E-ISSN 2181-1466
ISSN 2181-6875

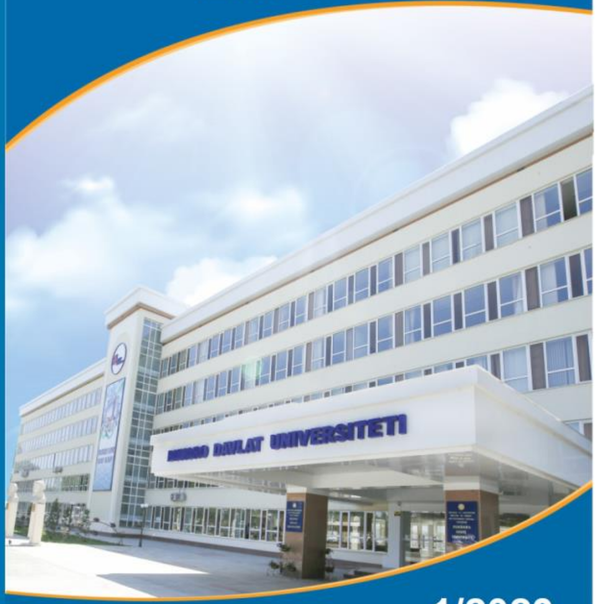
@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

1/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



1/2023

https://buxdu.uz

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 1

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
ANIQ VA TABIIY FANLAR * EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**		

УДК: 517. 956.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО -ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Исломов Бозор Исломович,
профессор кафедры "Дифференциальные уравнения и математическая физика",
Национальный Университет Узбекистана
islomovbozor@yandex.com
Жураев Фуркат Мухитдинович,
старший преподователь
кафедры "Дифференциальные уравнения»,
Бухарский государственный университет
f.m.jurayev@buxdu.uz

Аннотация. *Изучены краевые задачи для невырождающихся уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-гиперболического типов. В последние годы это направление интенсивно развивалось, весьма важные задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для невырождающихся нагруженных уравнений с частными производными. Известно, что краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка ранее не были изучены. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Исходя из этого, настоящая статья посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.*

Ключевые слова. *Краевые задачи, нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа, нагруженное уравнение с вырождением, представление общего решения, метод интегралов энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение со сдвигом.*

Аннотация. *Бузилишга эга бўлмаган гиперболик, параболик, гиперболик-параболик ва эллиптик- параболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар ўрганилган. Сўнгги йилларда бу йўналиш жадал равишда ишлаб чиқилди ва такомиллаштирилди, шунинг учун математик физика ва биологиянинг жуда муҳим масалалари бузилишга эга бўлмаган юкланган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларга олиб келади. Маълумки, иккинчи тартибли аралаш типдаги бузилишга эга бўлган юкланган тенгламалар учун чегаравий масалалар илгари ўрганилмаган. Бу биринчи навбатда умумий ечимнинг ифодаланмаганлиги билан боғлиқ, бошқа томондан бундай масалалар силжиш билан кам ўрганилган интеграл тенгламаларга келтирилади. Шунга асосланиб, ушбу иш соҳа ичида бузиладиган юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун локал масалани қўйиш ва ўрганишга бағишланган.*

Калит сўзлар: *чегаравий масалалар, параболик-гиперболик типдаги юкланган тенглама, умумий ечимнинг тасвири, энергия интеграл усули, экстремум принципи, силжишли интеграл тенглама.*

Abstract. *Boundary value problems for non-degenerate equations of hyperbolic, parabolic, hyperbolic-parabolic and elliptic-hyperbolic types are studied. In recent years, this direction has been intensively developed and refined so that very important problems of mathematical physics and biology lead to boundary value problems for non-degenerate loaded partial differential equations. It is known that boundary value problems for a degenerate loaded equation of mixed type of the second order have not been studied before. This is due, first of all, to the lack of representation of the general solution for such equations; on the other hand, such problems are reduced to little-studied integral equations with a shift. Based on this, the present work is devoted to the formulation and study of local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation that degenerates inside the domain.*

Keywords. *Boundary value problems, loaded equation of parabolic-hyperbolic type, loaded equation with degeneration, general solution representation, method of energy integral, extremum principle, integral equation with shift.*

