



# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета  
Scientific reports of Bukhara State University

1/2023

1/2023

<https://buxdu.uz>



E-ISSN 2181-1466  
9 772181 146004



ISSN 2181-6875  
9 772181 687004

@buxdu\_uz

@buxdu1

@buxdu1

[www.buxdu.uz](http://www.buxdu.uz)

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI**  
**SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY**  
**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Ilmiy-nazariy jurnal**  
**2023, № 1**

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy fanlar** bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.  
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvoohnoma bilan ro'yxatga olingan.

**Muassis:** Buxoro davlat universiteti  
**Tahririyat manzili:** 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
**Elektron manzil:** nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

**TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor  
**Bosh muharrir o'rinbosari:** Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

**Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich**, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

**Danova M.**, filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

**Margianti S.E.**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

**Minin V.V.**, kimyo fanlari doktori (Rossiya)

**Tashqarayev R.A.**, texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

**Mo'minov M.E.**, fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

**Adizov Baxtiyor Rahmonovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Abuzalova Mexriniso Kadirovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonov Muxtor Raxmatovich**, texnika fanlari doktori, professor

**Barotov Sharif Ramazonovich**, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

**Baqoyeva Muhabbat Qayumovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich**, biologiya fanlari doktori, professor

**Djurayev Davron Raxmonovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Olimov Shirinboy Sharofovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Qahhorov Siddiq Qahhorovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Umarov Baqo Bafoevich**, kimyo fanlari doktori, professor

**Murodov G'ayrat Nekovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**O'rayeva Darmonoy Saidjonovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Hayitov Shodmon Ahmadovich**, tarix fanlari doktori, professor

**To'rayev Halim Hojiyevich**, tarix fanlari doktori, professor

**Rasulov Baxtiyor Mamajonovich**, tarix fanlari doktori, professor (Andijon davlat Pedagogika instituti rektori)

**Boboyev Feruz Sayfullayevich**, tarix fanlari doktori (O'zR FA tarix instituti yetakchi ilmiy xodimi)

**Jo'rayev Narzulla Qosimovich**, siyosiy fanlar doktori, professor

**Qurbonova Gulnoz Negmatovna**, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

**Jumayev Rustam G'aniyevich**, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

**Quvvatova Dilrabo Habibovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Axmedova Shoir Nematovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonova Zilola Qodirovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Zaripov Gulmurot Toxirovich**, texnika fanlari nomzodi, dotsent

<https://buxdu.uz>

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ		
Rasulov T.H., Dilmurodov E.B.,	Kompakt qo'zg'alishli umumlashgan Fridriks modelining ba'zi spektral xossalari	4
Ismoilova D.E.	Fermionli fok fazodagi uchinchi tartibli operatorli matritsaga mos kanal operator va uning spektri	9
Jumaev J.J., Tursunova S.F., Ibragimova Sh.E.,	Inverse coefficient problem for heat equation in the bounded domain	15
Djurayev D.R., Turayev A.A., To'rayev O.G'.	$Bi_{1.7}Pb_{0.3}Sr_2Ca_nCu_{n-1}O_y$ vismut asosli kupratlarning olinish texnologiyasi	21
Umarov Sh.A.	Shifrlash algoritmlarida kriptobardoshli mantiqiy amallardan foydalanish usullari	25
Ahmedov O.C.	Свободные и вынужденные осесимметричные колебания систем вязкоупругих цилиндрических оболочек	30
Исломов Б.И., Жураев Ф.М.	Краевые задачи с условием Геллерстедта на параллельных характеристиках для вырождающегося нагруженного уравнения парабло-гиперболического типа	34
Амиров С.Ф, Шаропов Ш.А, Сатторов Т.А.	Дифференциал трансформатор датчиклар оддий ва махсус структурали нозичик магнит занжирларининг математик моделлари	43
Турдиев Х.Х., Суяров Т.Р., Наврүзова М.Н.	Начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных гиперболических уравнений	50
Tosheva N.A.	Lower bound of the essential spectrum of a family of $3 \times 3$ operator matrices	57
Akramova D.I.	Estimates for convolution operators related to $A_\infty$ type singularities	63
Jo'raqulova F.M.	Bozonli fok fazodagi operatorli matritsaga mos Faddeyev tenglamasi	72
Rasulov T.H., Ne'matova Sh.B.	Umumlashgan Fridriks modeli kvadratik sonli tasvirining komponentlari	77
Seytov Sh.J., Ochilova G.B.	Баъзи даврий реакцияларнинг математик моделлари	82
Sirliyeva F.A., Khudaybergenov K.K., Muminov Z.E.	Fuzzy neural network and agent technologies in the structural-parametric modeling of technological systems	87
Tosheva N. A., Qodirov S. O.	Python dasturlash tili yordamida matritsa sonli tasvirini kompleks tekislikda tasvirlash algoritmi	93
Xasanov H.H., Xasanov K.X.	Начально-краевая задача для адвекции - дисперсионного уравнения дробного порядка	100
Husenov B. E.	Poisson representation for $A(z)$ -harmonic functions belonging to some class	107
TILSHUNOSLIK *** LINGUISTICS *** ЯЗЫКОЗНАНИЕ		
Nigmatova L. X.	Lisoniy sistemaning pog'onaviyligi va unda gipo-giperonimik munosabatlar	116
Sadigova S.I.	Phraseological combinations with ordinal numbers in English	123
Abdulxayrov D.P.	-Gan ekan shaklining mazmuniy ko'rinishlari	127
Xodjayeva D.I., Hoshimova G.M.	Erkin Vohidov she'rlarida ritorik so'roq gaplarning o'ziga xos xususiyatlari	131

