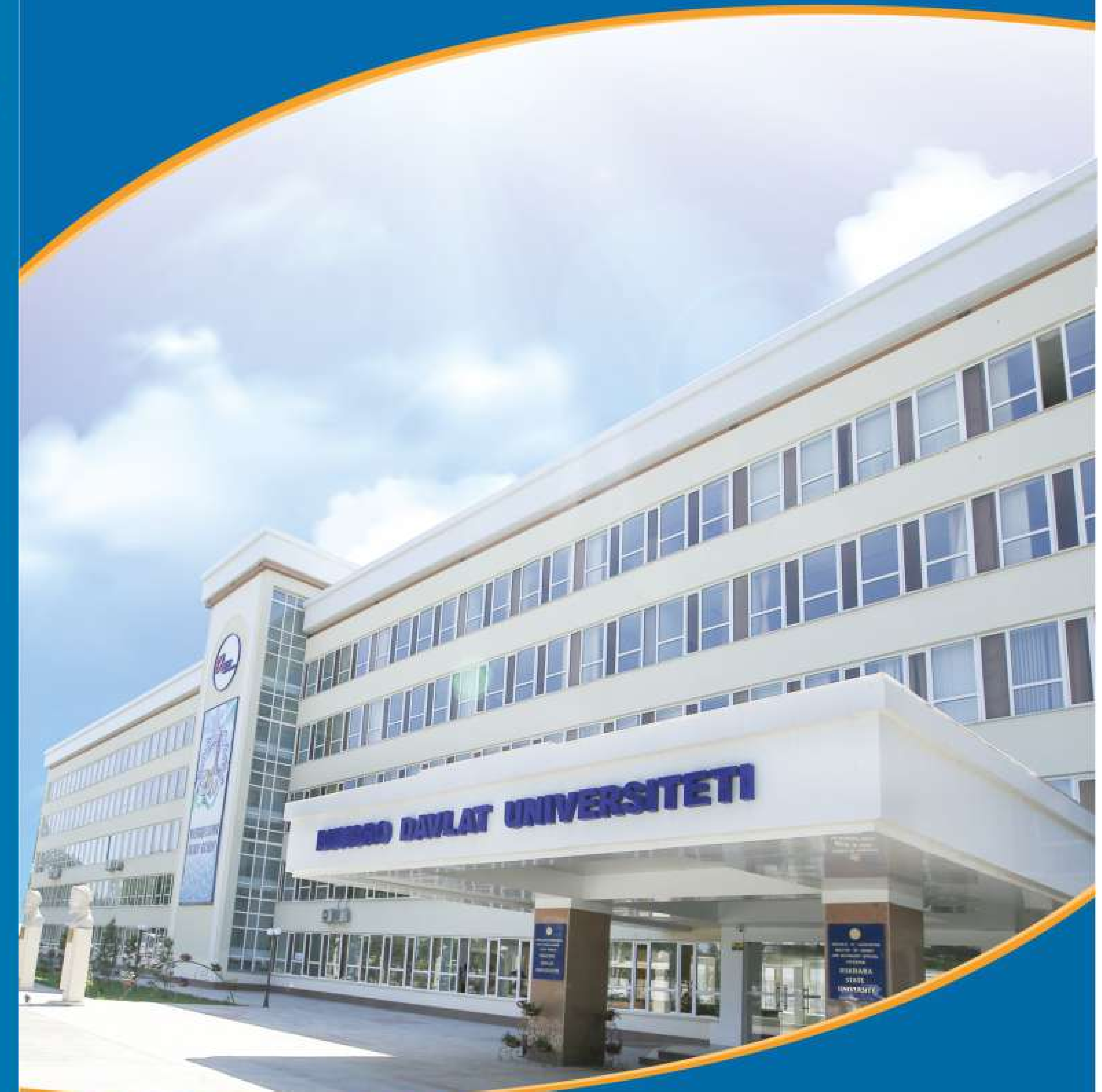
E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004
ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
9/2024

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



9/2024

https://buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2024, № 9, sentabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha, **tarix** fanlari bo‘yicha 2023 yil 29 avgustdan boshlab O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

$$\sigma_{disc}\left(h_{123}^{(n)}(\lambda,\pi)\right)=\cup_{m=0}^{1}\sigma_{disc}\left[4I+h_0(\lambda)-\mathrm{v}_{123(m)}^{(n)}\right] \quad (3.5)$$

munosabat kelib chiqadi.

$h_{123(0)}^{(n)}(\lambda)$ va $h_{123(1)}^{(n)}(\lambda)$ operatorlarning $f\in L_2^e(\mathbb{T})$ funksiyaga ta'siri quyidagicha:

$$\left(h_{123(0)}^{(n)}(\lambda)f\right)(p)=\varepsilon_\lambda(p)f(p)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)\cos p\cos q]f(q)dq, \quad (3.6)$$

va

$$(h_{123(1)}^{(n)}(\lambda)f)(p)=\varepsilon_\lambda(p)f(p)-\frac{\bar{v}(n+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(q)dq.$$

Bu yerda $\varepsilon_\lambda(p)=6-2\cos\frac{\lambda}{2}\cos p$.

