O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

O‘ZBEKISTON-FINLANDIYA PEDAGOGIKA INSTITUTI

MATEMATIKA, FIZIKA VA INFORMATIKA FANLARINI O‘QITISHNING DOLZARB MUAMMOLARI

Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami

18-19-oktabr 2024-yil

SAMARQAND – 2024

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Ma’muriy islohotlar doirasida oliy a’lim, fan va innovatsiyalar sohasida davlat boshqaruvini samarali tashkil qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 2023-yil 4-iyuldagi PQ-200 qarori 9-bandida belgilangan topshiriq ijrosini o‘z vaqtida va samaralari bajarilishini ta’minlash maqsadida O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 18-yanvardagi 16-sonli buyrug’i asosida tashkil etilgan **“Matematika, fizika va informatika fanlarini o‘qitishning dolzarb muammolari”** mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjuman materiallari (18-19-oktabr, 2024-yil)-Samarqand: O‘z-FinPI, 2024.

Taqrizchilar:

E.N.Sattorov- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Matematika” kafedrasi professori

Q.T.Xoliqov- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Fizika” kafedrasi dotsenti

S.H.Hasanova- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Informatika” kafedrasi dotsenti

Muharrirlar:

N.N.Raximov- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Matematika” kafedrasi mudiri

Q.A.Badalov- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Fizika” kafedrasi mudiri

O‘.M.Saidov- O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Informatika” kafedrasi mudiri

Dizayner:

Z.U.Kulmirzayeva - O‘zbekiston- Finlandiya pedagogika instituti “Informatika” kafedrasi assistenti

To‘plamda joy olgan tezislarda keltirilgan ma’lumotlarning to‘g‘riligiga mualliflar javobgardirlar

© O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti Ilmiy-texnik kengash yig‘ìlishining 2024-yil 14-oktabrdagi 3-sonli qaroriga asosan nashrga tavsiya etilgan.

УДК 517.946

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Жураев Фуркат Мухитдинович
БухГУ старший преподователь кафедры Дифференциальные уравнения
fjm1980@mail.ru

Аннотация. Важнейшие задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для вырождающихся нагруженных уравнений в частных производных. Известно, что краевые задачи для вырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка ранее не изучались. Исходя из этого, данная работа посвящена постановке и исследованию задачи с условиями Геллерстедта на параллельность характеристик для вырождающихся нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.

Kalit so'zlar: Gellerstedt shartlari bilan masala, buzilishga ega bo'lgan parabolik-giperbolik tipdagi yuklangan tenglama, umumiy yechimning tasviri, energiya integral usuli, ekstremum printsipi, integral tenglama.

Ключевые слова. Задача с условиями Геллерстедта, вырождающегося нагруженного уравнение параболо-гиперболического типа, описание общего решения, метод интеграла энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение.

Keywords. Problem with Gellerstedt conditions, degenerate loaded equation of parabolic-hyperbolic type, description of the general solution, energy integral method, extremum principle, integral equation.

Краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы В.М.Казиева [1], Б.Исломова и Ф.Джураева [2], Ф.Жураева [3].

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^p u_y-\mu_0 u(x,0), & x>0,\ y>0,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u(x,0), & x>0,\ y<0,\end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ p,\ \mu_0,\ \mu_j\ (j=1,2)-$ любые действительные числа, причем

$$m<0,\ p>0,\ \mu_0>0,\ \mu_j<0. \tag{2}$$

Пусть Ω_0- область, при $x>0,\ y>0$ ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=h$ соответственно; Ω_1- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AE оси x и двумя характеристиками

$$AC_1:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\ EC_1:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$$

уравнения (1), выходящими из точки $A(0,0)$ и $E(x_0,0)$ и пересекающи-мися в точке

$C_1\left[\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком EB оси x и двумя характеристиками

$$EC_2:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0,\ BC_2:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$$

уравнения (1), выходящими из точек $E(x_0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C_2\left[\frac{1+x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$ при $x>0,\ y<0$, причем $x_0\in(0,1)$.