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

*Исломов Бозор Исломович,*  
профессор кафедры “Дифференциальные  
уравнения и математическая физика”,  
Национальный Университет Узбекистана  
[islomovbozor@yandex.com](mailto:islomovbozor@yandex.com)

*Жураев Фуркат Мухитдинович,*  
старший преподаватель  
кафедры “Дифференциальные уравнения»,  
Бухарский государственный университет  
[f.m.jurayev@bukdu.uz](mailto:f.m.jurayev@bukdu.uz)

*Аннотация.* Изучены краевые задачи для невырождающихся уравнений гиперболического, параболического, гипероло-параболического и эллиптико-гиперболического типов. В последние годы это направление интенсивно развивалось, весьма важные задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для невырождающихся нагруженных уравнений с частными производными. Известно, что краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка ранее не были изучены. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Исходя из этого, настоящая статья посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

*Ключевые слова.* Краевые задачи, нагруженное уравнение парабола-гиперболического типа, нагруженное уравнение с вырождением, представление общего решения, метод интегралов энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение со сдвигом.

*Аннотация.* Бузилишига эга бўлмаган гиперболик, параболик, гиперболик-параболик ва эллиптик-параболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган. Сўнги йилларда бу йўналиш жабдал равишда ишлаб чиқилди ва такомиллаштирилди, шунинг учун математик физика ва биологиянинг жуда муҳим масалалари бузилишига эга бўлмаган юкланган хусусий ҳосилли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларга олиб келади. Маълумки, иккинчи тартибли аралаш типдаги бузилишига эга бўлган юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар илгари ўрганилмаган. Бу биринчи навбатда умумий ечимнинг ифодаланмаганлиги билан боғлиқ, бошқа томондан бундай масалалар силжиши билан кам ўрганилган интеграл тенгламаларга келтирилади. Шунга асосланиб, ушбу иш соҳа ичида бузиладиган юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун локал масалани қўйиши ва ўрганишига бағишланган.

*Калит сўзлар:* чегаравий масалалар, параболик-гиперболик типдаги юкланган тенглама, умумий ечимнинг тасвири, энергия интеграл усули, экстремум принципи, силжишли интеграл тенглама.

*Abstract.* Boundary value problems for non-degenerate equations of hyperbolic, parabolic, hyperbolic-parabolic and elliptic-hyperbolic types are studied. In recent years, this direction has been intensively developed and refined so that very important problems of mathematical physics and biology lead to boundary value problems for non-degenerate loaded partial differential equations. It is known that boundary value problems for a degenerate loaded equation of mixed type of the second order have not been studied before. This is due, first of all, to the lack of representation of the general solution for such equations; on the other hand, such problems are reduced to little-studied integral equations with a shift. Based on this, the present work is devoted to the formulation and study of local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation that degenerates inside the domain.

