номерли Бернулли сонлари назарга олинмай ва $(-1)^{m-1}\cdot B_m$ сонлар ўрнига B_m сонлар олиниб, уларни янгидан номерлаб $B_1 = \frac{1}{6};\ B_2 = \frac{1}{30};$ $B_3 = \frac{5}{66};\ B_4 = \frac{691}{2730},.....$ Бернулли сонлари ҳосил қилинади. Бернулли сонлари таьрифи бўйича айнан шу сонлар ҳосил бўлади.

Шу тарздаги Бернулли сонлари натурал сонларнинг m – даражали йиғиндиси формуласида қатнашган бўлади:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} - \frac{n^m}{2} + \frac{m}{2!}\cdot B_1\cdot n^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{4!}\cdot B_2\cdot n^{m-3} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{6!}\cdot B_3\cdot n^{m-3} - ...$$

m нинг жуфт ва тоқлигига қараб ўнг томонда n ёки n^2 ҳадгача ёзилади.

Мисол. m=1 учун $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^{1+1}}{1+1} + \frac{n^1}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

m=2 учун $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{2}{2!}\cdot B_1\cdot n = \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

m=3 учун $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3}{2!}\cdot B_1 \cdot n^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Бернулли сонлари даражали йиғиндилар билан боғлиқ бўлгани ҳолда математиканинг бошқа проблемаларини ечишда ҳам татбиқ қилинади. Жумладан Ферма проблемасининг баьзи хусусий ҳоллар учун ўринли бўлишини исботлашда, Варинг проблемасини ечиш йўлида Бернулли сонларидан фойдаланилади. Шунингдек $E_0 + C_{2m}^2 E_2 + C_{2m}^4 E_4 + C_{2m}^6 E_6 + ... + +C_{2m}^{2m-2} E_{2m-2} + E_{2m} = 0,\ E_0 = 1; E_2 = -1; E_4 = 5;...$ тенглик билан аниқланадиган E_{2m} Эйлер сонлари билан Бернулли сонлари орасида боғланишлар мавжуд.

Энди мақолада назарда тутилган иккинчи масалани қараймиз. 1 дан n гача бўлган натурал сонлардан m тадан олиб тузилиши мумкин бўлган барча кўпайтмалар йиғиндиси $T_m(n)$ учун формулани келтириб чиқариш билан шуғулланамиз. Бунда даражали йиғиндилар учун ҳосил қилинган формулалардан фойдаланамиз.

$$T_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},\ \ T_n(n) = n!$$

$$T_2(n) = \sum_{1\le i\le j\le n} i\cdot j = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + ... + 1\cdot n + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + ... + 2\cdot n + ... + (n-1)\cdot n$$

йиғиндини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқариш учун $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$ айнятда барча x ларни уларнинг индекслари билан алмаштиришдан ҳосил бўладиган $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i<j} ij$ тенгликда охирги йиғиндини топамиз:

$$T_2(n) = \sum_{1\le i\le j\le n} i\cdot j = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{2}S_1^2(n) - \frac{1}{2}S_2^2(n) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(3n+2)}{24}$$

$T_3(n) = \sum_{1\le i\le j\le n} ijk$ йиғиндини ҳисоблаш формуласини топиш учун $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 3\sum_{\substack{i\ne j\\ i,j=1}} x_i x_j^2 + 6\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k$ ва $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i\ne j} x_i x_j^2$ айнятлардан фойдаланиб, ушбуни топамиз:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 3\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^3\right] + 6\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k.$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k. = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) - 3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^3\right)\right]$$

Барча x ларни уларнинг индекслари билан алмаштирамиз, сўнгра даражали йиғиндилардан фойдаланамиз:

$$T_3(n)=\sum_{1\le i\le j\le n} ijk=\frac{1}{6}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^3+2\sum_{i=1}^{n} i^3-3\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\right]=$$

$$\frac{1}{6}\left[S_1^3(n)+2S_3(n)-3S_1(n)S_2(n)\right]=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)^2}{48}$$

Умумий ҳолда $T_m(n)$ ни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқаришда $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$ учун полиномиал формуладан фойдаланиш анча мураккаб ифодалар билан ишлашга олиб келади. Шу сабабли $T_m(n)$ ни анча қулай ушбу йўл билан аниқланади. $T_m(n)$ йиғинди қўшилувчиларини икки гуруҳга ажратилади. Биринчи гуруҳга n қатнашмайдиган қўшилувчилар олинади. Уларнинг йиғиндиси $T_m(n-1)$ бўлади. Иккинчи гуруҳга n қатнашадиган қўшилувчилар олинади. Агар бундай қўшилувчилар йиғиндисидан умумий n кўпайтувчи қавсдан ташқарига чиқарилса, натижада $n\cdot T_m(n-1)$ бўлади. Шундай қилиб, $T_m(n)=T_m(n-1)+n\cdot T_{m-1}(n-1)$. (13)

Бу рекуррент формула ёрдамида $n\ge m$ учун $T_{m-1}(n)$ маълум бўлганда $T_m(n)$ топилади.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Бухштаб А.А., Теория чисел. Москва, “Просвешенее”, 1966 г
2. Соминский И.С., Элементарная алгебра. Москва, “Наука”, 1967 г
3. Ягудаев Б.Я., Сонли функциялар. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1978 г
4. Ягудаев Б.Я., Ажойиб сонлар оламида. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1975 г