ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ

хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

========= ♦ =========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

========= ♦ =========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS

Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

Ўзр ФА В.И. Романовский номидаги Математика институти
Математика институти Бухоро бўлинмаси

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА АНАЛИЗНИНГ ТУРДОШ МАСАЛАЛАРИ

хорижий олимлар иштирокидаги илмий конференцияси

МАТЕРИАЛЛАРИ

Бухоро, Ўзбекистон, 04–05 ноябр, 2021 йил

======== ♦ ========

Институт Математики имени В.И. Романовского АН РУз
Бухарское отделение института Математики

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции
с участием зарубежных ученых

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА

Бухара, Узбекистан, 04–05 ноябрь, 2021 год

======== ♦ ========

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the AS of Uzbekistan
Bukhara branch of the Institute of Mathematics

ABSTRACTS

of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED PROBLEMS OF ANALYSIS

Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021

При фиксированном t норма функции $\phi(x,t)$ в $H^l(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $|\phi|^l(t)$. Такое обозначение используем для функций зависящих только от переменной x. Норма функции $\phi(x,t)$ в $C\left(H^l(\mathbb{R}^n),[0,T]\right)$ определяется равенством

$$\|\phi\|^l := \max_{t\in[0,T]} \left||\phi|^l(t)\right|.$$

Пусть T - произвольное положительное фиксированное число. Рассмотрим множество $\Omega(\gamma_0)$, ($\gamma_0>0$ некоторое фиксированное число) заданных функций (f,φ,g), для которых выполнены все условия теоремы 1 и $\max\left\{\|f\|^{\alpha+2}, |\varphi|^{\alpha+2}, \|g\|^{\alpha}\right\}\leq\gamma_0$. Через $Q(\gamma_1)$ обозначим класс функций $q(x',t)\in C\big(H^{\alpha}(\mathbb{R}^2),[0,T]\big)$, удовлетворяющих неравенству $\|q\|^{\alpha}\leq\gamma_1$ с некоторым фиксированным положительным числом γ_0.

Теорема 2. *Пусть* $(f,\varphi,g)\in\Omega(\gamma_0)$, $(\tilde{f},\tilde{\varphi},\tilde{g})\in\Omega(\gamma_0)$ *и* $(q,\tilde{q})\in Q(\gamma_1)$. *Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:*

$$\|q-\tilde{q}\|^{\alpha}\leq c\Big(\|f-\tilde{f}\|^{\alpha+2}+\|\varphi-\tilde{\varphi}\|+\|g-\tilde{g}\|^{\alpha}\Big), \tag{4}$$

где постоянная c зависит только от T, α, γ_0, γ_1.

Из теоремы 2 легко следует следующая теорема единственности для любого $T>0$:

Теорема 3. *Пусть функции* $q(x',t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $g(x',t)$ *и* $\tilde{q}(x',t)$, $\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{g}(x',t)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме 2. Причем если* $f=\tilde{f}$, $\varphi=\tilde{\varphi}$, $g=\tilde{g}$ *для* $(x,t)\in\Phi_T$, *то* $q(x',t)=\tilde{q}(x',t)$, $x'\in\mathbb{R}^2$, $t>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа// М.: Наука, 1967. С. 736.

2. Kochubei A.N. A Cauchy problem for evolution equations of fractional order// Differential Equations. 1989. V. 25. P. 967–974.

3. Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy Problem for Fractional Diffusion Equations// Journal of Differential Equations. 2004. V. 199. P. 211–255.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЕМ ТРИКОМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Жураев Ф.М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М.Нахушева [1], В.М.Казиева [2], Б.Исломова и Ф.Джураева [3]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x,y , ограниченная кривыми:

$$S_j:\quad |x|=1,\quad 0<y<1,\ \ S_3:\quad 0<x<1,\quad y=1,\ \ S_4:\quad -1<x<0,\quad y=1,$$

$$\Gamma_j: \ |x| - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad \Gamma_{j+2}: \ |x| + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \ \ y \leq 0,$$

здесь и далее $x \geq 0$, при $j = 1$, $x \leq 0$, при $j \ = \ 2$, причем $m < 0$.