4-lemma . *Istalgan $\lambda\in(-\pi,\pi]$ uchun $h_{123}^{(n)}(\lambda,\pi)$ operator muhim spektrdan chapda kamida ikkita ko'pi bilan uchta xos qiymatga ega. Bu xos qiymatlardan biri quyidagicha:*

$$z_{123(n+1)}^{(n,1)}(\lambda)=6-\sqrt{\bar{v}^2(n+1)+4\cos^2\frac{\lambda}{2}}. \quad (3.7)$$

Isbot. Ma'lumki, $h_{123}^{(n)}(\lambda,\pi)$ operatorning spektrini o'rganish (3.7) ga ko'ra $h_{123(1)}^{(n)}(\lambda)$ va $h_{123(0)}^{(n)}(\lambda)$ operatorlarning xos qiymat va xos funksiyalarini o'rganishga keltirildi.

Buning uchun $h_{123(1)}^{(n)}(\lambda)f=zf$ tenglama qanday $z\in\mathbb{C}\backslash[m(\lambda),M(\lambda)]$, larda noldan farqli yechimlarga ega bo'lishini topishimiz kerak. Shu sababli bu tenglamaga teng kuchli bo'lgan quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$(6-z-2\cos\frac{\lambda}{2}\cos p)f(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\bar{v}(n+1)f(q)dq.$$

Bu yerda quyidagicha belgilash olamiz:

$$C=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(q)dq, \quad (3.8)$$

va $f(p)$ xos funksiyaning umumiy ko'rinishi uchun

$$f(p)=\frac{\bar{v}(n+1)}{6-2\cos\frac{\lambda}{2}\cos p-z}\cdot C \quad (3.9)$$

ifodani hosil qilamiz. Endi (3.9) ni (0.3.8) ga qo'yib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\Delta(\lambda,z)=1-\frac{\bar{v}(n+1)}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{dq_1}{6-z-2\cos\frac{\lambda}{2}\cos q_1}=0. \quad (3.10)$$

Bu yerda $\Delta(\lambda,z)$, $h_{123(1)}^{(n)}(\lambda,\pi)$ operatorga mos Fredholm determinanti. Ma'lumki, $\Delta(\lambda,z)$ ning noli bo'lgan $z\in\mathbb{C}\backslash[m(\lambda),M(\lambda)]$, soni $h_{123(1)}^{(n)}(\lambda)$ operator uchun xos qiymat bo'ladi va aksincha.

(3.10) dagi integralni hisoblab,

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{dq}{6-z-2\cos\frac{\lambda}{2}\cos q}=\frac{1}{\sqrt{(6-z)^2-4\cos^2\frac{\lambda}{2}}},$$

keyin (3.10) tenglamani noma'lum z ga nisbatan yechib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$z=z_{123}^{(n)}(\lambda,\pi)=6-\sqrt{\bar{v}^2(n+1)+4\cos^2\frac{\lambda}{2}}$$

Lemma isbot bo'ldi.

1-teoremaning isboti. Demak 3.4-lemmaga ko'ra $h_{123}^{(n)}(\lambda,\pi)$ operatorning har bir $n\in\mathbb{Z}_+$ da kamida bitta xos qiymati mavjud. Agar $\mathbb{Z}_+$ to'plamning cheksiz ekanligini hamda

$$h_{123}(k_1,k_2,\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus h_{123n}(k_1,k_2,\pi)$$

yoyilmadan, $h_{123}(\lambda,\pi,\pi)$ operator ixtiyoriy $\lambda \in (-\pi,\pi]$ uchun muhim spektrdan chapda cheksiz ko‘p xos qiymatlari mavjudligi kelib chiqadi.

1- teorema isbot bo‘ldi.

REFERENCES:

1. Mamatov Sh.S., Minlos R.A., Bound states of a two-particle cluster operator. // Theoretical and Mathematical Physics. T. 79, 2, 163-179, 1989.

2. Minlos R.A., Mogilner A.I., Some problems conserning spectra of lattice models. In Schrödinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). // World. Scientific. Singapoor, 1989.

3. Abdullaev J.I., Kuliev K.D., Bound states of a two-boson system on a two-dimensional latiice. // Theoretical and Mathematical Physics. T 186, 2, 272-292. 2016

4. Abdullaev J.I., Ikromov I.A., The finitness number of eigenvalues of the two-particle Schr¨odinger operator on a lattice. // Theoretical and Mathematical Physics. T. 152, 2, 47-57. 2007.

5. Lakaev S., Kholmatov Sh., Khamidov Sh., Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor iteractions:Exactly solvable case. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54 245201, 2021

6. Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. IV: Operator analysis. M.: Peace, 1982

7. Abdullaev J.I., Ergashova Sh.H., Eigenvalues and invariant subspaces of a system of two bosons with cylindrical potential. // Bulletin of the Institute Mathematics. № 1. 3-13, 2024.

8. Abdullaev J.I., Shotemirov Y.S., Ergashova Sh.H., Invariant subspaces and bound states of a system of two bosons on a lattice. // Scientific Bulletin of SamSU. № 3. 4-15, 2021.