*Keywords.* Boundary value problems, loaded equation of parabolic-hyperbolic type, loaded equation with degeneration, general solution representation, method of energy integral, extremum principle, integral equation with shift.

**1. Введение.** В настоящее время круг рассматриваемых задач для невырождающихся нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гипербола-параболического и эллипτικο-параболического типов значительно расширился. Отметим работы [1-6]. Теория краевых задач для нагруженных уравнений второго порядка с интегро-дифференциальным оператором были изучены в работах [7], [8]. В работах [9], [10] изучены локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов второго и третьего порядка. Несколько нам известно, краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева[11], В.М.Казиева [12], Б.Исломова и Ф.Джураева [13], Р.Р.Ашурова и С.З. Жамалова [14], Б.И.Исломова и Ф.М.Жураева [15]. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

**2. Постановка задачи**

Рассмотрим уравнение:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u(x, 0), & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u(x, 0), & (x, y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m, p, \rho_j, \mu_j (j=1, 2)$  – любые действительные числа, причём

$$m < 0, p > 0, \rho_j > 0, \mu_j > 0, (j=1, 2). \quad (2)$$

Пусть  $\Omega$  – конечная односвязная область в плоскости переменных  $x, y$ , ограниченная кривыми:

$$S_j : |x|=1, 0 < y < 1, S_3 : 0 < x < 1, y=1, S_4 : -1 < x < 0, y=1,$$

$$\Gamma_j : |x| - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \Gamma_{j+2} : |x| + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, y \leq 0,$$

здесь и далее  $x \geq 0$ , при  $j=1, x \leq 0$ , при  $j=2$ .

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1^+ &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, & \Omega_2^+ &= \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, \\ \Omega_1^- &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}, & \Omega_2^- &= \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y < 0\}, \\ I_1 &= \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, & I_2 &= \{(x, y) : -1 < x < 0, y = 0\}, & I_3 &= \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}, \\ \Omega_j &= \Omega_j^+ \cup \Omega_j^-, & \Omega_3 &= \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup I_3, & A_j &= ((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j, \\ C_j &\left[ (-1)^{j+1} \frac{1}{2}; -\left( (-1)^{j+1} \frac{2-m}{4} \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, (j=1, 2), & O(0, 0) &= \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \\ B_1(1, 1) &= \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3, & B_2(-1, 1) &= \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, & B_0(0, 1) &= \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4. \end{aligned}$$

$$2\beta = \frac{m}{m-2}, \text{ причём } 0 < \beta < \frac{1}{2}, 0 < p - 2\beta < 1 \quad (3)$$

В области  $\Omega$  для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

**Задача T.** Найти функцию  $u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+) \cap C^2(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-)$ ;
- 2)  $u(x, y)$  является регулярным решением уравнения (1) в областях  $\Omega_j^+$  и  $\Omega_j^- (j=1, 2)$ ;
- 3)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad (5)$$

4) на линии вырождения  $J_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in I_j, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y), \quad (x, 0) \in I_3; \quad (7)$$

где  $\varphi_1(y), \varphi_2(y), g_1(x), g_2(x)$  – заданные функции, причём  $g_1(-1) = \varphi_2(0)$ ,

$$\varphi_j(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1), \quad (8)$$

$$g_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad g_2(x) \in C^1\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1, -\frac{1}{2}\right). \quad (9)$$

**Задача  $\tilde{T}$ .** Найти функцию  $u(x, y)$ , обладающую всеми свойствами задачи  $T$ , кроме условий (5), которые заменяются условиями:

$$u|_{\Gamma_3} = q_1(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad u|_{\Gamma_2} = q_2(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0,$$

где  $q_1(x), q_2(x)$  – заданные функции, причём  $\varphi_1(0) = q_1(1) = 0$ ,

$$q_1(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad q_2(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

### 3. Единственность решения задачи $T$

Если выполнены условия 1) и 2) задачи  $T$ , то любое регулярное решение уравнения  $T$  можно представить в виде [2], [16]:

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x) \quad (10)$$

где

$$v(x, y) = \begin{cases} v_j(x, y), & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ w_j(x, y) & (x, y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_j^+(x), & (x, 0) \in \bar{I}_j, \\ \omega_j^-(x), & (x, 0) \in \bar{I}_j, \end{cases} \quad (12)$$