1. Введение. В настоящее время круг рассматриваемых задач для невырождающихся нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов значительно расширился. Отметим работы [1-6]. Теория краевых задач для нагруженных уравнений второго порядка с интегро-дифференциальным оператором были изучены в работах [7], [8]. В работах [9], [10] изучены локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов второго и третьего порядка. Несколько нам известно, краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева[11], В.М.Казиева [12], Б.Исломова и Ф.Джураева [13], Р.Р.Ашурова и С.З. Жамалова [14], Б.И.Исломова и Ф.М.Жураева [15]. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение:

$$0=\begin{cases} u_{xx}-|x|^{p}u_{y}-\rho_{j}u(x,0), & (x,y)\in\Omega_{j}^{+}, \\ u_{xx}-(-y)^{m}u_{yy}+\mu_{j}u(x,0), & (x,y)\in\Omega_{j}^{-}, \end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ \ p,\ \ \rho_j\ \ \mu_j\ (j=1,2)$ – любые действительные числа, причём

$$m<0,\ p>0,\ \rho_j>0,\ \mu_j>0,\ (j=1,2). \tag{2}$$

Пусть Ω – конечная односвязная область в плоскости переменных x, y ,ограниченная кривыми:

$$S_j:\ |x|=1,\ 0<y<1,\ S_3:\ 0<x<1,\ \ y=1,\ S_4:\ -1<x<0,\ \ y=1,$$

$$\Gamma_j:|x|-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\ \Gamma_{j+2}:|x|+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1,\ \ y\le 0,$$

здесь и далее $x\ge 0$, при $j=1$, $x\le 0$, при $j\ =\ 2$.

Введём обозначения:

$$\Omega_1^+=\Omega\cap\{(x,y):x>0,\ y>0\},\qquad \Omega_2^+=\Omega\cap\{(x,y):x<0,\ y>0\},$$

$$\Omega_1^-=\Omega\cap\{(x,y):x>0,\ y<0\},\qquad \Omega_2^-=\Omega\cap\{(x,y):x<0,\ y<0\},$$

$$I_1=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\},\ \ I_2=\{(x,y):-1<x<0,\ y=0\},\ I_3=\{(x,y):x=0,\ 0<y<1\},$$

$$\Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup J_j,\ \Omega_3=\Omega_1^+\bigcup\Omega_2^-\bigcup J_3,\ \ A_j((-1)^{j+1},0)=\overline{I}_j\bigcap\overline{S}_j,$$

$$C_j\left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2};\ -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right]=\overline{\Gamma}_j\bigcap\overline{\Gamma}_{j+2},\ (j=1,2),\ O(0,0)=\overline{I}_1\bigcap\overline{I}_2,$$

$$B_1(1,1)=\overline{S}_1\bigcap\overline{S}_3,\ \ B_2(-1,1)=\overline{S}_2\bigcap\overline{S}_4,\ \ B_0(0,1)=\overline{S}_3\bigcap\overline{S}_4.$$

$$2\beta=\frac{m}{m-2},\quad \text{причём}\ 0<\beta<\frac{1}{2},\ \ 0<p-2\beta<1 \tag{3}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

Задача T. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^{1}(\Omega)\cap C_{x,y}^{2,1}\left(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\right)\cap C^{2}\left(\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\right)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j=1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u\big|_{S_j}=\varphi_j(y),\ 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u\big|_{\Gamma_1}=g_1(x),\ \ 0\le x\le\frac{1}{2},\ \ \ u\big|_{\Gamma_4}=g_2(x),\ \ -1\le x\le-\frac{1}{2}, \tag{5}$$

4) на линии вырождения $J_i\ (i=\overline{1,3})$ выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=\lim_{y\to-0} u_y(x,y),\ (x,0)\in I_j, \qquad (6)$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y)=\lim_{x\to-0} u_x(x,y),\ (x,0)\in I_3\,; \qquad (7)$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ g_1(x),\ g_2(x)$ – заданные функции, причём $g_1(-1)=\varphi_2(0)$,

$$\varphi_j(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1), \qquad (8)$$

$$g_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad g_2(x)\in C^1\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(-1,-\frac{1}{2}\right). \qquad (9)$$

Задача $\tilde{T}$. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую всеми свойствами задачи T, кроме условий (5), которые заменяются условиями:

$$u|_{\Gamma_3}=q_1(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,\qquad u|_{\Gamma_2}=q_2(x),\quad -\frac{1}{2}\le x\le 0,$$