Введем следующие обозначения:

$$J_{11}=\left\{(x,y):0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},\ J_{12}=\left\{(x,y):\frac{x_0}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},$$

$$J_{21}=\left\{(x,y):x_0<x<\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},\ J_{22}=\left\{(x,y):\frac{x_0+1}{2}<x<1,\ y=0\right\},$$

$$J_0=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\},\ J_1=\{(x,y):0<x<x_0,\ y=0\},$$

$$J_2=\{(x,y):x_0<x<1,\ y=0\},\ \Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup J_0,\ 2\beta=\frac{m}{m-2},\ \text{причем}$$

$$0<\beta<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Задача Γ. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to x_0$, а при $x\to 0$ и $x\to 1$ ограничена;

2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\ (j=0,1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ u\big|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u\big|_{AC_1}=\psi_1(x),\ (x,0)\in\overline{J}_{11}, \tag{5$_1$}$$

$$u\big|_{EC_2}=\psi_2(x),\ (x,0)\in\overline{J}_{21}, \tag{5$_2$}$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x)-$ заданные функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$,

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \tag{6}$$

$$\psi_1(x)\in C^1(\overline{J}_{11})\cap C^3(J_{11}), \tag{7}$$

$$\psi_2(x)\in C^1(\overline{J}_{21})\cap C^3(J_{21}). \tag{8}$$

Если выполнены условия 1) - 2) задачи Γ, то любое регулярное решение уравнения (1) при $y\neq 0$ может быть представимо в виде [4], [5]:

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)+\omega(x) \tag{9}$$

где

$$\upsilon(x,y)=\begin{cases}\upsilon_0(x,y) & в\ \ \Omega_0,\\ \upsilon_1(x,y) & в\ \ \Omega_1,\\ \upsilon_2(x,y) & в\ \ \Omega_2\end{cases} \quad (10_j)\quad \omega(x)=\begin{cases}\omega_0(x), & в\quad 0\le x\le 1,\\ \omega_1(x), & в\quad 0\le x\le x_0,\\ \omega_2(x), & в\quad x_0\le x\le 1,\end{cases} \qquad (10_j)$$

здесь произвольные функции $\omega_0(x)$ и $\omega_j(x)(j=1,2)$ можно починить условиям

$$\omega_0(0)=\omega_0'(0)=0, \qquad (11_0)$$

$$\omega_j(x_0)=\omega_j'(x_0)=0\ (j=1,2). \qquad (12_j)$$

В силу (1), (4), (5_j), (9), (14_0), (14_j) $(j=1,2)$ задача Γ сведется к задача Γ^* для уравнения

$$0=L\upsilon\equiv\begin{cases}L\upsilon_0 & в\ \ \Omega_0\\ L\upsilon_j & в\ \ \Omega_j\end{cases} \qquad (13)$$

с краевыми условиями

$$\upsilon(x,y)\Big|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ \upsilon(x,y)\Big|_{BB_0}=\varphi_2(y)-\omega_0(1),\ 0\le y\le h, \qquad (14_0)$$

$$\upsilon(x,y)\Big|_{AC_1}=\psi_1(x)-\omega_1(x),\ x\in\overline{J}_{11}, \qquad (15_1)$$

$$\upsilon(x,y)\Big|_{EC_2}=\psi_2(x)-\omega_2(x),\ x\in\overline{J}_{21}, \qquad (16_2)$$

Лемма 1. Если выполнены условия (2), (3), $p+2\beta>1$ и $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h]$,

$\psi_1(x)\equiv 0,\ \forall x\in\left[0,\dfrac{x_0}{2}\right],\ \psi_2(x)\equiv 0,\ \forall x\in\left[x_0,\dfrac{1+x_0}{2}\right]$, то

$$\tau_j(x)\equiv 0,\ (j=1,2),\ \forall x\,\overline{J}_j. \qquad (17)$$

Докажем эту лемму с помощью метода интегралов энергии.