здесь  $v_j(x, y)$  и  $w_j(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) регулярные решения уравнения

$$Lv_j \equiv v_{jxx} - |x|^p v_{jy} = 0 \quad (x, y) \in \Omega_j^+, \quad (13)$$

$$Lw_j \equiv w_{jxx} - (-y)^m w_{jyy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_j^- \quad (j = 1, 2), \quad (14)$$

а  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$  ( $j = 1, 2$ ) произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения:

$$\omega_j^{+''}(x) - \rho_j \omega_j^+(x) = \rho_j v_j(x, 0), \quad (x, 0) \in I_j, \quad (15)$$

и

$$\omega_j^{-''}(x) + \mu_j \omega_j^-(x) = -\mu_j w_j(x, 0), \quad (x, 0) \in I_j \quad (16)$$

соответственно.

Учитывая, что функция  $ax + b$  является решением уравнения (12) и (13), произвольные функции  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$  ( $j = 1, 2$ ) можно подчинить условиям:

$$\omega_j^+((-1)^{j+1}) = \omega_j^{+'}((-1)^{j+1}) = 0, \quad (17)$$

$$\omega_1^-(0) = \omega_1^{-'}(0) = 0, \quad \omega_1^-(-1) = \omega_1^{-'}(-1) = 0. \quad (18)$$

Решение задачи Коши (15), (17) и (16), (18) соответственно имеет вид:

$$\omega_j^+(x) = \sqrt{\rho_j} \int_{(-y)^{\mu_j}}^x \tau_j(t) \operatorname{sh} \sqrt{\rho_j}(x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (19)$$

$$\omega_1^-(x) = -\sqrt{\mu_1} \int_0^x \tau_1(t) \sin \sqrt{\mu_1}(x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_1, \quad (20)$$

$$\omega_2^-(x) = -\sqrt{\mu_2} \int_{-1}^x \tau_2(t) \sin \sqrt{\mu_2}(x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_2,$$

где

$$\tau_j(x) \equiv \nu_j(x, 0) = w_j(x, 0), \quad (x, 0) \in \bar{I}_j. \quad (21)$$

В силу (1), (4), (5), (11), (12), (17), (18) задача сводится к задаче  $T^*$  для уравнения:

$$0 = \begin{cases} L \nu_j, & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ L w_j, & (x, y) \in \Omega_j^- \end{cases} \quad (22)$$

с краевыми условиями

$$\nu_j|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (23)$$

$$w_1|_{\Gamma_1} = g_1(x) - \omega_1^-(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (24)$$

$$w_2|_{\Gamma_2} = g_2(x) - \omega_2^-(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad (25)$$

здесь  $\omega_j^-(x)$  – определяются из (20) ( $j=1,2$ ).

Чтобы доказать единственность решения задачи  $T$ , сначала докажем единственность решения задачи  $T^*$  для уравнений (22).

Для доказательства единственности решения задачи  $T^*$  для уравнения (22) важную роль играет следующая лемма.

**Лемма 1.** Если  $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0, \forall y \in [0,1], g_1(x) \equiv 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$

$g_2(x) \equiv 0, \forall x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right],$  то

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2), \quad (26)$$

здесь  $\tau_j(x)$  ( $j=1,2$ ) – определяются из (21).

В работе [15] было доказано, что

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2). \quad (27)$$

В силу (27) из (19) и (20) с учётом (12), получим:

$$\omega(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2. \quad (28)$$

**Теорема 1.** Если выполнены условия леммы 1 и (28), то в области  $\Omega$  решение задачи  $T^*$  для уравнения (22) единственно.

*Доказательство.* Согласно принципу максимума для параболических уравнений [18],[19], [20] краевая задача  $T^*$  для уравнения (22) в области  $\bar{\Omega}_3$  с однородными условиями (21), (23) с учётом (27) не имеет отличного от нуля решения, т.е.  $\nu_j(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}_j^+$  ( $j=1,2$ ). Тогда из условия (25) с учётом (12), (28) следует, что

$$\omega_j^-(x) \equiv 0, \quad (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (j=1,2). \quad (29)$$

В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями  $w_j^-(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in \bar{I}_j, w_{jy}^-(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in I_j$  для уравнения (22) в области  $\Omega_j$  с учётом (28) и (29) получим  $w_j^-(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}_j$ .