где $q_1(x),\ q_2(x)$ – заданные функции, причём $\varphi_1(0)=q_1(1)=0$,

$$q_1(x)\in C^1\left[\tfrac{1}{2},1\right]\cap C^3\left(\tfrac{1}{2},1\right),\qquad q_2(x)\in C^1\left[-\tfrac{1}{2},0\right]\cap C^3\left(-\tfrac{1}{2},0\right).$$

3. Единственность решения задачи T

Если выполнены условия 1) и 2) задачи T, то любое регулярное решение уравнения T можно представить в виде [2], [16]:

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)+\omega(x) \qquad (10)$$

где

$$\upsilon(x,y)=\begin{cases}\upsilon_j(x,y), & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ w_j(x,y) & (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases} \qquad (11)$$

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_j^+(x), & (x,0)\in\overline{I}_j,\\ \omega_j^-(x), & (x,0)\in\overline{I}_j,\end{cases} \qquad (12)$$

здесь $\upsilon_j(x,y)$ и $w_j(x,y)$ $(j=1,2)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_j\equiv\upsilon_{jxx}-|x|^p\,\upsilon_{jy}=0\qquad (x,y)\in\Omega_j^+, \qquad (13)$$

$$Lw_j\equiv w_{jxx}-(-y)^m\,w_{jyy}=0,\quad (x,y)\in\Omega_j^-\quad (j=1,2), \qquad (14)$$

а $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$ $(j=1,2)$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения:

$$\omega_j^{+\prime\prime}(x)-\rho_j\omega_j^+(x)=\rho_j\upsilon_j(x,0),\quad (x,0)\in I_j, \qquad (15)$$

и

$$\omega_j^{-\prime\prime}(x)+\mu_j\omega_j^-(x)=-\mu_j w_j(x,0),\quad (x,0)\in I_j \qquad (16)$$

соответственно.

Учитывая, что функция $ax+b$ является решением уравнения (12) и (13), произвольные функции $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$ $(j=1,2)$ можно подчинить условиям:

$$\omega_j^+\left((-1)^{j+1}\right)=\omega_j^{+\prime}\left((-1)^{j+1}\right)=0, \qquad (17)$$

$$\omega_1^-(0)=\omega_1^{-\prime}(0)=0,\quad \omega_1^-(-1)=\omega_1^{-\prime}(-1)=0. \qquad (18)$$

Решение задачи Коши (15), (17) и (16), (18) соответственно имеет вид:

$$\omega_j^+(x)=\sqrt{\rho_j}\int_{(-1)^{j+1}}^{x}\tau_j(t)\,sh\sqrt{\rho_j}(x-t)dt,\quad (x,0)\in\overline{I}_j, \tag{19}$$

$$\omega_1^-(x)=-\sqrt{\mu_1}\int_0^x\tau_1(t)sin\sqrt{\mu_1}(x-t)dt,\quad (x,0)\in\overline{I}_1,$$
$$\omega_2^-(x)=-\sqrt{\mu_j}\int_{-1}^x\tau_2(t)sin\sqrt{\mu_2}(x-t)dt,\quad (x,0)\in\overline{I}_2, \tag{20}$$

где

$$\tau_j(x)\equiv\upsilon_j(x,0)=w_j(x,0),\quad (x,0)\in\overline{I}_j. \tag{21}$$

В силу (1), (4), (5), (11), (12), (17), (18) задача сведётся к задаче T^* для уравнения:

$$0=\begin{cases}L\upsilon_j, & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ Lw_j, & (x,y)\in\Omega_j^-\end{cases} \tag{22}$$

с краевыми условиями

$$\upsilon_j\big|_{S_j}=\varphi_j(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{23}$$

$$w_1\big|_{\Gamma_1}=g_1(x)-\omega_1^-(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$w_2\big|_{\Gamma_4}=g_2(x)-\omega_2^-(x),\quad -1\le x\le-\frac{1}{2}, \tag{25}$$

здесь $\omega_j^-(x)-$ определяются из (20) $(j=1,2)$.

Чтобы доказать единственность решения задачи T, сначала докажем единственность решения задачи T^* для уравнений (22).

Для доказательства единственности решения задачи T^* для уравнения (22) важную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. Если $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv 0,\ \forall y\in[0,1],\ g_1(x)\equiv 0,\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$

$g_2(x)\equiv 0,\ \ \forall x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, то

$$\tau_j(x)\equiv 0,\ \forall x\in\overline{I}_j\quad (j=1,2), \tag{26}$$

здесь $\tau_j(x)\ (j=1,2)$ – определяются из (21).

