Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti

O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filiali

Gent “Analiz va xususiy hosilali tenglamalar” markazi (Belgiya)

“Science and innovation” xalqaro ilmiy jurnali

MATEMATIK FIZIKANING ZAMONAVIY USULLARI VA ULARNING TADBIQLARI

akademik Sh.A. Alimov tavalludining 80 yilligiga bag‘ishlangan respublika ilmiy anjumani

Toshkent shahri, 22-24-aprel, 2025 yil

MA’RUZALAR TEZISLARI

I TOM

======== ♢ ========

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте

Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Бельгия)

Международный научный журнал “Science and innovation”

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова
Ташкент, 22–24 апреля, 2025 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ТОМ I

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 +517.968 + 519.6.

«Современные методы математической физики и их приложения»: Тезисы докладов республиканской научной конференции посвященной 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова (22–24 апреля 2025 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во «Маърифат». 2025. 310 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения» по следующим направлениям: Спектральная теория дифференциальных операторов, Краевые задачи для уравнений математической физики, Дифференциальные уравнения дробного порядка, Современные проблемы алгебры и геометрии, Теория функций, Теория вероятностей и математическая статистика, Математическое моделирование и вычислительная математика.

Данная конференция организована на основании распоряжения 72–Ф Кабинета Министров Республики Узбекистан от 13 февраля 2025 года, приказом № 490 министра высшего образования, науки и инновациям Республики Узбекистан от 27 декабря 2024 года и приказом № 01–23 ректора Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека от 22 января 2025 года.

$$u_t - h(t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t)$$

Эти уравнения являются вырождающимися параболическими уравнения-ми,но,поскольку функция $h(t)$ в этих уравнениях будет неотрицательной и может обращаться в нуль, то данные уравнения будут вырождающимися параболическими уравнениями.

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми необходимыми обобщенными производными по С.Л.Соболеву.

Литература

1. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещеннем для линейных гиперболических уравнений.Математический журнал (Казахстан). 2009. Т.9., №2. С. 78-92.

2. Пулькина Л.С. Задача с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-Самарского ун-та.2012

3. Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений. 2014. Т.457, №2. С.152-156

4. А.И. Кожанов, А. В. Дюжева Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:3 (2021), 423–434

5. А.И. Кожанов, А.В.Дюжева Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка, Матем. заметки, 111:4 (2022), 540–550

Краевые Задачи С Разрывными Условиями Для Нагруженного Уравнения Смешанного Типа, Вирождающегося Внутри Области

Жураев Ф. М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева [1], В.М. Казиева [2], Б. Исломова и Ф. Джураева [3], Р.Р. Ашурова и С.З. Жамалова [4]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Данная работа изучаются локальные краевые задачи с разрывными условиями для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y , ограниченная кривыми:

$$S_j: \ \ |x|=1, \ \ 0<y<1, \ S_3: \ \ 0<x<1, \quad y=1, \ S_4: \ \ -1<x<0, \quad y=1,$$

$$\Gamma_j: \ |x|-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0, \quad \Gamma_{j+2}: \ |x|+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1, \ \ y\leq 0,$$

здесь и далее $x \geq 0$, при $j = 1$, $x \leq 0$, при $j = 2$, причем $m < 0$.
Введем обозначения $\Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x, y) :\ x > 0,\ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x, y) :\ x < 0,\ y > 0\},\ \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x, y) :\ x > 0,\ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x, y) :\ x < 0,\ y < 0\},\quad I_1 = \{(x, y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x, y) :\ -1 < x < 0,\ y = 0\},\ I_3 = \{(x, y) :\ x = 0,\ 0 < y < 1\},$$

$$\Omega_j = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^- \cup J_j,\ \Omega_3 = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup J_3,\ A_j((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j,$$
$$C_j \left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2};\ \ -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4} \right)^{2/(2-m)} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2},\ (j = 1, 2),$$

$$O(0, 0) = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2,\ B_1(1, 1) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3,\ B_2(-1, 1) = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4,\ B_0(0, 1) = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u\,(x, 0)\,, & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u\,(x, 0)\,, & (x, y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где m, p, ρ_j, μ_j $(j = 1, 2)$–любые действительные числа, причем

$$m < 0,\quad p > 0,\quad \rho_j > 0,\quad \mu_j > 0,\ (j = 1, 2). \tag{2}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие задачи.
Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x, y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3\right) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+\right) \cap C^2\left(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-\right)$;
2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j = 1, 2)$;
3) $u\,(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y),\quad 0 \leq y \leq 1, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_j} = \psi_j(x),\qquad 0 \leq (-1)^{j+1} x \leq \frac{1}{2},\ (j = 1, 2); \tag{4}$$