Отсюда, и из (11) имеем:

$$v(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (30)$$

Из (30) следует единственность решения задачи  $T^*$  для уравнения (22).

**Теорема 1 доказана.**

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1, то в области  $\Omega$  решение задачи  $T$  для уравнения (1) единственно.

**Доказательство.** В силу (28), (30) из (10) следует, что

$$u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Тем самым доказана единственность решения задачи  $T$  для уравнения (1).

**Теорема 2 доказана.**

#### 4. Существование решения задачи $T$

**Теорема 3.** Если выполнены условия (2), (3), (8) и (9), то в области  $\Omega$  решение задачи  $T$  существует.

Для доказательства теоремы 3 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

**Задача  $T_j$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega_j) \cap C^2(\Omega_j^+ \cup \Omega_j^-)$

( $j=1,2$ ) уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4), (5) и

$$u(0, y) = \tau_3(y), (0, y) \in \bar{I}_3, \quad (32)$$

где  $\tau_3(y)$  – заданная функция, причём

$$\tau_3(y) \in C(\bar{I}_3) \cap C^1(I_3). \quad (33)$$

**Задача  $T_3$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3) \cap C^1(\Omega_3 \cup I_1 \cup I_2) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+)$  уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4) и

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_j(x) + \omega_j^+(x), (x, 0) \in \bar{I}_j (j=1,2),$$

где

$$\tau_j(x) = w_j(x, -0) = v_j(x, +0), (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (34)$$

и  $\omega_j^+(x)$  – определяется соответственно(19).

##### 4.1. Исследование задачи $T_j, j=(1,2)$

**Теорема 3.j.** Если выполнены условия (2), (3), (8), (9) и (33), то в области  $\Omega_j$  существует единственное решение задачи  $T_j$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболических гиперболических уравнений[20] следует, что решение  $u(x, y)$  задачи  $T_j$  при  $g_j(x) \equiv 0$  свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области  $\bar{\Omega}_j^+$  достигает лишь на  $\bar{\Gamma}_j \cup \bar{I}_3, (j=1,4)$ .

Согласно принципу экстремума, однородная задача  $T_j$ , т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи  $T_j$

Переходим к доказательству существования решения задачи  $T_j$  и  $T_j^*$  с условиями (24), (25) и  $v_j(0, y) = \tau_3(y), (0, y) \in \bar{I}_3$ .



В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями  $w_j^-(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in \bar{I}_j, w_{jy}^-(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in I_j$  для уравнения (22) в области  $\Omega_j$  с учётом (28) и (29) получим  $w_j^-(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}_j$ .

Отсюда, и из (11) имеем:

$$v(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (30)$$

Из (30) следует единственность решения задачи  $T^*$  для уравнения (22).

**Теорема 1 доказана.**

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1, то в области  $\Omega$  решение задачи  $T$  для уравнения (1) единственно.

**Доказательство.** В силу (28), (30) из (10) следует, что

$$u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Тем самым доказана единственность решения задачи  $T$  для уравнения (1).

**Теорема 2 доказана.**

#### 4. Существование решения задачи $T$

**Теорема 3.** Если выполнены условия (2), (3), (8) и (9), то в области  $\Omega$  решение задачи  $T$  существует.

Для доказательства теоремы 3 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

**Задача  $T_j$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega_j) \cap C^2(\Omega_j^+ \cup \Omega_j^-)$

( $j=1,2$ ) уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4), (5) и

$$u(0, y) = \tau_3(y), (0, y) \in \bar{I}_3, \quad (32)$$

где  $\tau_3(y)$  – заданная функция, причём

$$\tau_3(y) \in C(\bar{I}_3) \cap C^1(I_3). \quad (33)$$

**Задача  $T_3$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3) \cap C^1(\Omega_3 \cup I_1 \cup I_2) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+)$  уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4) и

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_j(x) + \omega_j^+(x), (x, 0) \in \bar{I}_j (j=1,2),$$

где

$$\tau_j(x) = w_j(x, -0) = v_j(x, +0), (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (34)$$

и  $\omega_j^+(x)$  – определяется соответственно(19).