УДК 517. 956.6

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Жураев Фуркат Мухитдинович,
старший преподователь кафедры
“ Дифференциальные уравнения»
Бухарского государственного университета
fjm1980@mail.ru

Аннотация. *Исследуются краевые задачи для невырождающихся нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов. Важнейшие задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для вырождающихся нагруженных уравнений в частных производных. Известно, что краевые задачи для вырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка ранее не изучались. Исходя из этого, данная работа посвящена постановке и исследованию задачи с условиями Геллерстедта на непараллельность характеристик для вырождающихся нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.*

Ключевые слова: *задача с условиями Геллерстедта, вырождающееся нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа, описание общего решения, метод интеграла энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение.*

BUZILISHGA EGA BO‘LGAN YUKLANGAN PARABOLOK - GIPERBOLIK TIPIDAGI TENGLAMA UCHUN PARALLEL BO‘LMAGAN XARAKTERISTIKALAR BO‘YICHA GELLERSTEDT SHARTLARI BILAN MASALA

Annotatsiya. *Buzilishga ega bo‘lmagan yuklangan giperbolik, parabolik, giperbolik-parabolik va elliptik- parabolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o‘rganilgan. Matematik fizika va biologiyaning juda muhim masalalari buzilishga ega bo‘lgan yuklangan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga olib keladi. Ma‘lumki, ikkinchi tartibli aralash tipdagi buzilishga ega bo‘lgan yuklangan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar ilgari o‘rganilmagan. Shunga asoslanib, ushbu ish buzilishga ega bo‘lgan yuklangan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun parallel bo‘lmagan xarakteristikalar bo‘yicha Gellerstedt shartlari bilan masalani qo‘yish va o‘rganishga bag‘ishlangan.*

Kalit so‘zlar: *Gellerstedt shartlari bilan masala, buzilishga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi yuklangan tenglama, umumiy yechimning tasviri, energiya integral usuli, ekstremum prinsipi, integral tenglama.*

PROBLEM WITH THE GELLERSTEDT CONDITION ON NON-PARALLEL CHARACTERISTICS FOR A DEGENERATE LOADED EQUATION OF PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE

Abstract. *Boundary value problems for non-degenerate loaded equations of hyperbolic, parabolic, hyperbolic-parabolic and elliptic-parabolic types are studied. The most important problems in mathematical physics and biology lead to boundary value problems for degenerate loaded partial differential equations. It is known that boundary value problems for degenerate loaded second-order mixed type equations have not been studied previously. Based on this, this work is devoted to the formulation and study of the problem with Gellerstedt conditions on the non-parallelism of characteristics for degenerate loaded equations of parabolic-hyperbolic type.*

Keywords: *Problem with Gellerstedt conditions, degenerate loaded equation of parabolic-hyperbolic type, description of the general solution, energy integral method, extreme principle, integral equation.*

Введение. Краевые задачи для невырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка изучены в работах А.М.Нахушева [1], Н.Н.Ланина [2], В.А.Елеева [3], Б.Исломова и Д.М.Курьязова [4, 5], Б.Исломова и У.И.Болтаевой [6].

Несколько нам известно, краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы В.М.Казиева [7], Б.Исломова и Ф.Джураева [8], Ф.Жураева [9, 10].

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию краевой задачи типа задачи Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.

Постановка задачи. Γ

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^p u_y-\mu_0 u(x,0), & x>0,\ y>0,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u(x,0), & x>0,\ y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ p,\ \mu_0,\ \mu_j\ (j=1,2)-$ любые действительные числа, причём

$$m<0,\ p>0,\ \mu_0>0,\ \mu_j<0. \tag{2}$$

Пусть Ω_0- область, при $x>0,\ y>0$ ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=h$ соответственно; Ω_1- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AE оси x и двумя характеристиками

$$AC_1:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\ EC_1:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$$

уравнения (1), выходящими из точки $A(0,0)$ и $E(x_0,0)$ и пересекающимися в точке $C_1\left[\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком EB оси x и двумя характеристиками

$$EC_2:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0,\ BC_2:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$$

уравнения (1), выходящими из точек $E(x_0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C_2\left[\frac{1+x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$ при $x>0,\ y<0$, причём $x_0\in(0,1)$ (Рисунок 1).

Введём следующие обозначения:

$$J_{11}=\left\{(x,y):0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},\ J_{12}=\left\{(x,y):\frac{x_0}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},$$

$$J_{21}=\left\{(x,y):x_0<x<\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},\ J_{22}=\left\{(x,y):\frac{x_0+1}{2}<x<1,\ y=0\right\},\ J_0=\left\{(x,y):0<x<1,\ y=0\right\},$$

$J_1=\left\{(x,y):0<x<x_0,\ y=0\right\}$, $J_2=\left\{(x,y):x_0<x<1,\ y=0\right\}$, $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup J_0$, $2\beta=\dfrac{m}{m-2}$, причём