В работе [15] было доказано, что

$$\tau_j(x)\equiv 0,\ \forall x\in\overline{I}_j\quad (j=1,2). \tag{27}$$

В силу (27) из (19) и (20) с учётом (12), получим:

$$\omega(x)\equiv 0,\quad \forall\ x\in\overline{I}_1\cup\overline{I}_2. \tag{28}$$

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1 и (28), то в области Ω решение задачи T^* для уравнения (22) единственно.

Доказательство. Согласно принципу максимума для параболических уравнений [18],[19],[20] краевая задача T^* для уравнения (22) в области $\overline{\Omega}_3$ с однородными условиями (21), (23) с учётом (27) не имеет отличного от нуля решения, т.е. $\upsilon_j(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_j^+$ $(j=1,2)$.Тогда из условия (25) с учётом (12), (28) следует, что

$$\omega_j^-(x)\equiv 0,\quad (x,0)\in\overline{I}_j,\ (j=1,2). \tag{29}$$

В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями $w_j^-(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad (x,0)\in\bar{I}_j,\quad w_{jy}^-(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad (x,0)\in I_j$ для уравнения (22) в области Ω_j с учётом (28) и (29) получим $w_j^-(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_j$.

Отсюда, и из (11) имеем:

$$\upsilon(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{30}$$

Из (30) следует единственность решения задачи T^* для уравнения (22).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то в области Ω решение задачи T для уравнения (1) единственно.

Доказательство. В силу (28), (30) из (10) следует, что

$$u(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{31}$$

Тем самым доказана единственность решения задачи T для уравнения (1).

Теорема 2 доказана.

4. Существование решения задачи T

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (3), (8) и (9), то в области Ω решение задачи T существует.

Для доказательства теоремы 3 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

Задача T_j. Найти решение $u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_j)\cap C^1(\Omega_j)\cap C^2(\Omega_j^+\cup\Omega_j^+)$ $(j=1,2)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4), (5) и

$$u(0,y)=\tau_3(y),\qquad (0,y)\in\bar{I}_3, \tag{32}$$

где $\tau_3(y)$ – заданная функция, причём

$$\tau_3(y)\in C(\bar{I}_3)\cap C^1(I_3). \tag{33}$$

Задача T_3. Найти решение $u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_3)\cap C^1(\Omega_3\cup I_1\cup I_2)\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4) и

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\tau_j(x)+\omega_j^+(x),\quad (x,0)\in\bar{I}_j\ \ (j=1,2),$$

где

$$\tau_j(x)=w_j(x,-0)=\upsilon_j(x,+0),\quad (x,0)\in\bar{I}_j, \tag{34}$$

и $\omega_j^+(x)$ – определяется соответственно(19).

4.1. Исследование задачи T_j $j=(1,2)$

Теорема 3.j. Если выполнены условия (2), (3), (8), (9) и (33), то в области Ω_j существует единственное решение задачи T_j.

Доказательство. В силу леммы 1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболо-гиперболических уравнений[20] следует, что решение $u(x,y)$ задачи T_j при $g_j(x)\equiv 0$ свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области $\bar{\Omega}_j^+$ достигает лишь на $\bar{\Gamma}_j\cup\bar{I}_3,\ (j=1,4)$.

Согласно принципу экстремума, однородная задача T_j, т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи T_j

Переходим к доказательству существования решения задачи T_j и T_j^* с условиями (24), (25) и $\upsilon_j(0,y)=\tau_3(y),\quad (0,y)\in\bar{I}_3$.

В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями $w_j^-(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad (x,0)\in\overline{I}_j,\quad w_{jy}^-(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad (x,0)\in I_j$ для уравнения (22) в области Ω_j с учётом (28) и (29) получим $w_j^-(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_j$.

Отсюда, и из (11) имеем:

$$\upsilon(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{30}$$

Из (30) следует единственность решения задачи T^* для уравнения (22).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то в области Ω решение задачи T для уравнения (1) единственно.

Доказательство. В силу (28), (30) из (10) следует, что

$$u(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in\overline{\Omega}. \tag{31}$$

Тем самым доказана единственность решения задачи T для уравнения (1).

Теорема 2 доказана.

4. Существование решения задачи T

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (3), (8) и (9), то в области Ω решение задачи T существует.