4) на линии вырождения I_i $(i = \overline{1, 3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y \to +0} u_y(x, y) = a_j(x) \lim_{y \to -0} u_y(x, y) + b_j(x),\ (x, 0) \in I_j,\ (j = 1, 2), \tag{5}$$

$$\lim_{x \to +0} u_x(x, y) = a_3(y) \lim_{x \to -0} u_x(x, y), + b_3(y),\ (x, 0) \in I_3; \tag{6}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $a_i(t)$, $b_i(t) (i = 1, 2, 3)$– заданные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\varphi_j(y) \in C\,[0, 1] \cap C^1\,(0, 1)\,,\ (j = 1, 2), \tag{7}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0,\,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\,\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2},\,0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right). \tag{8}$$

$$a_j(x),\;\; b_j(x) \in C(\bar{J}_j) \cap C^2(J_j), \quad a_j(x) \neq 0,\;\; \forall x \in \bar{J}_j,\;\; (j=1,2), \tag{9}$$

$$a_3(y),\;\; b_3(y) \in C(\bar{J}_3) \cap C^2(J_3), \quad a_3(y) \neq 0,\;\; \forall x \in \bar{J}_3. \tag{10}$$

Задача 2(3). Найти функцию $u(x,y)$, обладающую всеми свойствами задачи 1 кроме условий (4), которые заменяются условиями

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\;\; u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\left(u|_{\Gamma_2} = f_1(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \qquad u|_{\Gamma_3} = f_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right), \tag{12}$$

где $g_1\left(x\right),\;\; g_2\left(x\right),\;\; \left(f_1\left(x\right),\;\; f_2\left(x\right)\right)$ – заданные функции, причем $g_1(-1) = \varphi_2(0)$, $\left(f_2(1) = \varphi_2(0)\right)$,

$$g_1(x) \in C^1\left[0,\,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\,\frac{1}{2}\right),\; g_2(x) \in C^1\left[-1,\,-\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1,\,-\frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

$$\left(f_1(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2},\,0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right),\; f_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2},\,1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2},1\right)\right). \tag{14}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (7)–(10), то в области* Ω *решение задачи 1 существует и единственно.*

При доказательство единствености решения задачи 1 важную роль играет следующая лемма.

Леммы. *Если* $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0, \quad \forall y \in [0,1]$, $\psi_1(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *и* $\psi_2(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, *то*

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2). \tag{15}$$

Лемма доказывается с помощью метода интегральной энергии. Доказательства теоремы существования решения задачи 1 основана на теории вольтерских и фредгольмских интегральных уравнений.

Замечанме. Точно также как выше изложено, можно доказать теоремы единственность и существования решения задачи 2 (3).

Литература

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1976.**12**(1). С. 103-108.

2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1978. **14**(1). С.181-184.

3. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. Узбекский математический журнал. 2011. **2**. С. 75-85.

4. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle. Uzbek Mathematical Journal. 2018. **3**. pp. 63-72.

О Некоторых Задачах С Интегральными Условиями Для Нагруженного Уравнения Третьего Порядка

Зикиров О.С.[1], Рахматов Н.Б.[2]

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент
[1]zikirov@yandex.ru; [2]nodirbekrakhmatov0@gmail.com

В докладе рассматривются некоторые смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) + \int\limits_0^\ell k(x,t)u(x,t)dx, \qquad (1)$$

Пусть $d(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $k(x,t)$, $p(x,t)$ и $\alpha(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$.

В настоящее работе для уравнения (1) изучаются следующие нелокальные задачи с интегральными условиями.

Нелокальная задача A. *Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \qquad (2)$$

$$u(0,t) = \int\limits_0^\ell p(x,t)u(x,t)dx + \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

$$u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (4)$$

здесь $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,2})$ — заданные, непрерывные на $[0,\ell]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0) = \mu_2(0), \quad \varphi(0) = \int\limits_0^\ell p(x,0)\varphi(x)dx + \mu_1(0).$$

Нелокальная задача B. *От нелокальной задачи A отличается тем, что условие (4) заменяется условием вида*

$$u_x(\ell,t) = \alpha(t)u(\ell,t) + \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

где $\alpha(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные, непрерывные функции и удовлетворяющие соответствующие условиям согласования

$$\varphi(0) = \int\limits_0^\ell p(x,0)\varphi(x)dx + \mu_1(0) \qquad \varphi'(\ell) = \alpha(0)\varphi(\ell) + \mu_2(0).$$