Введем обозначения $\quad \Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x,y): \ x > 0, \ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x,y): \ x < 0, \ y > 0\}, \, \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x,y): \ x > 0, \ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x,y): \ x < 0, \ y < 0\}, \ \ I_1 = \{(x,y): \ 0 < x < 1, \ y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x,y): \ -1 < x < 0, \ y = 0\}, \ I_3 = \{(x,y): \ x = 0, \ 0 < y < 1\},$$

$$\Omega_j = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^- \cup J_j, \ \Omega_3 = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup J_3, \ \ A_j((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j,$$

$$C_j \left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2}; \ \ -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4} \right)^{2/(2-m)} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, \ (j = 1, 2),$$

$$O(0,0) = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \ B_1(1,1) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3, \ \ B_2(-1,1) = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, \ B_0(0,1) = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u\,(x,0)\,, & (x,y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u\,(x,0)\,, & (x,y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \quad p, \quad \rho_j, \quad \mu_j \ (j = 1, 2)$—любые действительные числа, причем

$$m < 0, \ \ p > 0, \ \ \rho_j > 0, \ \ \mu_j > 0, \ (j = 1, 2).$$

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача TG. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega\right) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+\right) \cap C^2\left(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-\right)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j = 1, 2)$;

3) $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \ \ u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2},$$

4) на линии вырождения I_i $(i = \overline{1,3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \ (x,0) \in I_j, \ (j = 1, 2),$$

$$\lim_{x \to +0} u_x(x,y) = \lim_{x \to -0} u_x(x,y), \ (0,y) \in I_3;$$

где $\varphi_1(y), \ \varphi_2(y), \ g_1\,(x)\,, \ g_2\,(x)\,,$ – заданные функции, причем $g_2(-1) = \varphi_2(0)$,

$$\varphi_j(y) \in C\,[0,1] \cap C^1\,(0,1)\,, \ (j = 1, 2), \tag{2}$$

$$g_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \ g_2(x) \in C^1\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Если выполнены условия 1) и 2) задачи TG, то любое регулярное решение уравнения (1) можно представить в виде [3]:

$$u\left(x,y\right)=\upsilon\left(x,y\right)+\omega\left(x\right) .$$

где

$$\upsilon\left(x,y\right)=\begin{cases}\upsilon_j\left(x,y\right), \left(x,y\right)\in\Omega_j^+,\\ w_j\left(x,y\right)\ \left(x,y\right)\in\Omega_j^-,\end{cases}\tag{4}$$

$$\omega\left(x\right)=\begin{cases}\omega_j^+(x), & (x,0)\in\bar{I}_j,\\ \omega_j^-(x), & (x,0)\in\bar{I}_j,\end{cases}$$

здесь $\upsilon_j\left(x,y\right)$ и $w_j\left(x,y\right),(j=1,2)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_j\equiv\upsilon_{j\,xx}-|x|^p\upsilon_{jy}=0,\ (x,y)\in\Omega_j^+,$$

$$Lw_j\equiv w_{j\,xx}-(-y)^m w_{j\,yy}=0,\ (x,y)\in\Omega_j^-\ \ (j=1,2)\,,$$

а $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$ $(j=1,2)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j^{+''}\left(x\right)-\rho_j\omega_j^+\left(x\right)=\rho_j\upsilon_j\left(x,0\right), \quad (x,0)\in I_j,$$

и

$$\omega_j^{-''}\left(x\right)+\mu_j\omega_j^-\left(x\right)=-\mu_j w_j\left(x,0\right), \quad (x,0)\in I_j,$$

соответственно.

Лемма. Если $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv 0,\ \ \forall y\in[0,1],\, g_1(x)\equiv 0,\ \ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, и $g_2(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, то

$$\tau_j(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\bar{I}_j\quad (j=1,2),$$

здесь $\tau_j(x)\equiv\upsilon_j(x,0)=w_j(x,0)$.

Теорема. Если выполнены условия леммы и (2)-(4), то в области Ω решение задачи TG для уравнения (1) существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального урав-нения второго порядка. // Дифференциальные уравнения. **12**:1. С.103–108 (1976).

2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //"Дифференциальные уравнения". 14(1). С.181–184(1978).

3. Исломов Б., Джураев Ф.М. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // Узбекский математичес-кий журнал. № 2. С.75–85 (2011).

4. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравне-ния второго порядка. // ДАН РУз. №1–2. С. 3–6 (1996).