$$0<\beta<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

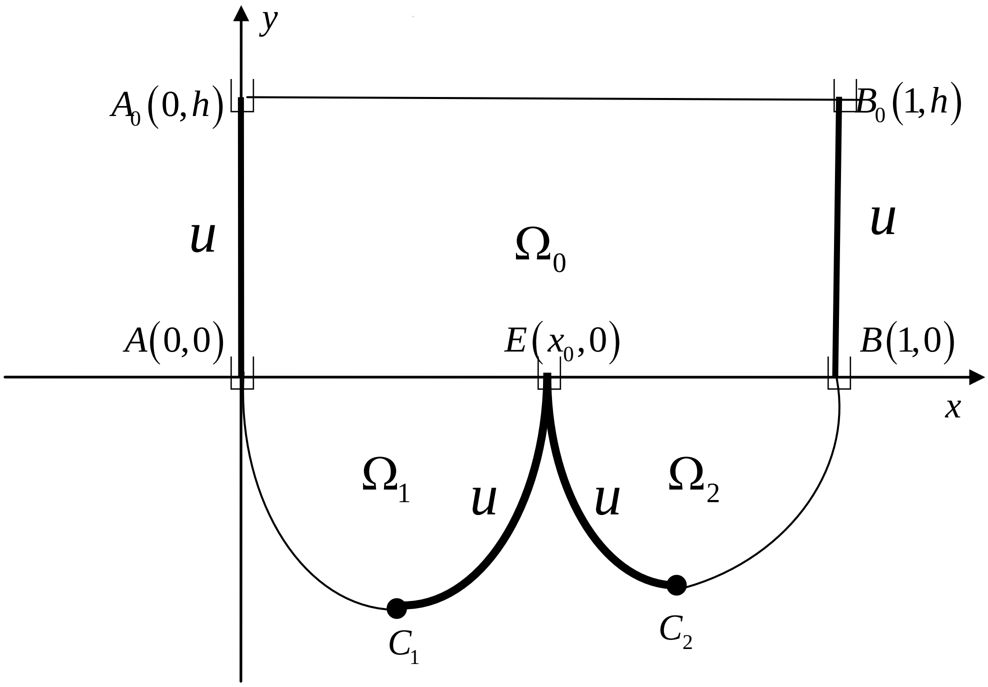


Рисунок 1.

Задача Γ. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\bigcap C^1(\Omega)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to x_0$, а при $x\to 0$ и $x\to 1$ ограничена;

2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\bigcap C^2(\Omega_1\bigcup\Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\ (j=0,1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ u\big|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u\big|_{EC_1}=\psi_1(x),\ (x,0)\in \bar{J}_{12}, \tag{5$_1$}$$

$$u\big|_{EC_2}=\psi_2(x),\ (x,0)\in \bar{J}_{21}, \tag{5$_2$}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$ заданные функции, причем $\psi_1(x_0)=\psi_2(x_0)$,

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,h]\bigcap C^1(0,h), \tag{6}$$

$$\psi_1(x)\in C^1(\bar{J}_{12})\bigcap C^3(J_{12}), \tag{7}$$

$$\psi_2(x)\in C^1(\bar{J}_{21})\bigcap C^3(J_{21}). \tag{8}$$

Исследование задачи Γ **для уравнения.** (1)

Если выполнены условия 1) - 2) задачи Γ, то любое регулярное решение уравнения (1) при $y\ne 0$ может быть представлено в виде [4], [11]:

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)+\omega(x) \tag{9}$$

где

$$\upsilon(x,y)=\begin{cases}\upsilon_0(x,y) & в\ \ \Omega_0,\\ \upsilon_1(x,y) & в\ \ \Omega_1,\\ \upsilon_2(x,y) & в\ \ \Omega_2\end{cases} \tag{10$_j$}$$

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_0(x), & в \quad 0\le x\le 1,\\ \omega_1(x), & в \quad 0\le x\le x_0,\\ \omega_2(x), & в \quad x_0\le x\le 1,\end{cases} \tag{11$_j$}$$

здесь $\upsilon_0(x,y)$ и $\upsilon_j(x,y)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_0\equiv\upsilon_{0xx}-x^p\upsilon_{0y}=0 \quad в \quad \Omega_0, \tag{12$_0$}$$

$$L\upsilon_j\equiv\upsilon_{jxx}-(-y)^m\upsilon_{jyy}=0 \quad в \quad \Omega_j\,(j=1,2), \tag{12$_j$}$$

а $\omega_0(x)$ и $\omega_j(x)(j=1,2)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_0''(x)-\mu_0\omega_0(x)=\mu_0\upsilon_0(x,0),\ (x,0)\in\bar{J}_0 \tag{13$_0$}$$

и

$$\omega_j''(x)+\mu_j\omega_j(x)=-\mu_j\upsilon_j(x,0),\ (x,0)\in\bar{J}_j \tag{13$_j$}$$

соответственно.

Учитывая, что функция $ax+b$ является решением уравнений (12_0) и (12_j), тогда при исследовании задачи Γ без ограничения общности можно предположить, что произвольные функции $\omega_0(x)$ и $\omega_j(x)(j=1,2)$ можно подчинить условиям:

$$\omega_0(0)=\omega_0'(0)=0, \tag{14$_0$}$$

$$\omega_j(x_0)=\omega_j'(x_0)=0\,(j=1,2). \tag{14$_j$}$$

Решение задачи Коши (13_0), (14_0) и (13_j), (14_j) $(j=1,2)$,соответственно, имеет вид:

$$\omega_0(x)=\sqrt{\mu_0}\int_0^x sh\sqrt{\mu_0}(x-t)\tau_0(t)dt,\ x\in\bar{J}_0, \tag{15$_0$}$$

$$\omega_j(x)=(-1)^j\sqrt{-\mu_j}\int_{x_0}^{x} sh\sqrt{-\mu_j}(x-t)\tau_j(x)dt,\ x\in\bar{J}_j, \tag{15$_j$}$$

где

$$\tau_0(x)=\upsilon_0(x,+0),\ (x,0)\in\bar{J}_0 \tag{16}$$

$$\tau_j(x)=\upsilon_j(x,-0),\ (x,0)\in\bar{J}_j,\,(j=1,2) \tag{17$_j$}$$

В силу (1), (4), (5_j), (9), (14_0), (14_j) $(j=1,2)$ задача Γ сведётся к задаче Γ^* для уравнения

$$0=L\upsilon\equiv\begin{cases}L\upsilon_0 & в \ \Omega_0\\ L\upsilon_j & в \ \Omega_j\end{cases} \tag{18}$$

с краевыми условиями:

$$\upsilon(x,y)\big|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ \upsilon(x,y)\big|_{BB_0}=\varphi_2(y)-\omega_0(1),\ 0\le y\le h, \tag{19$_0$}$$

$$\upsilon(x,y)\big|_{EC_1}=\psi_1(x)-\omega_1(x),\ x\in\bar{J}_{12}, \tag{19$_1$}$$

$$\upsilon(x,y)\big|_{EC_2}=\psi_2(x)-\omega_2(x),\ x\in\bar{J}_{21}, \tag{19$_2$}$$

здесь $\omega_j(x)-$ определяются из (15_j) $(j=0,1,2)$.