##### 4.1. Исследование задачи $T_j, j=(1,2)$

**Теорема 3.j.** Если выполнены условия (2), (3), (8), (9) и (33), то в области  $\Omega_j$  существует единственное решение задачи  $T_j$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболических гиперболических уравнений[20] следует, что решение  $u(x, y)$  задачи  $T_j$  при  $g_j(x) \equiv 0$  свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области  $\bar{\Omega}_j^+$  достигает лишь на  $\bar{\Gamma}_j \cup \bar{I}_3, (j=1,4)$ .

Согласно принципу экстремума, однородная задача  $T_j$ , т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи  $T_j$

Переходим к доказательству существования решения задачи  $T_j$  и  $T_j^*$  с условиями (24), (25) и  $v_j(0, y) = \tau_3(y), (0, y) \in \bar{I}_3$ .

В силу решения задачи Коши [13] для уравнения (22) в области  $\Omega_j^-$  ( $j=1,2$ ) с учётом (24), (25) имеем:

$$g_1\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1(x)^{1-2\beta} \Gamma(\beta) D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta} v_1(x), \quad (x,0) \in I_1, \quad (35)$$

$$g_2\left(\frac{x-1}{2}\right) - \omega_2^-\left(\frac{x-1}{2}\right) = \gamma_1(1+x)^{1-2\beta} \Gamma(\beta) D_{-1x}^{-\beta} (1+x)^{\beta-1} \tau_2(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{-1x}^{\beta-1} (1+x)^{-\beta} v_2(x), \quad (x,0) \in I_2, \quad (36)$$

где  $\tau_j(x)$  определяются из (34) и

$$w_{jy}(x,-0) = v_{jy}(x,+0) = v_j(x), \quad (x,0) \in I_j, \quad (j=1,2). \quad (37)$$

соответственно,

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{2-m} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а  $D_{0x}^{-\alpha}[\cdot]$  и  $D_{-1x}^{-\alpha}[\cdot]$  - интегральные операторы дробного порядка  $\alpha(\alpha > 0)$  [21]:

$$D_{ax}^{-\alpha} \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \quad \text{Re } \alpha > 0. \quad (38)$$

Применяя дифференциальные операторы,  $\frac{d}{dx} D_{0x}^{-\beta} \dots \equiv D_{0x}^{1-\beta} \dots$  и  $\frac{d}{dx} D_{-1x}^{-\beta} \dots \equiv D_{-1x}^{1-\beta} \dots$  к обеим частям равенств (35), (36) ( $j=1,2$ ) и используя формулы [21]:

$$\begin{aligned} D_{0x}^{1-\beta} D_{0x}^{\beta-1} v_1(x) &= v_1(x), \quad D_{-1x}^{1-\beta} D_{-1x}^{\beta-1} v_2(x) = v_2(x), \\ D_{0x}^{1-\beta} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) &= x^{-\beta} D_{0x}^{1-2\beta} \tau_1(x), \\ D_{-1x}^{1-\beta} (1+x)^{1-2\beta} D_{-1x}^{-\beta} (1+x)^{\beta-1} \tau_2(x) &= (1+x)^{-\beta} D_{-1x}^{1-2\beta} \tau_2(x) \end{aligned}$$

получим функциональные соотношения между  $\tau_j(x)$  и  $v_j(x)$ , перенесённые из области  $\Omega_j^-$  на  $I_j$  ( $j=1,2$ ):

$$v_1(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau_1(x) + \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} g_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad (x,0) \in I_1, \quad (39)$$

$$v_2(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} \tau_2(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} \omega_2^-\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} g_2\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad (x,0) \in I_2, \quad (40)$$

Согласно условиям задачи  $T$ , переходя к пределу в уравнении (13) при  $y \rightarrow +0$ , с учётом (34) и (37) получим:

$$\tau_j''(x) - |x|^p v_j(x) = 0. \quad (41)$$

с условиями:

$$\tau_1(0) = \tau_3(0) = g_1(0), \quad \tau_1(1) = \varphi_1(0), \quad (42)$$

$$\tau_2(-1) = \varphi_2(0), \quad \tau_2(0) = \tau_3(0), \quad \tau_2(-1) = g_2(-1). \quad (43)$$