Для доказательства теоремы 3 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

Задача T_j. Найти решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_j)\cap C^1(\Omega_j)\cap C^2(\Omega_j^+\cup\Omega_j^+)$ $(j=1,2)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4), (5) и

$$u(0,y)=\tau_3(y),\qquad (0,y)\in\overline{I}_3, \tag{32}$$

где $\tau_3(y)-$ заданная функция, причём

$$\tau_3(y)\in C(\overline{I}_3)\cap C^1(I_3). \tag{33}$$

Задача T_3. Найти решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_3)\cap C^1(\Omega_3\cup I_1\cup I_2)\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4) и

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\tau_j(x)+\omega_j^+(x),\quad (x,0)\in\overline{I}_j\ \ (j=1,2),$$

где

$$\tau_j(x)=w_j(x,-0)=\upsilon_j(x,+0),\quad (x,0)\in\overline{I}_j, \tag{34}$$

и $\omega_j^+(x)-$ определяется соответственно(19).

4.1. Исследование задачи T_j $j=(1,2)$

Теорема 3.j. Если выполнены условия (2), (3), (8), (9) и (33), то в области Ω_j существует единственное решение задачи T_j.

Доказательство. В силу леммы 1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболо-гиперболических уравнений[20] следует, что решение $u(x,y)$ задачи T_j при $g_j(x)\equiv 0$ свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области $\overline{\Omega}_j^+$ достигает лишь на $\overline{\Gamma}_j\cup\overline{I}_3$, $(j=1,4)$.

Согласно принципу экстремума, однородная задача T_j, т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи T_j

Переходим к доказательству существования решения задачи T_j и T_j^* с условиями (24), (25) и $\upsilon_j(0,y)=\tau_3(y),\quad (0,y)\in\overline{I}_3.$

В силу решения задачи Коши [13] для уравнения (22) в области Ω_j^- $(j=1,2)$ с учётом (24), (25) имеем:

$$g_1\left(\frac{x}{2}\right)-\omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right)=\gamma_1(x)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_1(x)-$$
$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu_1(x),\quad (x,0)\in I_1, \tag{35}$$
$$g_2\left(\frac{x-1}{2}\right)-\omega_2^-\left(\frac{x-1}{2}\right)=\gamma_1(1+x)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)D_{-1x}^{-\beta}(1+x)^{\beta-1}\tau_2(x)-$$
$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{-1x}^{\beta-1}(1+x)^{-\beta}\nu_2(x),\quad (x,0)\in I_2, \tag{36}$$

где $\tau_j(x)$ определяются из (34) и

$$w_{jy}(x,-0)=\upsilon_{jy}(x,+0)=\nu_j(x),\quad (x,0)\in I_j,\quad (j=1,2). \tag{37}$$

соответственно,

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\quad \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а $D_{0x}^{-\alpha}[\cdot]$ и $D_{-1x}^{-\alpha}[\cdot]$ - интегральные операторы дробного порядка $\alpha(\alpha>0)$ [21]:

$$D_{ax}^{-\alpha}\phi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\phi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad x>a,\quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{38}$$

Применяя дифференциальные операторы, $\frac{d}{dx}D_{0x}^{-\beta}\ldots\equiv D_{0x}^{1-\beta}\ldots$ и $\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-\beta}\ldots\equiv D_{-1x}^{1-\beta}\ldots$ к обеим частям равенств (35), (36) $(j=1,2)$ и используя формулы [21]:

$$D_{0x}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}\nu_1(x)=\nu_1(x),\ D_{-1x}^{1-\beta}D_{-1x}^{\beta-1}\nu_2(x)=\nu_2(x),$$
$$D_{0x}^{1-\beta}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_1(x)=x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau_1(x),$$
$$D_{-1x}^{1-\beta}(1+x)^{1-2\beta}D_{-1x}^{-\beta}(1+x)^{\beta-1}\tau_2(x)=(1+x)^{-\beta}D_{-1x}^{1-2\beta}\tau_2(x)$$

получим функциональные соотношения между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$, перенесённые из области Ω_j^- на I_j $(j=1,2)$:

$$\nu_1(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau_1(x)+\frac{x^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}\omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right)-$$
$$-\frac{x^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}g_1\left(\frac{x}{2}\right),\ (x,0)\in I_1, \tag{39}$$
$$\nu_2(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{-1x}^{1-2\beta}\tau_2(x)+\frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{-1x}^{1-\beta}\omega_2^-\left(\frac{x-1}{2}\right)-$$
$$-\frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{-1x}^{1-\beta}g_2\left(\frac{x-1}{2}\right),\quad (x,0)\in I_2, \tag{40}$$