Функциональные соотношения. В силу решения задачи Коши [8] для уравнения (12_j) в области $\Omega_j\,(j=1,2)$ с начальными условиями (17_j) и $\nu_j(x)=\upsilon_{jy}(x,-0)$, $(x,0)\in J_j$ с учётом (19_j) имеем:

$$\psi_1\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-\omega_1\left(\frac{x+x_0}{2}\right)=\gamma_1(x_0-x)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{xx_0}^{-\beta}(x_0-x)^{\beta-1}\tau_1(x)-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{xx_0}^{\beta-1}(x_0-x)^{-\beta}\nu_1(x),\ x\in J_1, \qquad (20_1)$$

$$\psi_2\left(\frac{x_0+x}{2}\right)-\omega_2\left(\frac{x_0+x}{2}\right)=\gamma_1(x-x_0)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{x_0x}^{-\beta}(x-x_0)^{\beta-1}\tau_2(x)-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{x_0x}^{1-\beta}(x-x_0)^{-\beta}\nu_2(x),\ x\in J_2, \qquad (20_2)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},\ 2\beta=\frac{m}{m-2},$$

$D_{x_0x}^{-\alpha}[\cdot]$ и $D_{xx_0}^{-\alpha}[\cdot], 0<\alpha<1-$ определяется из [18].

Применяя дифференциальные операторы, $D_{xx_0}^{1-\beta}\ldots$ и $D_{x_0x}^{1-\beta}\ldots$ к обеим частям равенства (20_j) $(j=1,2)$ и используя, формулы [18]:

$$D_{xx_0}^{1-\beta}D_{xx_0}^{\beta-1}\nu_1(x)=\nu_1(x),\ D_{x_0x}^{1-\beta}D_{x_0x}^{\beta-1}\nu_2(x)=\nu_2(x),$$

$$D_{xx_0}^{1-\beta}(x_0-x)^{1-2\beta}D_{xx_0}^{-\beta}(x_0-x)^{\beta-1}\tau_1(x)=(x_0-x)^{-\beta}D_{xx_0}^{1-2\beta}\tau_1(x),$$

$$D_{x_0x}^{1-\beta}(x-x_0)^{1-2\beta}D_{x_0x}^{-\beta}(x-x_0)^{\beta-1}\tau_2(x)=(x-x_0)^{-\beta}D_{x_0x}^{1-2\beta}\tau_2(x)$$

получим первое функциональные соотношения между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$, принесенные из области Ω_j на $J_j\,(j=1,2)$:

$$\nu_1(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-2\beta}\tau_1(x)+\frac{(x_0-x)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-\beta}\omega_1\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-$$

$$-\frac{(x_0-x)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x+x_0}{2}\right),\ x\in J_1, \qquad (21_1)$$

$$\nu_2(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-2\beta}\tau_2(x)+\frac{(x-x_0)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\omega_2\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-$$

$$-\frac{(x-x_0)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\psi_2\left(\frac{x+x_0}{2}\right),\ x\in J_2. \qquad (21_2)$$

Следовательно, как в работе [12, 39-48] и [13, стр.110] переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (12_0) и условие (19_0) с учётом (14_0) и

$$\upsilon_0(x,+0)=\tau_0(x),(x,0)\in\bar{J}_0,\ \ \upsilon_{0y}(x,+0)=\nu_0(x),(x,0)\in J_0 \qquad (22)$$

получим:

$$\tau_0''(x)=x^p\nu_0(x),\ (x,0)\in J_1 \qquad (23_1)$$

$$\tau_0(0)=\varphi_1(0),\ \tau_0(x_0)=0; \qquad (24_1)$$

$$\tau_0''(x)=x^p\nu_0(x),\ (x,0)\in J_2 \qquad (23_2)$$

$$\tau_0(x_0)=0,\ \tau_0(1)=\varphi_2(0)-\omega_0(1). \qquad (24_2)$$

Решая задачу (23_1) и (24_1) ((23_2) и (24_2)), получим второе функциональное соотношение между $\tau_0(x)$ и $\nu_0(x)$ перенесённое из области Ω_0 на $J_1(J_2)$:

$$\tau_0(x)=\int_0^{x_0} G_1(x,t)t^p\nu_0(t)dt+f_1(x),\ (x,0)\in J_1 \tag{25$_1$}$$

$$\left(\tau_0(x)=\int_{x_0}^{1} G_2(x,t)t^p\nu_0(t)dt+f_2(x),\ (x,0)\in J_2\right), \tag{25$_2$}$$