Решая задачу (41) и (42), (43), получим функциональное соотношение между  $\tau_j(x)$  и  $v_j(x)$ , перенесённое из области  $\Omega_j^+$  на  $I_j$ :

$$\tau_j(x) = (-1)^{j+1} \int_0^{(-1)^{j+1}x} G_j(x,t)((-1)^{j+1}t)^p v_j(t) dt + f_j(x), \quad (x,0) \in \bar{I}_j, \quad (44)$$

где

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ (x-1)t, & t \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (45)$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, & -1 \leq x \leq t, \\ (t+1)x, & t \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (46)$$

$$f_j(x) = g_j(0) + (-1)^{j+1}x[\varphi_j(0) - g_j(0)]. \quad (47)$$

Исключив  $\tau_j(x)$  из (39), (40) и (44) с учётом (20), получим интегральное уравнение относительно  $v_j(x)$  ( $j=1,2$ ):

$$v_1(x) - \int_0^1 K_1(x,t)t^p v_1(t) dt = \Psi_1(x), \quad (x,0) \in I_1, \quad (48)$$

$$v_2(x) + \int_{-1}^0 K_2(x,t)(-t)^p v_2(t) dt = \Psi_2(x), \quad (x,0) \in I_2, \quad (49)$$

где

$$K_1(x,t) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} G_1(x,t) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \int_0^x \sin \sqrt{\mu_1} \frac{x-z}{2} G_1\left(\frac{z}{2}, t\right) dz, \quad (50)$$

$$K_2(x,t) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} G_2(x,t) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} \int_{-1}^x \sin \sqrt{\mu_2} \frac{x-z}{2} G_2\left(\frac{z-1}{2}, t\right) dz,$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} f_1(x) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \int_0^x \sin \sqrt{\mu_1} \frac{x-z}{2} f_1\left(\frac{z}{2}\right) dz - \\ & - \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} g_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad (x,0) \in I_1, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) = & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} f_2(x) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} \int_{-1}^x \sin \sqrt{\mu_2} \frac{x-z}{2} f_2\left(\frac{z-1}{2}\right) dz - \\ & - \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} g_j\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad (x,0) \in I_2. \end{aligned} \quad (52)$$

На основании (2), (3), (8) и (9) с учётом свойств оператора интегро-дифференцирования, Бета, гипергеометрической функции [21, гл. 1, § 1, 2 и 4, стр.4-32] и функции  $G_j(x,t)$  ( $j=1,2$ ) из (50) и (51) следует, что ядро и правой части уравнения (48) и (49) допускают оценки

$$|K_j(x,t)| \leq c_1, \quad (53)$$

$$|\Psi_1(x)| \leq c_2 x^{2\beta-1}, \quad |\Psi_2(x)| \leq c_3 (1+x)^{2\beta-1}, \quad c_j = const > 0 \quad (j=1,3). \quad (54)$$

На основании (8), (9), с учётом (54) заключаем, что  $\Psi_j(x) \in C^2(I_j)$ , причём функция  $\Psi_1(x)$  ( $\Psi_2(x)$ ) может иметь особенность порядка меньше  $1-2\beta$  при  $x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -1$ ), а при  $x \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0$ ) ограничена.

В силу (2), (3), (53) и (54) уравнения (48) и (49) является интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма [22] и из единственности решения задачи  $T_j$  заключаем, что интегральное уравнение (48) и (49) однозначно разрешимо в классе  $C^2(J_j)$ , причем  $v_j(x)$  может иметь особенность порядка меньше  $1-2\beta$  при  $|x| \rightarrow 0$ , а при  $|x| \rightarrow 1$  ограничено и её решение даётся формулой:

$$v_j(x) = \Psi_j(x) + \int_0^{(-1)^{j+1}} K_j^*(x,t) \Psi_j(t) dt, \quad (x,0) \in I_j, (j=1,2), \quad (55)$$

здесь  $K_j^*(x,t)$  - резольвента ядро  $K_j(x,t)$ .

Подставляя (55) в (44) находим:

$$\tau_j(x) \in C(\bar{I}_j) \cap C^2(I_j), \quad (j=1,2). \quad (56)$$

Следовательно, задача  $T_j^*$  однозначно разрешима в силу эквивалентности её интегральному уравнению Фредгольма второго рода (48) и (49).