Согласно условиям задачи T, переходя к пределу в уравнении (13) при $y\to+0$, с учётом (34) и (37) получим:

$$\tau_j''(x)-|x|^p\nu_j(x)=0. \tag{41}$$

с условиями:

$$\tau_1(0)=\tau_3(0)=g_1(0),\quad \tau_1(1)=\varphi_1(0), \tag{42}$$
$$\tau_2(-1)=\varphi_2(0),\ \tau_2(0)=\tau_3(0),\ \tau_2(-1)=g_2(-1). \tag{43}$$

Решая задачу (41) и (42), (43), получим функциональное соотношение между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$, перенесённое из области Ω_j^+ на I_j:

$$\tau_j(x) = (-1)^{j+1} \int_0^{(-1)^{j+1}} G_j(x,t)((-1)^{j+1}t)^p \nu_j(t)dt + f_j(x), \quad (x,0) \in \overline{I}_j, \tag{44}$$

где

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \le x \le t, \\ (x-1)t, & t \le x \le 1, \end{cases} \tag{45}$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, & -1 \le x \le t, \\ (t+1)x, & t \le x \le 0, \end{cases} \tag{46}$$

$$f_j(x) = g_j(0) + (-1)^{j+1} x\left[\varphi_j(0) - g_j(0)\right]. \tag{47}$$

Исключив $\tau_j(x)$ из (39), (40) и (44) с учётом (20), получим интегральное уравнение относительно $\nu_j(x)\,(j=1,2)$:

$$\nu_1(x) - \int_0^1 K_1(x,t) t^p \nu_1(t)dt = \Psi_1(x), \quad (x,0) \in I_1, \tag{48}$$

$$\nu_2(x) + \int_{-1}^0 K_2(x,t)(-t)^p \nu_2(t)dt = \Psi_2(x), \quad (x,0) \in I_2, \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x,t) &= \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} G_1(x,t) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \int_0^x sin\sqrt{\mu_1}\frac{x-z}{2} G_1\left(\frac{z}{2},t\right)dz, \\ K_2(x,t) &= \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} G_2(x,t) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} \int_{-1}^x sin\sqrt{\mu_2}\frac{x-z}{2} G_2\left(\frac{z-1}{2},t\right)dz, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = {} & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} f_1(x) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \int_0^x sin\sqrt{\mu_1}\frac{x-z}{2} f_1\left(\frac{z}{2}\right)dz - \\ & - \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta}\, g_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad (x,0) \in I_1, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) = {} & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} f_2(x) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta} \int_{-1}^x sin\sqrt{\mu_2}\frac{x-z}{2} f_2\left(\frac{z-1}{2}\right)dz - \\ & - \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{1-\beta}\, g_j\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad (x,0) \in I_2. \end{aligned} \tag{52}$$

На основании (2), (3), (8) и (9) с учётом свойств оператора интегро-дифференцирования, Бета, гипергеометрической функции [21, гл. 1, § 1, 2 и 4, стр.4-32] и функции $G_j(x,t)(j=1,2)$ из (50) и (51) следует, что ядро и правой части уравнения (48) и (49) допускают оценки

$$\left|K_j(x,t)\right| \le c_1,, \tag{53}$$

$$\left|\Psi_1(x)\right| \le c_2 x^{2\beta-1}, \quad \left|\Psi_2(x)\right| \le c_3 (1+x)^{2\beta-1}, \; c_j = const > 0 \; (j=\overline{1,3}). \tag{54}$$

На основании (8), (9), с учётом (54) заключаем, что $\Psi_j(x) \in C^2(I_j)$, причём функция $\Psi_1(x)(\Psi_2(x))$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0 (x \to -1)$, а при $x \to 1 (x \to 0)$ ограничена.

В силу (2), (3), (53) и (54) уравнения (48) и (49) является интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма [22] и из единственности решения задачи T_j заключаем, что интегральное уравнение (48) и (49) однозначно разрешимо в классе $C^2(J_j)$, причем $\nu_j(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $|x|\to 0$, а при $|x|\to 1$ ограничено и её решение даётся формулой:

$$\nu_j(x)=\Psi_j(x)+\int_0^{(-1)^{j+1}} K_j^*(x,t)\Psi_j(t)dt,\quad (x,0)\in I_j,(j=1,2), \tag{55}$$

здесь $K_j^*(x,t)$ - резольвента ядро $K_j(x,t)$.