где

$$G_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_0)t}{x_0},\ 0\le t\le x,\\ \dfrac{(t-x_0)x}{x_0},\ \ x\le t\le x_0,\end{cases} \tag{26$_1$}$$

$$G_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(t-x_0)}{1-x_0},\quad x_0\le t\le x,\\ \dfrac{(t-1)(x-x_0)}{1-x_0},\quad x\le t\le 1,\end{cases} \tag{26$_2$}$$

$$f_1(x)=\varphi_1(0)-\frac{x}{x_0}\varphi_1(0), \tag{27$_1$}$$

$$f_2(x)=\frac{x-x_0}{1-x_0}\left[\varphi_2(0)-\omega_1(1)\right]. \tag{27$_2$}$$

Единственность решения задачи Γ

Из условия 1) задачи Γ, а также из непрерывности $\omega(x)$ и учитывая (9), (10_j), (11_j), (17_j), (22) имеем

$$\tau_j(x)=\upsilon_j(x,-0)=\upsilon_j(x,+0)=\tau_0(x),\ (x,0)\in\bar J_j, \tag{28}$$

$$\nu_j(x)=\upsilon_{jy}(x,-0)=\upsilon_{0y}(x,+0)=\nu_0(x),\ (x,0)\in\bar J_j. \tag{29}$$

Чтобы доказать единственность решения задачи Γ, сначала докажем единственность решения задачи Γ^* для уравнения (18).

Для доказательства единственности решения задачи Γ^* для уравнения (18) важную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. Если выполнены условия (2), (3), $p+2\beta>1$ и $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h],$ $\psi_1(x)\equiv 0,\ \forall x\in\left[\frac{x_0}{2},x_0\right],\ \psi_2(x)\equiv 0,\ \forall x\in\left[x_0,\frac{1+x_0}{2}\right]$, то

$$\tau_j(x)\equiv 0,\ (j=1,2),\ \forall x\,\bar J_j. \tag{30}$$

Доказательство леммы 1. Докажем эту лемму с помощью метода интегралов энергии. Пусть $\upsilon_j(x,y)(j=1,2)$ дважды непрерывно дифференцируемое решение однородной задачи Γ^* в области Ω_j и $\Omega_{j\varepsilon}$, здесь $\Omega_{j\varepsilon}-$ область с границей $\partial\Omega_{1\varepsilon}=\overline{AC_{1\varepsilon}}\cup\overline{C_1E_\varepsilon}\cup\bar J_{1\varepsilon}$ и $\partial\Omega_{2\varepsilon}=\overline{EC_{2\varepsilon}}\cup\overline{C_2B_\varepsilon}\cup\bar J_{2\varepsilon}$, строго лежащей в области $\Omega_j\ (j=1,2)$, $\varepsilon-$ достаточно малое положительное число.

Пусть $j=1$, тогда интегрируя по области $\Omega_{1\varepsilon}$ тождество:

$$0=x^p(-y)^{-m}\upsilon_1\left(\upsilon_{1xx}-(-y)^m\upsilon_{1yy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^p\upsilon_1\upsilon_{1y}\right)-$$

$$-x^p\left[(-y)^{-m}\upsilon_{1x}^2-\upsilon_{1y}^2\right]-px^{p-1}(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x} \quad (31)$$

и применяя формулу Грина [14], имеем:

$$\int\limits_{\overline{AC_{1\varepsilon}}\cup\overline{C_1E_\varepsilon}\cup\overline{J_\varepsilon}} x^p(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x}dy+x^p\upsilon_1\upsilon_{1y}dx=$$

$$=\iint\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} x^p\left[(-y)^{-m}\upsilon_{1x}^2-\upsilon_{1y}^2\right]dxdy+p\iint\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} x^{p-1}(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x}dxdy.$$

Отсюда переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ с учётом начальных условий (17_1), $\nu_1(x)=\upsilon_{1y}(x,-0)$, $(x,0)\in J_1$ и условия 1) задачи Γ, как и в работе [15, гл.5, стр. 96-97], получим:

$$\int\limits_0^{x_0} x^p\tau_1(x)\nu_1(x)dx=-\int\limits_{\overline{AC_1}} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}\upsilon_1 d\upsilon_1+\int\limits_{\overline{C_1E}} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}\upsilon_1 d\upsilon_1-$$

$$-\iint\limits_{\Omega_1} x^p\left[(-y)^{-m}\upsilon_{1x}^2-\upsilon_{1y}^2\right]dxdy-p\iint\limits_{\Omega_1} x^{p-1}(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x}dxdy. \quad (32)$$

Для вычисления правой части равенства (32) перейдём к характеристическим координатам:

$$\xi=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}},\quad \eta=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}. \quad (33)$$

Откуда

$$x=\frac{\xi+\eta}{2},\quad y=-\left[\frac{2-m}{4}(\xi-\eta)\right]^{\frac{2}{2-m}}\Rightarrow(-y)^{-\frac{m}{2}}=\left[\frac{2-m}{4}(\xi-\eta)\right]^{2\beta}.$$

При этом область Ω_1 перейдёт в треугольник Δ_1 со сторонами A_1C_{11}, $C_{11}E_1$ и E_1A_1, лежащими на прямых $\eta=0$, $\xi=x_0$ и $\eta=\xi$. А уравнения (12_1) приведутся к каноническому виду:

$$\upsilon_{1\xi\eta}=\frac{\beta}{\xi-\eta}\left(\upsilon_{1\xi}-\upsilon_{1\eta}\right). \quad (34)$$