Таким образом, решение задачи  $T_j^*$  можно восстановить в области  $\Omega_j^+$  как решение первой краевой задачи для уравнения (13) [23], а в  $\Omega_j^-$  как решение задачи Коши для уравнения (14).

Этим завершается исследование существования решения задачи  $T_j^*$  для уравнения(22).

В силу (44), (55) из (19) и (20) с учётом (10), (11), (12) определим функции  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$ .

Тогда решение задачи  $T_j$  в области  $\Omega_j^+$  находится в виде:

$$u(x,y) = v_j(x,y) + \omega_j^+(x), \quad (57)$$

где  $v_j(x,y)$  - решение первой краевой задачи для уравнения (13) [20], [23], а в областях  $\Omega_j^-$  в виде

$$u(x,y) = w_j(x,y) + \omega_j^-(x), \quad (j=1,2), \quad (58)$$

здесь  $w_j(x,y)$  - решение задачи Коши для уравнения (14) в области  $\Omega_j^- (j=1,2)$  [13].

Таким образом, в области  $\Omega_j$  решение задачи  $T_j$  существует и единственно.

Теорема 3.j доказана.

#### 4.2. Исследование задачи $T_3$

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия (2),(3), (8) и (56), тогда в области  $\Omega_3$  существует единственное решение задачи  $T_3$ .

Доказательство теорема 3.3 приведено в работе [15].

**Переходим к доказательству существования решения задачи  $T$ .**

Пусть  $u(x,y)$  – решение задачи  $T$  в области  $\Omega$  с условиями (4)- (7), тогда, пользуясь результатами задач  $T_i (i=1,3)$  (см. пункт 3.2.1 и 3.2.2) задачи  $T$  эквивалентным образом редуцируется к исследованию задач  $T_1$  и  $T_2$  для уравнения (1), где  $\tau_3(y)$  – определяется из [15, формулы 4.39]. Однозначная разрешимость задач  $T_j$  следует из теоремы 3.j ( $j=1,2$ ) Следовательно, области  $\Omega$  решение задачи  $T$  существует.

**Теорема 3 доказана.** Этим завершается исследование задачи  $T$  для уравнения (1).

**Замечание.** Точно так же, как указано выше, доказывается однозначная разрешимость задачи  $\tilde{T}$ .

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // "Дифференциальные уравнения". 19(1). 1983. С. 86-94.
2. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С. 3-6.
3. Джениалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы. 1995. 270 с.
4. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения. // "Тр. МИАН". 2002. Т. 236. С. 298-303.
5. Хубиев К.У. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. // Вестник Самарск. госуд. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2(15). 2007. С. 155-157.
6. Isломov B., Baltaeva U.I. Boundary value problems for the classical and mixed integro-differential equations with Riemann-Liouville operators. // International Journal of Partial Differential equations. 2013. Article ID 157947. Pp. 11-17.
7. Kishin B.S., Abdullaev O.Kh. About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives // "International Journal of Differential Equations". 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.
8. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся частью. // "Дифференц. уравнения". 23(1). 1987. С. 72 - 78.
9. Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения. // "Математические заметки". 51(3). 1992. С. 91-96.
10. Balkizov Zh. A. Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain. // "Ufa Mathematical Journal". 9( 2). 2017. pp. 25-39.
11. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // "Дифференциальные уравнения". 12(1). 1976. С. 103-108.
12. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // «Дифференциальные уравнения». 14(1). 1978. С.181-184.
13. Исломов Б., Джурраев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа // "Узбекский математический журнал". 2011. № 2. С. 75-85.
14. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle // "Uzbek Mathematical Journal". 2018. №3. pp. 63-72.
15. Исломов Б., Жүраев Ф. Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области // "Уфимский математический журнал". Том 14. № 1(2022). С. 41-56
16. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанного - составного типа. Т. Фан. 1974. 156 с.
17. Джурраев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно- составного типа. Ташкент: Фан. 1979. 240 с.
18. Джурраев Т.Д., Согуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220с.
19. Ильин А.М., Калашиников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. // "ЖВМиМФ". 4(6). 1965.С. 1006-1024.
20. Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического и эллиптического-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения // Дис. канд. физ.мат. наук. Ташкент: ИМАН РУз. 1995. 120 с.
21. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985. 301 с.
22. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.
23. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск. 1978. 53 с.