Подставляя (55) в (44) находим:

$$\tau_j(x)\in C(\overline{I}_j)\cap C^2(I_j),\quad (j=1,2). \tag{56}$$

Следовательно, задача T_j^* однозначно разрешима в силу эквивалентности её интегральному уравнению Фредгольма второго рода (48) и (49).

Таким образом, решение задачи T_j^* можно восстановить в области Ω_j^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (13) [23], а в Ω_j^- как решение задачи Коши для уравнения (14).

Этим завершается исследование существования решения задачи T_j^* для уравнения(22).

В силу (44), (55) из (19) и (20) с учётом (10), (11), (12) определим функции $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$. Тогда решение задачи T_j в области Ω_j^+ находится в виде:

$$u(x,y)=\upsilon_j(x,y)+\omega_j^+(x), \tag{57}$$

где $\upsilon_j(x,y)$ - решение первой краевой задачи для уравнения (13) [20], [23], а в областях Ω_j^- в виде

$$u(x,y)=w_j(x,y)+\omega_j^-(x),\quad (j=1,2), \tag{58}$$

здесь $w_j(x,y)$ - решение задачи Коши для уравнения (14) в области Ω_j^- $(j=1,2)$ [13].

Таким образом, в области Ω_j решение задачи T_j существует и единственно.

Теорема 3.j доказана.

4.2. Исследование задачи T_3

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (2),(3), (8) и (56), тогда в области Ω_3 существует единственное решение задачи T_3.

Доказательство теорема 3.3 приведено в работе [15].

Переходим к доказательству существования решения задачи T.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи T в области Ω с условиями (4)- (7), тогда, пользуясь результатами задач T_i $(i=\overline{1,3})$ (см. пункт 3.2.1 и 3.2.2) задачи T эквивалентным образом редуцируется к исследованию задач T_1 и T_2 для уравнения (1), где $\tau_3(y)$ – определяется из [15, формулы 4.39]. Однозначная разрешимость задач T_j следует из теоремы 3.j $(j=1,2)$ Следовательно, области Ω решение задачи T существует.

Теорема 3 доказана. Этим завершается исследование задачи T для уравнения (1).

Замечание. Точно так же, как указано выше, доказывается однозначная разрешимость задачи $\tilde{T}$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // "Дифференциальные уравнения". 19(1). 1983. С. 86-94.

2. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С. 3-6.

3. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы. 1995. 270 с.

4. Пулъкина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения. // "Тр. МИАН". 2002. Т. 236. С. 298-303.

5. Хубиев К.У. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2(15). 2007. С. 155-157.

6. Islomov B., Baltaeva U.I. Boundary value problems for the classical and mixed integro-differential equations with Riemann-Liuovil operators. // International Journal of Partial Differential equations. 2013. Article ID 157947. Pp. 11-17.

7. Kishin B.S., AbdullaevO.Kh. About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives // "International Journal of Differential Equations". 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.

8. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболтческого уравнения с вырождающейся частью. // "Дифференц. уравнения". 23(1). 1987. С. 72 - 78.

*9. Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения. // "Математические заметки". **51**(3). 1992. С. 91-96.*

*10. Balkizov Zh. A. Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain. // "Ufa Mathematical Journal". **9**(2). 2017. pp. 25-39.*

11. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // "Дифференциальные уравнения". 12(1). 1976. С. 103-108.

12. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка //«Дифференциальные уравнения». 14(1). 1978. С.181-184.

13. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // "Узбекский математический журнал". 2011. № 2. С. 75-85.

14. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle // "Uzbek Mathematical Journal". 2018. №3. pp. 63-72.

15. Исломов Б., Жураев Ф. Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области // "Уфимский математический журнал". Том 14. № 1(2022). С. 41-56

16. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанного - составного типа. Т. Фан. 1974. 156 с.

17. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно- составноготипа. Ташкент: Фан. 1979. 240 с.

18. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220с.

19. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. // "ЖВМиМФ". 4(6). 1965.С. 1006-1024.

20. Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения // Дис. канд. физ.мат. наук. Ташкент: ИМ АН РУз. 1995. 120 с.

21. СмирновМ.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985. 301 с.

22. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

23. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск. 1978. 53 с.