В силу (19_1) при $\psi_1(x)=0$ с учётом (29), (31), (34) и условиям леммы 1 из правой части равенства (32), находим:

$$-\int\limits_{\overline{AC_1}} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}\upsilon_1 d\upsilon_1=$$

$$=-\int\limits_{\overline{A_1C_{11}}}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^p\left[\frac{2-m}{4}(\xi,\eta)\right]^{2\beta}\upsilon_1(\xi,\eta)d\upsilon_1(\xi,\eta)=-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\int\limits_0^{x_0}\xi^{p+2\beta}\upsilon_1(\xi,0)d\upsilon_1(\xi,0)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\omega_1^2\left(\frac{x_0}{2}\right)x_0^{p+2\beta}+$$

$$+\frac{p+2\beta}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\int\limits_0^{x_0}\xi^{p+2\beta-1}\upsilon_1^2(\xi,0)d\xi, \quad (35)$$

$$\int\limits_{\overline{C_1E}} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}\upsilon_1 d\upsilon_1=\int\limits_{\overline{C_{11}E_1}}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^p\left[\frac{2-m}{4}(\xi-\eta)\right]^{2\beta}\upsilon_1(\xi-\eta)d\upsilon_1(\xi-\eta)=$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\omega_1^2\left(\frac{x_0}{2}\right)x_0^{p+2\beta}-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times p\int_0^{x_0}(x_0+\eta)^{p-1}(x_0-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(x_0,\eta)d\eta+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\beta\int_0^{x_0}(x_0+\eta)^p(x_0-\eta)^{2\beta-1}\upsilon_1^2(x_0,\eta)d\eta, \qquad (36)$$

$$-\iint_{\Omega_1}x^p\left[(-y)^{-m}\upsilon_{1x}^2-\upsilon_{1y}^2\right]dxdy=$$

$$=-2\iint_{\Delta_1}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^p\left[\frac{2-m}{4}(\xi-\eta)\right]^{2\beta}\upsilon_{1\xi}\upsilon_{1\eta}d\xi d\eta=-2\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\iint_{\Delta_1}(\xi+\eta)^p(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_{1\xi}\upsilon_{1\eta}d\xi d\eta=2\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\iint_{\Delta_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{\beta}{2}(\xi+\eta)^p(\xi-\eta)^{2\beta-1}\upsilon_1^2+\frac{p}{2}(\xi+\eta)^{p-1}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\xi+\eta)^p(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1\upsilon_{1\xi}+\frac{\beta}{2}(\xi+\eta)^p(\xi-\eta)^{2\beta-1}\upsilon_1^2\right]\right\}d\xi d\eta-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p(p-1)\iint_{\Delta_1}(\xi+\eta)^{p-2}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\omega_1^2\left(\frac{x_0}{2}\right)x_0^{p+2\beta}-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}(p+\beta)\int_0^{x_0}\xi^{p+2\beta-1}\upsilon_1^2(\xi,0)\upsilon_1^2(\xi,0)d\xi-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\beta\int_0^{x_0}(x_0+\eta)^p(x_0-\eta)^{2\beta-1}\upsilon_1^2(x_0,\eta)d\eta+\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p\int_0^{x_0}(x_0+\eta)^{p-1}(x_0-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(x_0,\eta)d\eta-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p(p-1)\iint_{\Delta_1}(\xi+\eta)^{p-2}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(\xi-\eta)d\xi d\eta, \qquad (37)$$

$$-p\iint_{\Omega_1}x^{p-1}(-y)^{-m}\upsilon_1\upsilon_{1x}dxdy=-\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p\iint_{\Delta_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{2}(\xi+\eta)^{p-1}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{2}(\xi+\eta)^{p-1}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2\right]\right\}d\xi d\eta+\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p(p-1)\times$$

$$\times\iint_{\Delta_1}(\xi+\eta)^{p-2}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(\xi,\eta)d\xi d\eta=\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times p\left[\int_0^{x_0}\xi^{p+2\beta-1}\upsilon_1^2(\xi,0)d\xi-\int_0^{x_0}(x_0+\eta)^{p-1}(x_0-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(x_0,\eta)d\eta\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}p(p-1)\iint_{\Delta_1}(\xi+\eta)^{p-2}(\xi-\eta)^{2\beta}\upsilon_1^2(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (38)$$

Подставляя (35)-(38) в (32) с учетом условия леммы 1, получим

$$\int_0^{x_0} x^p \tau_1(x)\nu_1(x)dx = 0. \qquad (39_1)$$

Пусть $j = 2$, тогда точно так же интегрируя тождество (31) по области Ω_2, получаем

$$\int_{x_0}^{1} x^p \tau_2(x)\nu_2(x)dx = 0, \qquad (39_2)$$

где $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x) -$ определяется из (28) и (29) соответственно.