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1, то задача Γ^* в области Ω не имеет отличного от нуля решения.

Докажем эту теорема с помощью принципу максимума для параболических уравнений [6] и из решения задачи Коши-Гурса с нулевыми данными [7].

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то задача Γ в области Ω не может иметь более одного решения.

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (3), (6), (7) и (8), то в области Ω решение задачи Γ^* существует.

Докажем эту теорема с помощью методом интегральных уравнений.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то в области Ω решение задачи Γ существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //«Дифференциальные уравнения». **14**(1). 1978. С.181-184.
2. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // "Узбекский математический журнал". 2011. № 2. С. 75-85.

3. Жураев Ф. Аналог задачи Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // "Узбекский математический журнал". 2011. № 4. С. 66-83.
4. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С. 3-6.
5. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанного - составного типа. Т. Фан. 1974. 156 с.
6. Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумялиниями и различными порядками вырождения. // Дис. канд. физ.мат. наук. Ташкент: ИМ АН РУз. 1995. 120 с.
7. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985. 301 с.

SHTURM TEOREMASI VA UNING TATBIQLARI

M.K.Abdusobirova *O'zbekiston-Finnlandiya pedagogika instituti matematika-informatika kafedrasi asissenti*
abdusobirovam@mail.ru
A. Boymatov *O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti*

Maqolada asosan ildizlarning sonini hamda ular joylashgan oraliqlarni aniqlashning Shhturm usuli haqida so'z ketadi . undan tashqari maqolada Shturm teoremasiga oid ajoyib misollar ko'rib o'tilgan . Ushbu mavzuda berilgan ko'phadning ildizlarini topmasdan turib,ular qaysi oraliqqa tegishli bo'lishini topish usullari keltiramiz.

Endi biz haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini topuvchi usullardan biri bo'lgan Shturm usulini keltiramiz. Bu usul yordamida ko'phadning barcha ildizlari soni, yoki musbat va manfiy ildizlari soni, yoki biror oraliqdagi ildizlar sonini aniqlash mumkin. Aytaylik, $f(x)$ ko'phad karrali ildizlarga ega bo'lmasin. Aks holda, bu ko'phadni o'zining hosilasi bilan eng katta umumiy bo'luvchisiga bo'lib yuborish natijasida karrali ildizlarga ega bo'lmagan ko'phad hosil qilish mumkin.

1-ta'rif. Haqiqiy koeffitsientli noldan farqli chekli

$$f(x) = f_0(x) f_1(x) f_2(x), \ldots f_s(x) \tag{1}$$

ko'phadlar sistemasi uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, u holda bu ko'phadlar $f(x)$ ko'phad uchun Shturm sistemasi deyiladi:

1) ko'phadlar sistemasining qo'shni ko'phadlari umumiy ildizlarga ega emas;
2) Oxirgi $f_s(x)$ ko'phad haqiqiy ildizga ega emas;
3) Agar α soni biror $f_k(x)$, $1 \le k \le s-1$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa, u holda $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$, ko'phadlar turli ishorali bo'ladi;
4) Agar α soni $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa, u holda $f(x)\times f_1(x)$ ko'paytma x o'sib α nuqtadan o'tganda ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi

1- teorema. Karrali ildizlarga ega bo'lmagan haqiqiy koeffitsiyentli ixtiyoriy $f(x)$ ko'phad Shturm sistemasiga ega.

Endi $f(x)$ ko'phadning Shturm sistemasi uning haqiqiy ildizlari dastlab berilgan sonlar ketma-ketligi uchun ishora almashishlar soni tushunchasini kiritib olamiz. Ya'ni noldan farqli bo'lgan chekli tartiblangan sonlar sistemasida necha marotaba turli xil ishorali sonlar yonma-yon kelishini sanab, bu sonni ishora almashishlar soni deb olamiz.

Masalan: 1, 3, -2 , 4 , -1 , -8 , -3 , 4, 1

Tartib bilan bu sonlarning ishoralarini yozib olamiz:

+ - + + - - - + +