В силу условия задачи Γ и леммы 1 из (23_j) с учетом $\tau_0(0) = \tau_0(x_0) = \tau_0(1) = 0,$ находим

$$\int_0^{x_0} x^p \tau_1(x)\nu_1(x)dx = \int_0^{x_0} \tau_1(x)\tau_1''(x)dx = -\int_0^{x_0} \tau_1'^2(x)dx \le 0, \qquad (40_1)$$

$$\int_{x_0}^{1} x^p \tau_2(x)\nu_2(x)dx = -\int_{x_0}^{1} \tau_2'^2(x)dx \le 0. \qquad (40_2)$$

Сравнивая (39_j) и (40_j), имеем

$$\int_0^{x_0} x^p \tau_1(x)\nu_1(x)dx = 0 \text{ или } \int_0^{x_0} \tau_1'^2(x)dx = 0$$

$$\left(\int_{x_0}^{1} x^p \tau_2(x)\nu_2(x)dx = 0 \text{ или } \int_{x_0}^{1} \tau_2'^2(x)dx = 0\right).$$

Отсюда и следует, что

$$\tau_j(x) \equiv 0, \ (x,0) \in \bar{J}_j, \ (j = 1,2).$$

Лемма 1 доказана. В силу (10_i), $(i = \overline{0,2})$, (30) и условия 1) задачи Γ (или Γ^*) с учётом (28) получим

$$\tau_0(x) \equiv 0, \ (x,0) \in \bar{J}_0. \qquad (41)$$

Принимая во внимание (30),(41), (11_j) из (15_j)$\left(j = \overline{0,2}\right)$ получим

$$\omega(x) = 0, \ \forall x \in [0,1]. \qquad (42)$$

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1 и (42), то задача Γ^* в области Ω не имеет отличного от нуля решения.

Доказательство теоремы 1. Согласно принципу максимума для параболических уравнений [16], [17] первая краевая задача для уравнения (12_0) в области $\bar{\Omega}_0$ с однородными условиями (19_0) и $\upsilon_0(x,0) = 0, \ (x,0) \in \bar{J}_0$ с учетом (42) не имеет отличного от нуля решения, т.е.

$$\upsilon_0(x,y) \equiv 0 \text{ в } \bar{\Omega}_0. \qquad (43)$$

Из решения задачи Коши-Гурса с нулевыми данными, т.е. $\left(\upsilon_j(x,y)\big|_{EC_j} = 0, \quad \upsilon_j(x,y)\big|_{y=0} = 0\right)$ для уравнения (12_j) в области Ω_j следует, что

$$\upsilon_j(x,y) \equiv 0 \quad в \quad \Omega_j \ \ (j = 1,2). \qquad (44_j)$$

В силу (43), (44_1), (44_2) из (10_j) $\left(j = \overline{0,2}\right)$ имеем

$$\upsilon(x,y)\equiv 0 \;\; в \;\; \bar{\Omega}. \tag{45}$$

Тем самым доказана единственность решения задачи Γ^* для уравнения (18).

Теорема 1 доказана

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то задача Γ в области Ω не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2. Принимая во внимание (42), (45) из (9) имеем

$$u(x,y)\equiv 0 \quad в \;\; \bar{\Omega}. \tag{46}$$

Отсюда следует единственность решения задачи Γ для уравнения (1).

Теорема 2 доказана

Существование решения задачи Γ

Существование решения задачи Γ доказывается методом интегральных уравнений. Чтобы доказать существование решения задачи Γ, сначала докажем существование решения задач Γ^* для уравнения (18).

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (3), (6), (7) и (8), то в области Ω решение задачи Γ^* существует.

Доказательство теоремы 3. Исключая $\tau_j(x)$ из (21_j) и (25_j) $(j=1,2)$ с учётом (15_0), (15_1), (15_2) и условия склеивания (28) и (29) имеем:

$$\nu_1(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\int_0^{x_0} t^p\nu_1(t)D_{xx_0}^{1-2\beta}G_1(x,t)dt+\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-2\beta}f_1(x)-$$

$$-\frac{\sqrt{-\mu_2}(x_0-x)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\int_0^x t^p\nu_1(t)dt\,D_{xx_0}^{1-\beta}\int_{x_0}^x sh\sqrt{-\mu_2}\left(\frac{x-z}{2}\right)G_1\left(\frac{z}{2},t\right)dz+$$

$$+\frac{\sqrt{-\mu_2}(x_0-x)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-\beta}\int_{x_0}^x sh\sqrt{-\mu_2}\left(\frac{x-t}{2}\right)f_1\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{(x_0-x)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{xx_0}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x+x_0}{2}\right),$$

$$\nu_2(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\int_{x_0}^{1} t^p\nu_2(t)D_{x_0x}^{1-2\beta}G_2(x,t)dt+\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-2\beta}f_2(x)+$$

$$+\frac{\sqrt{-\mu_2}(x-x_0)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\int_{x_0}^1 t^p\nu_2(t)dt\,D_{x_0x}^{1-\beta}\int_{x_0}^x sh\sqrt{-\mu_2}\left(\frac{x-z}{2}\right)G_2\left(\frac{z}{2},t\right)dz+$$

$$+\frac{\sqrt{-\mu_2}(x-x_0)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\int_{x_0}^1 sh\sqrt{-\mu_2}\left(\frac{x-t}{2}\right)f_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{(x-x_0)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x_0x}^{1-\beta}\psi_2\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

Отсюда, выполнив соответствующие обозначение, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\nu_j(x)$:

$$\nu_1(x)+\int_0^{x_0}K_1(x,t)t^p\nu_1(t)dt=\Phi_1(x),\;(x,0)\in J_1, \tag{47_1}$$

$$\nu_2(x)+\int_{x_0}^{1}K_2(x,t)t^p\nu_2(t)dt=\Phi_2(x),\;(x,0)\in J_2 \tag{47_2}$$

где $K_j(x,t)$ и $\Phi_j(x)$ $(j=1,2)-$ известные функции.

В силу (2), (3), (6), (7) и (8) следует, что ядро и правая часть уравнения (47_j) допускают оценки